MATHEMATISCHE ANNALEN

141. BAND

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH
ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH
FELIX KLEIN · DAVID HILBERT · OTTO BLUMENTHAL · ERICH HECKE

141. BAND

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1960

Unveränderter Nachdruck 1971
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Springer-Verlag OHG/Berlin · Göttingen · Heidelberg

Printed in Germany

Druck: Brühlsche Universitätsdruckerei Gießen

Inhalt des 141. Bandes

Eckmann, B. and P. J. Hilton
Math. Annalen 141, 1—21 (1960)

Operators and Cooperators in Homotopy Theory

By

B. Eckmann in Zürich and P. J. Hilton*) in Birmingham

1. Introduction

In the definition of a fibre bundle the data include an operation of the structure group G, which is a topological group, on the fibre F: that is, a continuous map $F \times G \to F$ satisfying certain conditions. In the more general context of fibrations (in the sense of Serre) it is well-known that if $p: X \to Y$ is a fibre map with fibre F then there is an operation, defined up to homotopy, of the loop-space ΩY on F (see e.g., [1, 3]). If we pass from the category $\mathfrak{T}$ of based topological spaces and based continuous maps to the category $\mathfrak{D}$ of based topological spaces and based *homotopy classes* of continuous maps then we may regard ΩY as a "group" in the category $\mathfrak{D}$ and the operation is a map in $\mathfrak{D}$. Thus we recover the situation of a group operating on an object but in a different category. In the category $\mathfrak{D}$ however there is the useful dual notion of a "cogroup" (the cogroups in $\mathfrak{T}$ are just the one-point spaces!) and we may expect to find a cogroup "cooperating" on an object of $\mathfrak{D}$ in the presence of a cofibration in $\mathfrak{T}$. In fact Puppe pointed out in [4] that if $f: P \to Q$ is a map and if Z is the space obtained from Q by attaching CP, the cone on P, to Q by means of f, then, for any space B, the group $\Pi_1(P, B)$ operates on the set[1]) $\Pi(Z, B)$. In this paper we show that Puppe's operation is derived from a cooperation of ΣP, the suspension of P, on Z which is a special case of a cooperation, defined up to homotopy, of the suspension ΣY of the base Y on the cofibre F in an arbitrary cofibration $i: Y \to X$. As such it is the precise dual, in the sense of [2], of the operation associated with a fibration, discussed above.

We first formulate (§ 2) the notions of groups of operators and cogroups of cooperators as dual concepts in a general category with zero maps which admits finite direct products and finite free products[2]). We then develop in § 3 the general theory of operators in the category $\mathfrak{D}$ derived from fibrations in the category $\mathfrak{T}$, and also the dual theory of cooperators in $\mathfrak{D}$ derived from cofibrations in $\mathfrak{T}$. Their rôle in connection with the *exact homotopy sequences* of fibrations and cofibrations is studied in § 4. In the final section we consider the

*) The second-named author was supported by the U. S. Office of Naval Research (Contract No. Nonr 401 (20) — NR 043—167) while preparing the material for this paper.

[1]) $\Pi(X, Y)$ is the set of homotopy classes of maps $X \to Y$. For the definition of the group $\Pi_1(X, Y)$ see [2].

[2]) A more general and detailed treatment of *group-like structures in general categories* will form the subject of a later paper.

theorem of Spanier-Whitehead [5] which asserts that *if the fibre F of the fibration $p: X \to Y$ is contractible in X, then F is an H-space* (space with multiplication). We show how a contraction of F determines a definite homotopy equivalence of $\Omega X \times F$ with ΩY and construct a homotopy inverse. The dual theorem then asserts that *if the projection $q: X \to F$ from the total space X of the cofibration $i: Y \to X$ onto the cofibre F is contractible then there is a homotopy equivalence of ΣY with $\Sigma X \vee F$. As a consequence F is an H'-space* (space with comultiplication).

The entire emphasis of our results — and, in some cases, their main claim to novelty — rests on the duality aspect featured in them. In order to be able to pass from a theorem in $\mathfrak{T}$ to its dual it would be necessary to formulate the proof in such a way that it dualizes automatically. Thus, for example, if we wish to prove that a map is a homotopy equivalence we prefer to exhibit an explicit inverse rather than, e.g., to demonstrate that it induces an isomorphism of homotopy groups since, even if we were content with singular homotopy type, the dual form of argument would almost certainly require simple-connectedness. This untoward avoidance of the "natural" techniques of combinatorial homotopy theory involves us often in unexpectedly lengthy arguments; its principal justification must depend on the (ultimate) success of resting the validity of a dual assertion on a duality principle, but it may also be claimed that it broadens the scope of our results.

We have been deliberately unsystematic in choosing to which of two theorems standing in duality to each other to give greater prominence (and full proof). Rather we have been guided by the view that the choice in any particular case should depend on the familiarity of the relevant notions. Our indexing system is such that a result (or definition) based on the notion of cooperator carries a prime appended to the index of the corresponding result (or definition) for operators. In our notation we also usually try to emphasize the duality, but feel in a few cases hampered by tradition[3]).

2. General definitions

In this section we introduce the notions of *operator* and *cooperator* in a general category $\mathfrak{C}$ with zero maps. We will actually be more explicit about the second notion since it is less familiar and will usually only sketch the dual.

Let I be an indexing set and let A_i, $i \in I$, be a collection of objects of $\mathfrak{C}$ indexed by I. Suppose that there exist in $\mathfrak{C}$ an object A and maps $\mu_i: A_i \to A$, $i \in I$, with the property:

(F) given any collection of maps $\phi_i: A_i \to B$ there exists a unique map $\phi: A \to B$ with $\phi \mu_i = \phi_i$.

It is easy to see that if A', together with maps $\mu_i': A_i \to A'$, also have property (F) there is a unique equivalence $\omega: A \cong A'$ with $\omega \mu_i = \mu_i'$. We may

[3]) It is acceptable to write $* \to F \xrightarrow{j} X \xrightarrow{p} Y$ for a fibration sequence; but it would be less familiar to write $p': Y' \to X$ for a cofibre map (say, an inclusion) and j' for the projection of X' on $X'/p'Y'$.

therefore speak without real ambiguity of the collection $\{A;\mu_i\}$ as the *free product* (or *free join*) of the objects A_i; we may sometimes simply say that A is the free product of the A_i.

We will impose on the category $\mathfrak{C}$ the following axiom[4]).

Axiom F. Every *finite* collection of objects of $\mathfrak{C}$ has a free product.

When the indexing set I consists of just the integers $1, \ldots, n$ we may write the map ϕ postulated by the axiom as $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^F$ and A as $A_1 * \cdots * A_n$. If $A_i = Q$ (for a particular i) we may write $\mu_?$ for μ_i, and $\phi_?$ for ϕ_i. If, in property (F), we take[5]) $B = A_j$, $\phi_i = 0$, $i \neq j$, $\phi_j = 1$, we may write η_j for the map $\phi: A \to A_j$. Given $\theta_i: C_i \to A_i$, $\phi_i: A_i \to B$ in $\mathfrak{C}$, $i \in 1, \ldots, n$, there exists $\tilde{\theta}: C_1 * \cdots * C_n \to A_1 * \cdots * A_n$ with

$$\tilde{\theta} = (\mu_1\theta_1, \ldots, \mu_n\theta_n)^F;$$

we write $\theta_1 * \cdots * \theta_n$ for $\tilde{\theta}$.

We now list two lemmas which will be useful in the sequel; the proofs will be omitted.

Lemma 2.1'. *There is a unique equivalence* $\chi': (A_1 * A_2) * A_3 \to A_1 * (A_2 * A_3)$ *such that, for any maps* $\phi_i: A_i \to B$, $i = 1, 2, 3$,

$$((\phi_1, \phi_2)^F, \phi_3)^F = (\phi_1, (\phi_2, \phi_3)^F)^F \circ \chi' .$$

Lemma 2.2'. (i) Given $\phi_i: A_i \to B$, $\psi: B \to C$ in $\mathfrak{C}$,

$$\psi \circ (\phi_1, \ldots, \phi_n)^F = (\psi \circ \phi_1, \ldots, \psi \circ \phi_n)^F: A_1 * \cdots * A_n \to C .$$

(ii) Given $\phi_i: A_i \to B$, $\theta_i: C_i \to A_i$ in $\mathfrak{C}$,

$$(\phi_1, \ldots, \phi_n)^F \circ (\theta_1 * \cdots * \theta_n) = (\varphi_1 \circ \theta_1, \ldots, \varphi_n \circ \theta_n)^F .$$

Passing to the dual concepts, we suppose that there exists in $\mathfrak{C}$ an object A and maps $\varepsilon_i: A \to A_i$, $i \in I$, such that (D) given any collection of maps $\phi_i: B \to A_i$ there exists a unique map $\phi: B \to A$ with $\varepsilon_i\phi = \phi_i$.

We may then speak without real ambiguity of $\{A;\varepsilon_i\}$, or, briefly, A, as the *direct product* (or *direct join*) of the objects A_i. We will impose on $\mathfrak{C}$ the following axiom, dual to Axiom F.

Axiom D. Every *finite* collection of objects of $\mathfrak{C}$ has a direct product.

We adopt notational conventions for the direct product similar to those for the free product. The direct product of $A_1, \ldots, A_n$ may be written $A_1 \times \cdots \times A_n$. If, in property (D), we take $B = A_j$, $\phi_i = 0$, $i \neq j$, $\phi_j = 1$, we may write ν_j for the map $\phi: A_j \to A$. The dual of χ' is an equivalence

$$\chi: A_1 \times (A_2 \times A_3) \to (A_1 \times A_2) \times A_3 ,$$

such that $((\phi_1, \phi_2)^D, \phi_3)^D = \chi \circ (\phi_1, (\phi_2, \phi_3)^D)^D$ where $\phi_i: B \to A_i$. We leave Lemmas 2.1, 2.2 implicit and proceed to define the notions of *group* and *cogroup* in $\mathfrak{C}$ (see [2]); we will be quite explicit only in the latter case.

[4]) We remark that Axiom F is equivalent to the axiom that any *two* objects of C have a free product.

[5]) We write $1: A \to A$ for the identity map, $0: A \to B$ for the zero map (between the given objects).

Definition 2.3'. A *cogroup* in $\mathfrak{C}$ is an object A together with a map $\varkappa' : A \to \to A * A$ in $\mathfrak{C}$ satisfying the conditions

(i) (Associativity) $\chi' \circ (\varkappa' * 1) \circ \varkappa' = (1 * \varkappa') \circ \varkappa'$;

(ii) (Zero map as right unit) $(1,0)^F \circ \varkappa' = 1$;

(iii) (Existence of right inverse) there exists $\tau' : A \to A$ in $\mathfrak{C}$ with $(1, \tau')^F \circ \varkappa' = 0$.

We shall permit ourselves to talk sometimes of the cogroup A instead of $(A, \varkappa')$. The category $\mathfrak{C}$ which we shall largely be concerned with in this paper, that of spaces with base points and based homotopy classes, admits an important family of cogroups, namely the suspension spaces. However, to give an example from a different source, in the category $\mathfrak{G}$ of groups and homomorphisms the "cogroups" are precisely the *free* groups[2]).

Let $\mathfrak{S}$ be the category of sets, $M : \mathfrak{G} \to \mathfrak{S}$ the obvious functor from $\mathfrak{G}$ to $\mathfrak{S}$; we say that a functor $Q : \mathfrak{C} \to \mathfrak{S}$ is a *functor to groups* if it factors through M, that is, if $Q = M Q'$ for some $Q' : \mathfrak{C} \to \mathfrak{G}$. Given a cogroup $(A, \varkappa)$ and an object B in $\mathfrak{C}$ we define a composition in the set Map (A, B) by the rule

(2.4') $$\alpha_1 +' \alpha_2 = (\alpha_1, \alpha_2)^F \circ \varkappa', \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{Map}\,(A, B)\,.$$

We may then prove (see [2]).

Theorem 2.5'. *The rule* (2.4') *gives the set* Map (A, B) *a group structure; moreover the functor* Map $(A,\ )$ *is then a (contravariant) functor to groups.*

In the dual case we define a *group* in $\mathfrak{C}$ to be an object A together with a map $\varkappa : A \times A \to A$ satisfying conditions dual to those of Definition 2.3'. Thus in the category $\mathfrak{D}$ topological groups and loop-spaces constitute examples of groups; in the category $\mathfrak{G}$ the "groups" are precisely the *abelian* groups[2]). Given a group $(A, \varkappa)$ and an object B in $\mathfrak{C}$ we define a composition in Map (B, A) by the rule

(2.4) $$\beta_1 + \beta_2 = \varkappa \circ (\beta_1, \beta_2)^D, \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathrm{Map}\,(B, A)\,.$$

Then Theorem 2.5' dualizes as

Theorem 2.5. *The rule* (2.4) *gives the set* Map (B, A) *a group structure; morecver the functor* Map $(\ , A)$ *is then a (covariant) functor to groups.*

We state for completeness the *compatibility theorem* (see [2]):

Theorem 2.6. *If* $(A, \varkappa')$ *is a cogroup and* $(B, \varkappa)$ *is a group, then the two induced group structures in* Map (A, B) *coincide and are abelian.*

We are now ready to define the concept of an *operator (group)* and a *cooperator (cogroup)* in $\mathfrak{C}$. Let F be an object in $\mathfrak{C}$ and let $(A, \varkappa)$ be a group.

Definition 2.7. The group $(A, \varkappa)$ *operates (on the right) on F through ϱ* if the map $\varrho : F \times A \to F$ satisfies the conditions

(i) $\varrho \circ (1, 0)^D = 1 : F \to F$;

(ii) $\varrho \circ (1 \times \varkappa) = \varrho \circ (\varrho \times 1) \circ \chi : F \times (A \times A) \to F$.

Notice that $(1,0)^D$ is just the "injection" $\nu_F : F \to F \times A$; if ϱ is the projection $\varepsilon_F : F \times A \to F$ then it is immediate that (i) is satisfied and not difficult to show that (ii) is satisfied. We call $(A; \varepsilon_F)$ the *trivial* operation of A on F.

Now let F be an object in $\mathfrak{C}$ and let $(A, \varkappa')$ be a cogroup.

Definition 2.7′. The cogroup $(A, \varkappa')$ *cooperates (on the right) on F through ϱ'* if the map $\varrho' : F \to F * A$ satisfies the conditions

(i) $(1, 0)^F \circ \varrho' = 1 : F \to F$;

(ii) $(1 * \varkappa') \circ \varrho' = \chi' \circ (\varrho' * 1) \circ \varrho' : F \to F * (A * A)$.

We call $(A; \mu_F)$ the *trivial* cooperation of A on F. Notice that a group in $\mathfrak{C}$ operates on itself non-trivially by (right) multiplication and a cogroup in $\mathfrak{C}$ cooperates on itself non-trivially by (right) comultiplication.

We now enunciate two dual theorems and prove the former.

Theorem 2.8. *Let A operate on F through $\varrho : F \times A \to F$. Then for any object B in $\mathfrak{C}$ the group* $\mathrm{Map}\,(B, A)$ *operates on the set* $\mathrm{Map}\,(B, F)$ *through* $\varrho_* = \varrho_*^B : \mathrm{Map}\,(B, F) \times \mathrm{Map}\,(B, A) \to \mathrm{Map}\,(B, F)$, *given by* $\varrho_*(\xi, \beta) = \varrho \circ (\xi, \beta)^D$, $\xi \in \mathrm{Map}\,(B, F)$, $\beta \in \mathrm{Map}\,(B, A)$.

If, moreover, $\psi : B \to C$, *then* ψ *induces* $\psi_F^* : \mathrm{Map}\,(C, F) \to \mathrm{Map}\,(B, F)$, $\psi_A^* : \mathrm{Map}\,(C, A) \to \mathrm{Map}\,(B, A)$ *and the diagram*

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Map}\,(C, F) \times \mathrm{Map}\,(C, A) & \xrightarrow{\varrho_*^C} & \mathrm{Map}\,(C, F) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \psi_F^* \times \psi_A^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \psi_F^*} \\
\mathrm{Map}\,(B, F) \times \mathrm{Map}\,(B, A) & \xrightarrow{\varrho_*^B} & \mathrm{Map}\,(B, F)
\end{array}
\tag{2.9}
$$

is commutative.

Theorem 2.8′. *Let A cooperate on F through $\varrho' : F \to F * A$. Then for any object B in $\mathfrak{C}$ the group* $\mathrm{Map}\,(A, B)$ *operates on the set* $\mathrm{Map}\,(F, B)$ *through* $\varrho'^* = \varrho_B'^* : \mathrm{Map}(F, B) \times \mathrm{Map}(A, B) \to \mathrm{Map}(F, B)$ *given by* $\varrho'^*(\xi, \alpha) = (\xi, \alpha)^F \circ \varrho'$, $\xi \in \mathrm{Map}\,(F, B)$, $\alpha \in \mathrm{Map}\,(A, B)$.

If, morever, $\psi : B \to C$, *then* ψ *induces* $\psi_*^F : \mathrm{Map}\,(F, B) \to \mathrm{Map}\,(F, C)$, $\psi_*^A : \mathrm{Map}\,(A, B) \to \mathrm{Map}\,(A, C)$ *and the diagram*

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Map}\,(F, B) \times \mathrm{Map}\,(A, B) & \xrightarrow{\varrho_B'^*} & \mathrm{Map}\,(F, B) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \psi_*^F \times \psi_*^A} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \psi_*^F} \\
\mathrm{Map}\,(F, C) \times \mathrm{Map}\,(A, C) & \xrightarrow{\varrho_C'^*} & \mathrm{Map}\,(F, C)
\end{array}
\tag{2.9′}
$$

is commutative.

We prove[6] 2.8. We have to verify (i) $\varrho_*(\xi, 0) = \xi$ and (ii) $\varrho_*(\xi, \beta_1 + \beta_2) = \varrho_*(\varrho_*(\xi, \beta_1), \beta_2)$. Now $\varrho_*(\xi, 0) = \varrho \circ (\xi, 0)^D = \varrho \circ (1,0)^D \circ \xi = \xi$ by 2.7 (i). To verify (ii), we observe that

$$
\begin{aligned}
\varrho_*(\xi, \beta_1 + \beta_2) &= \varrho_*(\xi, \varkappa \circ (\beta_1, \beta_2)^D) \\
&= \varrho \circ (\xi, \varkappa \circ (\beta_1, \beta_2)^D)^D \\
&= \varrho \circ (1 \times \varkappa) \circ (\xi, (\beta_1, \beta_2)^D)^D && \text{by 2.2 (ii)} \\
&= \varrho \circ (\varrho \times 1) \circ \chi \circ (\xi, (\beta_1, \beta_2)^D)^D && \text{by 2.7 (ii)} \\
&= \varrho \circ (\varrho \times 1) \circ ((\xi, \beta_1)^D, \beta_2)^D && \text{by 2.1} \\
&= \varrho \circ (\varrho \circ (\xi, \beta_1)^D, \beta_2)^D && \text{by 2.2 (ii)} \\
&= \varrho \circ (\varrho_*(\xi, \beta_1), \beta_2)^D \\
&= \varrho_*(\varrho_*(\xi, \beta_1), \beta_2).
\end{aligned}
$$

---

[6]) Just to avoid a proliferation of primes.

This shows that Map (B, A) operates on Map (B, F) through ϱ_*. The commutativity relation (2.9) follows easily; for if $\xi \in$ Map (C, F), $\nu \in$ Map (C, A)

$$\varrho_*^B(\psi_F^* \times \psi_A^*)(\xi, \gamma) = \varrho_*^B(\xi\psi, \gamma\psi) = \varrho \circ (\xi\psi, \gamma\psi)^D = \varrho \circ (\xi, \gamma)^D \circ \psi, \text{ by 2.2 (i)}$$
$$= \varrho_*^C(\xi, \gamma) \circ \psi = \psi_F^* \varrho_*^C(\xi, \gamma).$$

3. Fibre spaces and operators and their duals

Let $\mathfrak{T}$ be the category of spaces with base points and $*$ based maps and let $\Phi: \mathfrak{T} \to \mathfrak{D}$ be the functor which places a map in its homotopy class. We remark that $\mathfrak{T}$ and $\mathfrak{D}$ both satisfy axioms F and D and that the functor Φ preserves free and direct products. The direct product of the spaces $X_1, \ldots, X_n$ is just the Cartesian product while the free product is the wedge, usually written $X_1 \vee \cdots \vee X_n$; however we propose in this paper to retain the notation of § 2 so that the wedge will be written[7] $X_1 * \cdots * X_n$. We identify objects of $\mathfrak{T}$ and $\mathfrak{D}$ under Φ and may write $\{f\}$ for $\Phi(f)$ if f is a map in $\mathfrak{T}$. We reserve Map (A, B) for the set of maps from A to B in $\mathfrak{T}$ and retain $\Pi(A, B)$ for the set of homotopy classes (or maps in $\mathfrak{D}$). Roman 1. c. letters represent maps in $\mathfrak{T}$ and Greek 1. c. represents maps in $\mathfrak{D}$.

Our interest in this section will be to construct operators and cooperators in $\mathfrak{D}$ from maps in $\mathfrak{T}$. We first concern ourselves with the case of a fibre map $p: X \to Y$ in $\mathfrak{T}$. Let F be the fibre and let $j: F \to X$ embed the fibre in X. We write this as *a short exact sequence*

$$* \to F \xrightarrow{j} X \xrightarrow{p} Y.$$

Then we will derive an operation of ΩY on F in $\mathfrak{D}$ which formalizes the familiar process of lifting loops in Y to paths in X.

Let $f_0: F \times \Omega Y \to X$, $g_t: F \times \Omega Y \to Y$ be given by $f_0(a, l) = ja$, $g_t(a, l) = l(t)$, $a \in F$, $l \in \Omega Y$. Then $pf_0 = g_0 (= 0)$, so that we may lift g_t to $f_t: F \times \Omega Y \to X$. Then $pf_1 = g_1 = 0$, so that f_1 determines a map $f: F \times \Omega Y \to F$. Let ϱ be the homotopy class of f.[8]

Theorem 3.1. *The map $\varrho: F \times \Omega Y \to F$ in $\mathfrak{D}$ depends only on the map $p: X \to Y$ in $\mathfrak{T}$ and ΩY operates on F through ϱ.*

We rest the proof of this theorem and of many subsequent results on the following simple lemma and its corollary.

Lemma 3.2. *Let $h: Q \times I \to X$ be a map with $h(Q \times I) \subset F$ and let $ph \simeq 0$: $Q \times I \to Y$ rel $Q \times \dot{I}$. Then if $h_i: Q \to F$ are given by $h_i(q) = h(q, i)$, $i = 0,1$, $q \in Q$, we have $h_0 \simeq h_1: Q \to F$.*

Proof. Let $H': Q \times (I \times 0 \cup \dot{I} \times I) \to X$ be given by

$$H'(q, t, 0) = h(q, t)$$
$$H'(q, i, u) = h(q, i)$$

[7]) $A * B$ is sometimes used for the topological *join* of A and B, but this concept will not be used in this paper.

[8]) The notation of this paragraph is standard for the rest of the paper.

and let $G: Q \times I \times I \to Y$ be the given nullhomotopy of ph. Then clearly G extends pH'. Now the pair $(I \times I, I \times 0 \cup \dot{I} \times I)$ is homeomorphic with the pair $(I \times I, I \times 0)$. It thus follows from the lifting homotopy property for p that H' may be extended to $H: Q \times I \times I \to X$ with $G = pH$. We define $h_t: Q \to F$ by $h_t(q) = H(q, t, 1)$.

Corollary 3.3. *Let $f_0: Q \to X$ be a given map, let $g_t: Q \to Y$ be a nullhomotopy of $g_0 = pf_0$ and let $f_t: Q \to X$ lift g_t. Then f_1 determines a map $f: Q \to F$ and the homotopy class of f depends only on f_0 and g_t.*

Proof. Let f'_t be another homotopy of f_0 lifting g_t and let f'_1 determine $f': Q \to F$. Then the composition of the reverse of f_t with f'_t yields a map $h: Q \times I \to X$ with $H(Q \times \dot{I}) \subseteq F$. Moreover $ph: Q \times I \to Y$ is given by

$$\begin{aligned} ph(q,t) &= g_{1-2t}(q)\,, & 0 \leq t \leq \tfrac{1}{2}\,, \\ &= g_{2t-1}(q)\,, & \tfrac{1}{2} \leq t \leq 1\,. \end{aligned}$$

It is elementary that $ph \simeq 0$ rel $Q \times \dot{I}$. We therefore may apply 3.2 to conclude that $f \simeq f': Q \to F$.

The corollary immediately yields the first statement of the theorem. It also provides a useful criterion for determining when two maps into F are homotopic and as such we now put it to work to complete the proof of the theorem. We have to show (i) that $a \to f(a, *)$ is homotopic to the identity map of F, and (ii) that the maps $(a, l, m) \to f(f(a, l), m)$ and $(a, l, m) \to f(a, l+m)$ are homotopic, where $l + m$ is the sum of the loops l, m.

Proof of (i). Define $u_t: F \to X$ by $u_t(a) = ja$ and $v_t: F \to X$ by $v_t(a) = f_t(a, *)$. Then $u_0 = v_0$ and $pu_t = pv_t (= 0)$. Since u_1 determines $1: F \to F$ and v_1 determines the map $a \to f(a, *)$, 3.3 yields the result.

Proof of (ii). Define $u_t: F \times \Omega Y \times \Omega Y \to X$ by

$$\begin{aligned} u_t(a, l, m) &= f_{2t}(a, l), & 0 \leq t \leq \tfrac{1}{2}\,, \\ &= f_{2t-1}(f(a, l), m), & \tfrac{1}{2} \leq t \leq 1\,; \end{aligned}$$

and define $v_t: F \times \Omega Y \times \Omega Y \to X$ by

$$v_t(a, l, m) = f_t(a, l+m)\,.$$

Then $u_0 = v_0$ and $pu_t(a, l, m) = (l+m)(t) = pv_t(a, l, m)$. An application of 3.3 proves (ii) and hence the theorem.

We apply Theorem 2.8 to yield

Theorem 3.4. *Given any space B the group $\Pi(B, \Omega Y)$ operates on the set $\Pi(B; F)$ through ϱ_*, given by $\varrho_*(\xi, \beta) = \varrho \circ (\xi, \beta)^D$, $\xi \in \Pi(B, F)$, $\beta \in \Pi(B, \Omega Y)$. Moreover if $\psi: B \to C$ in $\mathfrak{D}$ then*

$$\varrho_*(\psi^* \times \psi^*) = \psi^* \varrho_*: \Pi(C, F) \times \Pi(C, \Omega Y) \to \Pi(B, F)\,. \tag{3.5}$$

We will allow ourselves to write ξ^β for $\varrho_*(\xi, \beta)$. Then (3.5) takes the form

$$\psi^*(\xi^\beta) = (\psi^* \xi)^{\psi^* \beta}\,. \tag{3.6}$$

We will write the group operation in $\Pi(B, \Omega Y)$ additively even though it is not in general abelian. Thus conditions (i) and (ii) of Definition 2.7 assume the form

(3.7) $\quad$ (i) $\xi^0 = \xi$, (ii) $(\xi^{\beta_1})^{\beta_2} = \xi^{\beta_1 + \beta_2}$, $\xi \in \Pi(B, Y)$, $\beta_1, \beta_2 \in \Pi(B, \Omega Y)$.

We next prove a naturality law for ϱ which in a sense complements (3.6). Consider the commutative diagram in $\mathfrak{Z}$,

$$\begin{array}{ccccccc} * \to & F & \xrightarrow{j} & X & \xrightarrow{p} & Y \\ & \downarrow{u} & & \downarrow{v} & & \downarrow{w} \\ * \to & F' & \xrightarrow[j']{} & X' & \xrightarrow[p']{} & Y', \end{array}$$

which represents a map of the fibration p into the fibration p'. We have operations $\varrho: F \times \Omega Y \to F$, $\varrho': F' \times \Omega Y' \to F'$ and we prove.

Theorem 3.8. *The diagram*

$$\begin{array}{ccc} F \times \Omega Y & \xrightarrow{\varrho} & F \\ \downarrow{(u) \times \Omega(w)} & & \downarrow{(u)} \\ F' \times \Omega Y' & \xrightarrow[\varrho']{} & F' \end{array}$$

is commutative.

Proof. We suppose ϱ' obtained by a lift f'_t of $g'_t: F' \times \Omega Y' \to X'$ just as ϱ was obtained and we consider the homotopies $m_t, n_t: F \times \Omega Y \to X'$ given by

$$m_t(a, l) = v f_t(a, l),$$
$$n_t(a, l) = f'_t(u(a), wl), \; a \in F, l \in \Omega Y.$$

Then $m_0(a, l) = v f_0(a, l) = v j(a)$ and $n_0(a, l) = f'_0(u(a), wl) = j' u(a)$. Thus $m_0 = n_0$. Also $p' m_t(a, l) = p' v f_t(a, l) = w p f_t(a, l) = w g_t(a, l) = wl(t)$ $= p' f'_t(u(a), wl) = p' n_t(a, l)$. We may thus apply 3.3. Now m_1 determines $uf: F \times \Omega Y \to F'$ and n_1 determines $f'(u \times \Omega w): F \times \Omega Y \to F'$. Thus $uf \simeq f'(u \times \Omega w): F \times \Omega Y \to F'$ and the theorem is proved. We may deduce that

(3.9) $\quad u_*(\xi^\beta) = (u_* \xi)^{(\Omega w)_* \beta}$, $\xi \in \Pi(B, F)$, $\beta \in \Pi(B, \Omega Y)$.

Now let $v: X \to Y$ be an arbitrary map in $\mathfrak{T}$. By applying the "mapping track" functor we factorize v as $X \xrightarrow{u} E_v \xrightarrow{p} Y$ where u is a homotopy equivalence and p is a fibre map. In fact E_v is the subspace of $X \times Y^I$ consisting of pairs (x, l) with $v(x) = l(0)$ and $p(x, l) = l(1)$. The fibre of p, which is the subspace of $X \times Y^I$ consisting of pairs (x, l) with $v(x) = l(0)$, $l(1) = *$, will be written F_v. It may also be interpreted as the fibre space over X induced by the map v. There is then an operation

$$\varrho_v: F_v \times \Omega Y \to F_v.$$

Proposition 3.10. *The operation ϱ_v is induced by the map $f_v: F_v \times \Omega Y \to F_v$ given by*

$$f_v((x, l), m) = (x, l + m).$$

Proof. Define a homotopy $f_t: F_v \times \Omega Y \to E_v$ by

$$f_t((x, l), m) = (x, n_t), \text{ where}$$
$$\begin{aligned} n_t(\tau) &= l(2\tau/(2-t)), & 0 \le \tau \le 1 - \tfrac{t}{2}, \\ &= m(2\tau - 2 + t), & 1 - \tfrac{t}{2} \le \tau \le 1. \end{aligned}$$

Then $f_0((x,l),m) = (x, n_0) = (x, l)$ and $pf_t((x,l),m) = n_t(1) = m(t) = g_t((x,l),m)$. Now $f_1((x, l), m) = (x, n_1)$ and

$$\begin{aligned} n_1(\tau) &= l(2\tau), & 0 \le \tau \le \tfrac{1}{2}, \\ &= m(2\tau - 1), & \tfrac{1}{2} \le \tau \le 1. \end{aligned}$$

Thus $n_1 = l + m$, so that f_1 determines the given map f_v and the proposition is proved.

We may describe the operation given by 3.10 as the operation in $\mathfrak{D}$ associated with the map v. At first glance this involves us in a serious ambiguity as the map v may in fact already have been a fibre map. However we will show that this ambiguity is really illusory by proving

Theorem 3.11. *Let $p: X \to Y$ be a fibre map with fibre F. Then there exists a canonical equivalence $\omega: F \cong F_p$ in $\mathfrak{D}$ such that*

$$\omega \circ \varrho = \varrho_p \circ (\omega \times 1): F \times \Omega Y \to F_p .$$

Proof. Consider the factorization $X \xrightarrow{u} E_p \xrightarrow{q} Y$ of p, where we write q now for the fibre map $q(x, l) = l(1)$. This clearly induces a map $h: F \to F_p$ in the sense that we have a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d, "h"] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[d, "1"] \\ * \arrow[r] & F_p \arrow[r] & E_p \arrow[r, "q"'] & Y \end{tikzcd}$$

If ω is the class of h, the commutativity relation $\omega \circ \varrho = \varrho_p \circ (\omega \times 1)$ follows from 3.8. Since ω is clearly canonical, it remains only to prove it an equivalence. It is obviously sufficient to establish

Proposition 3.12. $(u, 1): p \to q$ *is a homotopy equivalence in the category of pairs*[9]).

Proof. Let $r_0: E_p \to X$ be the projection, and let $q_t: E_p \to Y$ be given by $q_t(x, l) = l(t)$. Then $q_1 = q$ and $q_0 = pr_0$. Since p is a fibre map we may lift q_t to $r_t: E_p \to X$ with $pr_t = q_t$. Then $(r_1, 1): q \to p$ and we show that $(r_1, 1)$ is a homotopy inverse of $(u, 1)$.

Consider first $(r_1 u, 1): p \to p$. Now $pr_t u(x) = q_t(x, l_x) = p(x)$, where l_x is the constant path at $p(x)$. Thus $pr_t u = p$, so that $(r_t u, 1)$ is a homotopy between $(r_0 u, 1) = 1$ and $(r_1 u, 1)$ and $(r_1 u, 1) \simeq 1$.

It remains to consider $(ur_1, 1) : q \to q$. Given $l \in Y^I$, let $l_\tau \in Y^I$ be given by $l_\tau(t) = l((1-\tau)t)$. Define a homotopy $m_\tau: E_p \to E_p$ by $m_\tau(x, l) = (x, l_\tau)$ and

[9]) See [2].

a homotopy $n_\tau : E_p \to E_p$ by $n_\tau = ur_\tau$. Then $m_1 = n_0$ so that we may compose the homotopies m and n to produce a map

$$F : E_p \times I \to E_p$$

which is a homotopy from the identity on E_p to ur_1. Moreover

$$qF(x, l, \tau) = l(1 - 2\tau), \qquad 0 \leqq \tau \leqq \frac{1}{2},$$
$$= l(2\tau - 1), \qquad \frac{1}{2} \leqq \tau \leqq 1.$$

Let $G' : E_p \times I \to Y$ be given by $G'(x, l, \tau) = l(1)$. Then plainly $qF \simeq G' : E_p \times I \to Y$ rel $E_p \times \dot{I}$. By an easy extension of the proof of Lemma 3.2 we deduce that $F \simeq F' : E_p \times I \to E_p$ rel $E_p \times \dot{I}$ with $qF' = G'$. Then F' is a homotopy from 1 to ur_1 with the property that $qF'(x, l, \tau) = l(1) = q(x, l)$. It follows immediately that F' induces a homotopy $1 \simeq (ur_1, 1) : q \to q$; the proposition is proved and with it Theorem 3.11.

Now let $\phi : X \to Y$ be a map in $\mathfrak{D}$. With each map v with $\{v\} = \phi$ we have associated an operation $\varrho_v : F_v \times \Omega Y \to F_v$. We prove that, in a certain sense, ϱ_v depends only on ϕ. To simplify notation we write F_i for F_{v_i}, etc., $i = 0,1$, and prove

Theorem 3.13. *If* $v_0 \simeq v_1 : X \to Y$ *there is an equivalence* $\omega : F_0 \cong F_1$ *in* $\mathfrak{D}$ *such that*

$$\omega \circ \varrho_0 = \varrho_1 \circ (\omega \times 1) : F_0 \times \Omega Y \to F_1 .$$

Proof. Let $v : X \to Y^I$ be a homotopy between v_0 and v_1 and factorize v as $X \xrightarrow{u} E_v \xrightarrow{p} Y^I$, v_i as $X \xrightarrow{u_i} E_i \xrightarrow{p_i} Y$, $i = 0,1$. Define $m_i : E_v \to E_i$, $n_i : Y^I \to Y$ by $m_i(x, l) = (x, l_i)$, $n_i(w) = w(i)$, where $x \in X$, $l \in Y^{I^2}$, $w \in Y^I$, and[10] $l_i(t) = l(t, i)$, $i = 0,1$. We then have the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} E_v & \xrightarrow{m_i} & E_i \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_i} \\ Y^I & \xrightarrow{n_i} & Y . \end{array}$$

We will prove that $(m_i, n_i) : p \simeq p_i$. To fix ideas we take $i = 0$. Let[11] $s_\tau : I \times I, 1 \times I \to I \times I, 1 \times I$ be a deformation retraction from $(1, 2)$ in the Cartesian plane onto $I \vee I = I \times 0 \cup 0 \times I$, let s_1 determine $s' : I \times I, 1 \times I \to I \vee I, (1, 0)$, let $\Delta' : I \vee I, (1, 0) \to I, 1$ be the folding map and let $s = \Delta' s' : I \times I, 1 \times I \to I, 1$. Define $d : E_0 \to E_v$ by

$$d(x, l) = (x, l'), \text{ where } l'(t, u) = v(x, s(t, u)) \text{ if } s_1(t, u) \in 0 \times I$$
$$= ls(t, u) \text{ if } s_1(t, u) \in I \times 0 ,$$

and define $e : Y \to Y^I$ by $e(y)(t) = y$. It is readily verified that (d, e) is a map of p_0 into p which we prove to be a homotopy inverse of (m_0, n_0).

[10]) For notational convenience we may write $l(t, u)$ for $l(t)(u)$, $v(x, t)$ for $v(x)(t)$, etc.
[11]) This argument dualizes that given by STEENROD in [6] for the mapping cylinder.

First $m_0 d(x, l) = (x, l_0')$ where $l_0'(t) = l'(t, 0) = l(t)$. Thus $m_0 d = 1$; since obviously $n_0 e = 1$ we have $(m_0, n_0)(d, e) = 1$.

Consider the homotopies $r_\tau : E_v \to E_v$, $r_\tau' : Y^I \to Y^I$ given by

$$r_\tau(x, l) = (x, l s_\tau)$$

$$r_\tau'(w) = w s_\tau^1 ,$$

$$\text{where } (1, s_\tau^1(u)) = s_\tau(1, u) .$$

Then $p r_\tau(x, l) = r_\tau' p(x, l)$ since $l s_\tau(1) = l(1)\, s_\tau^1$. Thus (r_τ, r_τ') is a homotopy of maps $p \to p$. Clearly $r_0 = 1$, $r_0' = 1$. Also $r_1'(w)\,(t) = w(0) = n_0(w) = e n_0(w)(t)$ so that $r_0' = e n_0$. We show that $r_1 = d m_0$. For

$$d m_0(x, l) = (x, l_0') \text{ where } l_0'(t, u) = v(x, s(t, u)) \text{ if } s_1(t, u) \in 0 \times I$$
$$= l(s(t, u), 0) \text{ if } s_1(t, u) \in I \times 0 .$$

Thus if $s_1(t, u) \in I \times 0$, $l_0'(t, u) = l s_1(t, u)$. But $v(x, s(t, u)) = l(0, s(t, u))$, so that if $s_1(t, u) \in 0 \times I$, $l_0'(t, u) = l s_1(t, u)$. Thus $l_0' = l s_1$ and $d m_0 = r_1$. We have thus proved that $(d, e)(m_0, n_0) \simeq 1$.

Finally consider the diagram

$$\begin{tikzcd}
E_0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "p_0"] & E_v \arrow[r, "m_1"] \arrow[d, "p"] & E_1 \arrow[d, "p_1"] \\
Y \arrow[r, "e"'] & Y^I \arrow[r, "n_1"'] & Y .
\end{tikzcd}$$

Then (d, e) is a homotopy equivalence and, just as above, (m_1, n_1) is a homotopy equivalence; it follows that $(m_1 d, n_1 e)$ is a homotopy equivalence; but $n_1 e = 1$ so that

$$(m_1 d, 1) : p_0 \simeq p_1 .$$

Let $m_1 d$ induce $h : F_0 \to F_1$. Then h is a homotopy equivalence; if ω is its class ω is an equivalence in $\mathfrak{D}$ and the theorem follows by applying 3.8.

All the results stated for operators derived from fibrations dualize to *cooperators* derived from *cofibrations*. We will state the basic construction and the main results. Since, for the rest of this section, we are concerned exclusively with cooperators we permit ourselves to omit the primes from the symbols, though not from the enumeration of results.

Let $i : Y \to X$ be a cofibre map in $\mathfrak{T}$, let F be the cofibre X/iY, and let $q : X \to F$ be the projection. We write this as a short exact sequence

$$Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{q} F \to * .$$

Then we will derive a cooperation of ΣY, the suspension of Y, on F in $\mathfrak{D}$. Let[12]) $f_0 : X \to F * \Sigma Y$, $g_t : Y \to F * \Sigma Y$ be given by $f_0(x) = (q(x), *)$, $g_t(y) = (*, (y, t))$. Then $f_0 i = g_0 (= 0)$, so that we may extend g_t to $f_t : X \to F * \Sigma Y$. Then $f_1 i = g_1 = 0$ so that f_1 determines a map $f : F \to F * \Sigma Y$. Let ϱ be the homotopy class of f.

[12]) Recall that we are writing $A * B$ in place of the more familiar $A \vee B$.

Theorem 3.1'. *The map $\varrho : F \to F * \Sigma Y$ in $\mathfrak{D}$ depends only on the map $i : Y \to X$ in $\mathfrak{T}$ and ΣY cooperates on F through ϱ.*

Theorem 3.4'. *Given any space B the group $\Pi(\Sigma Y; B)$ operates on the set $\Pi(F, B)$ through ϱ^* given by $\varrho^*(\xi, \beta) = (\xi, \beta)^F \circ \varrho$, $\xi \in \Pi(F, B)$, $\beta \in \Pi(\Sigma Y, B)$. Moreover if $\psi : B \to C$ in $\mathfrak{D}$ then*

(3.5') $$\varrho^*(\psi_* \times \psi_*) = \psi_* \varrho^* : \Pi(F, B) \times \Pi(\Sigma Y, B) \to \Pi(F, C) .$$

We will allow ourselves to write ξ^β for $\varrho^*(\xi, \beta)$. Then (3.5') takes the form

(3.6') $$\psi_*(\xi^\beta) = (\psi_* \xi)^{\psi_* \beta} .$$

Consider the commutative diagram in $\mathfrak{T}$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "w"] & X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "v"] & F \arrow[r] \arrow[d, "u"] & * \\ Y' \arrow[r, "i'"'] & X' \arrow[r, "q'"'] & F' \arrow[r] & * \end{tikzcd}$$

which represents a map of the cofibration i into the cofibration i'. We have cooperations $\varrho : F \to F * \Sigma Y$, $\varrho' : F' \to F' * \Sigma Y'$, and we prove

Theorem 3.8'. *The diagram*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\varrho"] \arrow[d, "(u)"'] & F * \Sigma Y \arrow[d, "(u) * \Sigma(w)"] \\ F' \arrow[r, "\varrho'"'] & F' * \Sigma Y' \end{tikzcd}$$

is commutative.

Thence

(3.9') $$u^*(\xi^\beta) = (u^* \xi)^{(\Sigma w)^* \beta}, \ \xi \in \Pi(F', B), \ \beta \in \Pi(\Omega Y', B) .$$

Now let $v : Y \to X$ be an arbitrary map in $\mathfrak{T}$. By applying the mapping cylinder functor we factorize v as $Y \xrightarrow{i} M^v \xrightarrow{u} X$ where u is a homotopy equivalence and i is a cofibre map. The cofibre of i is the space[13] $F^v = X \cup_v CY$ obtained from X by attaching the cone CY by means of the map v. There is then a cooperation

$$\varrho^v : F^v \to F^v * \Sigma Y .$$

Proposition 3.10'. *The cooperation ϱ^v is induced by the map $f^v : F^v \to F^v * \Sigma Y$ given by*

$$\begin{aligned} f^v(x) &= (x, *) , && x \in Y, \\ f^v(y, t) &= ((y, 2t), *), && y \in Y, \quad 0 \leqq t \leqq \tfrac{1}{2} , \\ &= (*, (y, 2t - 1)) , && y \in y, \quad \tfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1 . \end{aligned}$$

Notice that, in agreement with the duality, we have regarded F^v as obtained by identifying $(y, 0)$ with $v(y)$ and $(y, 1)$ with $*$. We insert here the remark that the operation of $\Pi(\Sigma Y, B)$ on $\Pi(F^v, B)$ induced by ϱ^v is essentially the operation described by PUPPE in [4]; there is a small difference due to our convention for parametrizing CY in F^v.

[13]) Denoted C_v by PUPPE in [4].

Theorem 3.11′. *Let $i: Y \to X$ be a cofibre map with cofibre F. Then there exists a canonical equivalence $\omega: F^i \cong F$ in $\mathfrak{D}$ such that*

$$\varrho \circ \omega = (\omega * 1) \circ \varrho^i : F^i \to F * \Sigma Y .$$

Theorem 3.13′. *If $v_0 \simeq v_1 : Y \to X$ there is an equivalence $\omega: F^0 \cong F^1$ in $\mathfrak{D}$ such that*

$$\varrho^1 \circ \omega = (\omega * 1) \circ \varrho^0 : F^0 \to F^1 * \Sigma Y .$$

4. Exact sequences

In this section we show how the operators and cooperators described in the previous section may be built into the exact homotopy sequences associated with a fibration or cofibration. In order to exhibit the relation of our approach to that of Puppe in [4] we will discuss the cofibration situation explicitly.

Let $Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{q} F \to *$ be a cofibration sequence and let $B \in \mathfrak{T}$. There is then an exact sequence $S^*(i)$ (see [2])

$$(4.1') \qquad \cdots \to \Pi_n(F, B) \xrightarrow{q^*} \Pi_n(X, B) \xrightarrow{i^*} \Pi_n(Y, B) \xrightarrow{\partial} \Pi_{n-1}(F, B) \xrightarrow{q^*}$$
$$\cdots \xrightarrow{i^*} \Pi_1(Y, B) \xrightarrow{\partial} \Pi(F, B) \xrightarrow{q^*} \Pi(X, B) \xrightarrow{i^*} \Pi(Y, B) .$$

We will be especially interested in the right hand end of the sequence where exactness survives even though the sets no longer possess group structure. Our main theorem is

Theorem 4.2′. (i) *If $\beta_1, \beta_2 \in \Pi_1(Y, B)$, then $\beta_1 - \beta_2 \in i^*\Pi_1(X, B)$ if and only if $\partial \beta_1 = \partial \beta_2$;*

(ii) *If $\xi_1, \xi_2 \in \Pi(F, B)$, then $\xi_1 = \xi_2^\beta$* for some $\beta \in \Pi_1(Y, B)$ *if and only if $q^* \xi_1 = q^* \xi_2$.*

Notice that we here identify $\Pi_1(Y, B)$ with $\Pi(\Sigma Y, B)$. This theorem will be proved by relating our general situation to that studied by Puppe and using Puppe's results. Dualizing the proof of 3.11 we have a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} Y & \longrightarrow & M^i & \longrightarrow & F^i \\ \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ Y & \xrightarrow[i]{} & X & \xrightarrow[q]{} & F \end{array}$$

where h induces the equivalence ω of 3.11′. Define $\bar{i}: X \to F^i$ to be the inclusion; then $\bar{i}$ is a cofibre map and $h\bar{i} = q$. Let $\bar{q}: F^i \to \Sigma Y$ project F^i onto the cofibre of $\bar{i}$ and consider the diagram

$$(4.3') \qquad \begin{array}{ccccc} \Pi_1(Y, B) & \xrightarrow{\partial} & \Pi(F, B) & \xrightarrow{q^*} & \Pi(X, B) \\ \downarrow{\scriptstyle 1} & \mathrm{(I)} & \downarrow{\scriptstyle h^*} & \mathrm{(II)} & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ \Pi(\Sigma Y, B) & \xrightarrow[\bar{q}^*]{} & \Pi(F^i, B) & \xrightarrow[\bar{i}^*]{} & \Pi(X, B) . \end{array}$$

Lemma 4.4′. *The diagram (4.3′) commutes.*

Proof. The commutativity of ② is trivial so we may concentrate on ①. We recall the definition of ∂, namely $\partial = \varepsilon^{-1}J$

$$\Pi_1(Y, B) \xrightarrow{J} \Pi_1(i, B) \xleftarrow{\varepsilon} \Pi(F, B);$$

moreover J is induced by the map $(1, 0)$:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d, "i"] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & * \end{tikzcd}$$

and ε is induced by $(0, q)$:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d, "i"] & * \arrow[d] \\ X \arrow[r, "q"] & F\,. \end{tikzcd}$$

We represent an element $\beta \in \Pi_1(Y, B)$ by a map

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d] & EB \arrow[d, "p_B"] \\ * \arrow[r] & B\,, \end{tikzcd}$$

and we identify g, in the obvious way, with a map $\bar{g}: \Sigma Y \to B$. Then $J\beta$ is represented by

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"] & EB \arrow[d, "p_B"] \\ X \arrow[r, "0"'] & B \end{tikzcd}$$

and $(g, 0) \simeq (0, g'): i \to p_B$. Then g' determines $g'': F \to B$ where $g''q = g'$ and g'' represents $\partial\beta$. Now $h: F^i \to F$ is given by $h(x) = q(x)$, $h(y, t) = *$. Thus $h^*\partial\beta$ is represented by $\tilde{g}: F^i \to B$ where $\tilde{g}(x) = g'(x)$, $\tilde{g}(y, t) = *$.

Now any map $(r, s): i \to p_B$ may be identified with a map $v: F^i \to B$ by setting $v(x) = s(x)$, $v(y, t) = r(y)(t)$. Then the map $(g, 0)$ is identified with $\bar{g}\tilde{q}$, and $(0, g')$ is identified with $\tilde{g}$. Thus $\bar{g}\tilde{q} \simeq \tilde{g}: F^i \to B$; but $\bar{g}\tilde{q}$ represents $\tilde{q}^*\beta$ so that $\tilde{g}$ represents $\tilde{q}^*\beta$ and the commutativity of ① is proved.

Lemma 4.5′. *If $\beta \in \Pi_1(Y, B)$, $\xi \in \Pi(F, B)$, then $h^*(\xi^\beta) = (h^*\xi)^\beta$.*

This is just a convenient restatement of Theorem 3.11′.

Proposition 4.6′ (Puppe). (i) *If $\beta_1, \beta_2 \in \Pi(\Sigma Y, B)$, then*

$$(\tilde{q}^*\beta_1)^{\beta_2} = \tilde{q}^*(\beta_1 + \beta_2);$$

(ii) *If $\xi_1, \xi_2 \in \Pi(F^i, B)$, then $\xi_1 = \xi_2^\beta$ for some $\beta \in \Pi(\Sigma Y, B)$ if and only if $\tilde{i}^*\xi_1 = \tilde{i}^*\xi_2$.*

We give the proof for completeness in view of the difference of convention from [4]. Note that if $\beta \in \Pi(\Sigma Y, B)$, $\xi \in \Pi(F^i, B)$ are represented by $f: \Sigma Y \to B$,

$g: F^i \to B$, then ξ^β is represented by the map g' where

$$\begin{aligned} g'(x) &= g(x)\,, \\ g'(y,t) &= g(y,2t)\,, & 0 \leq t \leq \tfrac{1}{2} \\ &= f(y,2t-1)\,, & \tfrac{1}{2} \leq t \leq 1\,. \end{aligned}$$

Proof of (i): Both $(\tilde{q}^* \beta_1)^{\beta_2}$ and $\tilde{q}^*(\beta_1 + \beta_2)$ are represented by the map c, given by

$$\begin{aligned} c(x) &= * \\ c(y,t) &= f_1(y,2t)\,, & 0 \leq t \leq \tfrac{1}{2} \\ &= f_2(y,2t-1)\,, & \tfrac{1}{2} \leq t \leq 1\,. \end{aligned}$$

Proof of (ii): Both $\bar{i}\xi_2$ and $\bar{i}\xi_2^\beta$ are represented by the map c, given by

$$c(x) = g_2(x)\,.$$

Conversely, suppose $\bar{i}\xi_1 = \bar{i}\xi_2$, so that $g_1 \mid X \simeq g_2 \mid X$. Since $\bar{i}$ is a cofibration, $g_1 \simeq g$ with $g \mid X \simeq g_2 \mid X$ so we may assume $g_1 \mid X = g_2 \mid X$. Define $f: \Sigma Y \to$ $\to B$ by

$$\begin{aligned} f(y,t) &= g_2(y,1-2t)\,, & 0 \leq t \leq \tfrac{1}{2} \\ &= g_1(y,2t-1)\,, & \tfrac{1}{2} \leq t \leq 1\,. \end{aligned}$$

It is clear that $g_2^f \simeq g_1$ so that $\xi_1 = \xi_2^\beta$ for some $\beta \in \Pi(\Sigma Y, B)$.

This proves the proposition; we remark that no use has been made in the proof of the fact that the map i is a cofibration.

After these preliminaries the proof of Theorem 4.2′ is immediate. For we simply use Lemmas 4.4′ and 4.5′ to transfer 4.6′ to the original cofibration sequence. It is only necessary to remark that 4.6′ (i) has as a consequence that $\tilde{q}^* \beta_1 = \tilde{q}^* \beta_2$ if and only if $\tilde{q}^*(\beta_1 - \beta_2) = 0$.

Let us attach CX to F by means of q to obtain $F^q = F \cup_q CX$. There is then a map $k: \Sigma Y \to F \cup_q CX$ given by $k(y,t) = (iy, t)$. We prove

Proposition 4.7′. *k is a homotopy equivalence.*

Proof. We recall that our convention for F^q is that $(x, 0)$ is identified with qx and $(x, 1)$ is identified with $*$. Let $u: X \to CX$ embed X in CX by $u(x) = (x, 0)$. Then $ui: Y \to CX$ is a cofibration whose cofibre is precisely F^q. Let $\underline{CY}$ be the cone on Y parametrized by (y,t), $0 \geq t \geq -1$. Let $h: CX \cup \underline{CY} \to F^q$ be given by $h(x,t) = (x,t)$, $h(y,t) = *$. Then (dual of 3.12) h is a homotopy equivalence. Consider

$$\Sigma Y \xrightarrow{s} CY \cup \underline{CY} \xrightarrow{Ci \cup 1} CX \cup \underline{CY} \xrightarrow{h} F^q\,,$$

where $s(y,t) = (y, 2t-1)$. It is easy to see that the composite of these maps is homotopic to k. Thus it only remains to show that $Ci \cup 1$ is a homotopy equivalence. This follows immediately since $(CY \cup CY)/CY = (CX \cup \underline{CY})/CX$ and the maps $CY \to CY \cup \underline{CY}$, $CX \to CX \cup \underline{CY}$ are cofibrations.

We remark that, by a similar analysis, we may show that, if j embeds F in F^q then the diagram

$$\begin{tikzcd} F^i \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\tilde{q}"'] & F \arrow[d, "j"] \\ \Sigma Y \arrow[r, "k"] & F^q \end{tikzcd}$$

anticommutes up to homotopy, in the sense that $(-k) \circ \tilde{q} \simeq j \circ h$. We may thus use the maps h and k to identify (up to sign) the exact sequences derived from the cofibrations $\tilde{i}$ and j.

We complete our study of (4.1′) by the following observation. Let η: $F * \Sigma Y \to \Sigma Y$ be the projection $\eta_{\Sigma Y}$ from free product to factor of § 2. Then $\sigma = \eta \varrho : F \to \Sigma Y$ is a map in $\mathfrak{D}$ inducing $\sigma^* : \Pi(\Sigma Y, B) \to \Pi(F, B)$.

Theorem 4.8′. $\sigma^* = \partial : \Pi_1(Y, B) \to \Pi(F, B)$.

Proof. Let $u : F * \Sigma Y \to \Sigma Y$ be the projection in $\mathfrak{T}$ and let $u^i : F^i * \Sigma Y \to \Sigma Y$ be defined similarly. If f^i is the map of 3.10′ inducing ϱ^i, then

$$\begin{aligned} u^i f^i(x) &= * \\ u^i f^i(y, t) &= * , & 0 \leqq t \leqq \tfrac{1}{2} , \\ &= (y, 2t - 1) , & \tfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1 . \end{aligned}$$

On the other hand $\tilde{q} : F^i \to \Sigma Y$ is given by

$$\begin{aligned} \tilde{q}(x) &= * \\ \tilde{q}(y, t) &= (y, t) . \end{aligned}$$

Thus $\tilde{q} \simeq u^i f^i$. But $u(h * 1) = u^i$ and (3.11′) $fh \simeq (h * 1) f^i$, where f induces ϱ. Thus

$$\tilde{q} \simeq u^i f^i = u(h * 1) f^i \simeq u f h .$$

Passing to homotopy classes, $\{\tilde{q}\} = \sigma \omega$ (see 3.11′). Now $h^* = \omega^*$ and we have proved (4.4′) that $h^* \partial = \tilde{q}^*$. Thus $h^* \partial = h^* \sigma^*$. Since h^* is an equivalence, the theorem follows.

This theorem enables us to prove that *if B admits a multiplication* then ∂ is a homomorphism and

(4.9′) $$\xi^\beta = \xi + \partial \beta, \ \xi \in \Pi(F, B), \ \beta \in \Pi_1(Y, B) ,$$

where addition in $\Pi(F, B)$ is induced by the product in B. For σ^* is certainly a homomorphism if $\Pi_1(Y, B)$ is given the addition induced by the product in B. But, by the fundamental theorem 2.6 (slightly generalized), this addition coincides with that induced by the suspension structure in ΣY. To establish (4.9′) consider the diagram

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "f"] & F * \Sigma Y \arrow[r, "w"] \arrow[d, "g * 1"] & F \times \Sigma Y \arrow[d, "g \times 1"] \\ & B * B \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\Delta'"] & B \times B \arrow[dl, "m"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

where w is the natural map from free product to direct product, $g \in \xi$, $l \in \beta$, m is the product map, and Δ' is the folding map. Then $mw \simeq \Delta'$ and

$$\xi^\beta = \{\Delta' \circ (g * l) \circ f\} = \{m \circ w \circ (g * l) \circ f\} = \{m \circ (g \times l) \circ w \circ f\}$$
$$= \{g \circ u^F \circ f\} + \{l \circ u^{\Sigma Y} \circ f\},$$

where u^F, $u^{\Sigma Y}$ project $F * \Sigma Y$ onto F, ΣY respectively. But $u^F \circ f \simeq 1$ and $u^{\Sigma Y} \circ f \in \eta\varrho = \sigma$. Thus

$$\xi^\beta = \xi + \sigma^* \beta = \xi + \partial \beta .$$

We briefly record the dual story, leaving all the details to the reader. Let

$$* \to F \xrightarrow{j} X \xrightarrow{p} Y$$

be a fibration sequence and let $B \in \mathfrak{S}$. There is then an exact sequence $S_*(p)$

$$(4.1) \qquad \cdots \to \Pi_n(B,F) \xrightarrow{j_*} \Pi_n(B,X) \xrightarrow{p_*} \Pi_n(B,Y) \xrightarrow{\partial} \Pi_{n-1}(B,F) \xrightarrow{j_*} \cdots$$
$$\xrightarrow{p_*} \Pi_1(B,Y) \xrightarrow{\partial} \Pi(B,F) \xrightarrow{j_*} \Pi(B,X) \xrightarrow{p_*} \Pi(B,Y) .$$

Theorem 4.2. (i) *If* $\beta_1, \beta_2 \in \Pi_1(B,Y)$, *then* $\beta_1 - \beta_2 \in p_* \Pi_1(B,X)$ *if and only if* $\partial \beta_1 = \partial \beta_2$;

(ii) *If* $\xi_1, \xi_2 \in \Pi(B,F)$, *then* $\xi_1 = \xi_2^\beta$ *for some* $\beta \in \Pi_1(B,Y)$ *if and only if* $j_* \xi_1 = j_* \xi_2$.

Let p induce the fibration $\tilde{p}: F_p \to X$ with fibre ΩY. Then the proof is just the dual of that of Theorem 4.2′ in that we relate the sequence (4.1) to that of the fibration $\tilde{p}$ and invoke the facts corresponding to Theorem 4.2 for the latter sequence. Thus we require a proposition dual to Puppe's result 4.6′. We state it in general, that is, without referring to the irrelevant hypothesis that p is a fibre map. Thus, reverting to the notation of § 3, let the map $v: X \to Y$ induce the fibre sequence

$$* \to \Omega Y \xrightarrow{\tilde{j}} F_v \xrightarrow{\tilde{p}} X$$

and let ϱ_v be the operation of 3.10.

Proposition 4.6. (i) *If* $\beta_1, \beta_2 \in \Pi(B, \Omega Y)$ *then* $(\tilde{j}_* \beta_1)^{\beta_2} = \tilde{j}_*(\beta_1 + \beta_2)$;

(ii) *If* $\xi_1, \xi_2 \in \Pi(B, F_v)$ *then* $\xi_1 = \xi_2^\beta$ *for some* $\beta \in \Pi(B, \Omega Y)$ *if and only if* $\tilde{p}_* \beta_1 = \tilde{p}_* \beta_2$.

In dualizing the proof of 4.6′ it is only necessary to recall that if $\beta \in \Pi(B, \Omega Y)$, $\xi \in \Pi(B, F_v)$ are represented by $f: B \to \Omega Y$, $g: B \to F_v$, then ξ^β is represented by the map g', where

$$g'(b) = (x, l + f(b)) \text{ if } g(b) = (x, l) .$$

Reverting to our original fibration, let $j: F \to X$ induce the fibre space F_j over F. There is then a map $k: F_j \to \Omega Y$ given by $k(u) = pu$ (note that a point, u, of F_j is just a path in X beginning in F and ending at $*$).

Proposition 4.7. *k is a homotopy equivalence.*

Let $\nu:\Omega Y \to F\times\Omega Y$ be the injection of § 2. Then $\sigma = \varrho\nu:\Omega Y \to F$ is a map in $\mathfrak{D}$ and

Theorem 4.8. $\sigma_* = \partial:\Pi_1(B, Y) \to \Pi(B, F)$.

Then our final remark is that if B admits a comultiplication ∂ is a homomorphism and

$$\xi^\beta = \xi + \partial\beta,\ \xi\in\Pi(B,F)\,,\ \beta\in\Pi_1(B, Y)\,. \tag{4.9}$$

5. Contracting fibres in fibre spaces

Let us consider a fibration sequence

$$* \to F \xrightarrow{j} X \xrightarrow{p} Y$$

in which $j \simeq 0$. We will show that there exists a homotopy equivalence $\Omega X\times F \simeq \Omega Y$.

Let $j_t:F\to X$ be a homotopy with $j_0 = 0$, $j_1 = j$, and define $d:F\to\Omega Y$ by

$$d(a)\,(t) = pj_t(a)\,,\ a\in F\,. \tag{5.1}$$

Let $m:\Omega Y\times\Omega Y \to \Omega Y$ be the usual loop-composition.

Theorem 5.2. $m\circ(\Omega p\times d):\Omega X\times F \to \Omega Y$ *is a homotopy equivalence.*

Proof. Let $s = fu:\Omega Y\to F$ where $u:\Omega Y\to F\times\Omega Y$ is the injection and $f:F\times\Omega Y\to F$ induces the operation ϱ. Then s is in the class σ and we prove

$$sd \simeq 1:F\to F \tag{5.3}$$

by an application of Corollary 3.3. For we define $v_t:F\to X$ by

$$v_t(a) = f_t(*, d(a))\,,$$

where f_t is the homotopy of § 3 giving rise to f[14]. Then $v_0(a) = f_0(*, d(a)) = * = j_0(a)$ and

$$pv_t(a) = g_t(*, d(a)) = d(a)\,(t) = pj_t(a)\,.$$

Now j_1 induces $1:F\to F$ and v_1 induces the map $a\to f(*, d(a))$ which is just the map sd. This proves (5.3) — and incidentally establishes without further work that F admits a multiplication since it is dominated by ΩY.

Consider the exact sequence

$$\cdots \to \Pi(B,\Omega X) \xrightarrow{(\Omega p)_*} \Pi(B,\Omega Y) \xrightarrow{s_*} \Pi(B,F) \xrightarrow{j_*} \Pi(B,X) \xrightarrow{p_*} \Pi(B,Y)\,, \tag{5.4}$$

where we have written s_* for ∂ as Theorem 4.8 permits; we regard B as a variable object in $\mathfrak{G}$ which is at our disposal. First take $B = \Omega Y$ and observe that, by (5.3), $s_*(1) = s_*\{ds\}$. Then Theorem 4.2 (i) enables us to infer the existence of a map $g:\Omega Y\to\Omega X$ such that

$$1 = \{\Omega p\circ g\} + \{d\circ s\}\,. \tag{5.5}$$

[14]) See 3.3.

We will show that $(g, s)^D$ is a homotopy inverse of $m \circ (\Omega p \times d)$. First

$$\{m \circ (\Omega p \times d) \circ (g, s)^D\} = \{m \circ (\Omega p \circ g, d \circ s)^D\}$$
$$= \{\Omega p \circ g\} + \{d \circ s\} = 1 ,$$

so it remains to show that

(5.6) $$(g, s)^D \circ m \circ (\Omega p \times d) \simeq 1 : \Omega X \times F \to \Omega X \times F .$$

Let q, q' project $\Omega X \times F$ onto $\Omega X, F$ respectively. Then $q \circ (g, s)^D = g$, $q' \circ (g, s)^D = s$ and (5.6) is equivalent to the two assertions

(5.7) $$g \circ m \circ (\Omega p \times d) \simeq q : \Omega X \times F \to \Omega X ,$$

(5.8) $$s \circ m \circ (\Omega p \circ d) \simeq q' : \Omega X \times F \to F .$$

Now $m \circ (\Omega p \times d) = m \circ (\Omega p \circ q, d \circ q')^D$, so that $\{m \circ (\Omega p \times d)\} = \{\Omega p \circ q\} + \{d \circ q'\}$. Since $\{m \circ (\Omega p \times d)\} - \{d \circ q'\} \in (\Omega p)_* \Pi(\Omega X \times F, \Omega Y)$, it follows from Theorem 4.2 (i) with $B = \Omega X \times F$ that $s_*\{m \circ (\Omega p \times d)\} = s_*\{d \circ q'\}$. But $s_*\{m \circ (\Omega p \times d)\} = \{s \circ m \circ (\Omega p \times d)\}$, and $s_*\{d \circ q'\} = \{s \circ d \circ q'\} = \{q'\}$, by (5.3). This establishes (5.8).

Now it follows from (5.5) that

$$\{m \circ (\Omega p \times d)\} = \{\Omega p \circ g \circ m \circ (\Omega p \times d)\} + \{d \circ s \circ m \circ (\Omega p \times d)\}$$
$$= \{\Omega p \circ g \circ m \circ (\Omega p \times d)\} + \{d \circ q'\} , \text{ by (5.8).}$$

But $\{m \circ (\Omega p \times d)\} = \{\Omega p \circ q\} + \{d \circ q'\}$. Thus

(5.9) $$\{\Omega p \circ q\} = \{\Omega p \circ g \circ m \circ (\Omega p \times d)\} .$$

Now from (5.3) it follows that $s_* : \Pi_1(B, \Omega Y) \to \Pi_1(B, F)$ is onto for all B. Thus we may deduce from the exactness of the sequence (5.4) that $(\Omega p)_* : \Pi(B, \Omega X) \to \Pi(B, \Omega Y)$ is a monomorphism. Thus (5.9) implies (5.7) and the theorem is proved.

We prove two auxiliary results under the same hypotheses on the fibration p.

Proposition 5.10. *If* $\xi \in \Pi(B, F)$, $\beta \in \Pi_1(B, Y)$ *then*

$$\xi^\beta = \partial(d_* \xi + \beta) .$$

Proof. Let $\mu : \Omega B \times \Omega B \to \Omega B$ be the multiplication map in $\mathfrak{D}$, so that μ is the class of m. Then

$$\sigma\mu = \varrho \eta \mu = \varrho(1 \times \mu)(\eta \times 1) = \varrho(\varrho \times 1)(\eta \times 1) ,$$
$$= \varrho(\sigma \times 1) ,$$

by property (ii) of an operator.

Thus it follows from (5.3) that $\varrho = \sigma \mu(\{d\} \times 1)$.

Then $\xi^\beta = \varrho \circ (\xi, \beta)^D = \sigma \circ \mu \circ (\{d\} \times 1) \circ (\xi, \beta)^D = \sigma \circ \mu \circ (\{d\} \circ \xi, \beta)^D$.

But σ is the class of s and $\{d\} \circ \xi = d_* \xi$, so that

$$\xi^\beta = s_*(d_* \xi + \beta) = \partial(d_* \xi + \beta) , \text{ by 4.8.}$$

Now let $k : F_j \to \Omega Y$ be the homotopy equivalence of 4.7 (we might have preferred to write $E(X; F, *)$ for F_j) and let

$$* \to \Omega X \xrightarrow{i'} F_j \xrightarrow{p'} F$$

stand for the evident fibration (induced by $j : F \to X$).

Proposition 5.11. *The map* $v = (g, s)^D \circ k : F_j \to \Omega X \times F$ *is a homotopy equivalence such that in the diagram*

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r] & \Omega X \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "1"] \arrow[dr, phantom, "①"] & F_j \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, phantom, "②"] & F \arrow[d, "1"] \\ * \arrow[r] & \Omega X \arrow[r, "i''"'] & \Omega X \times F \arrow[r, "p''"'] & F \end{tikzcd}$$

① *is homotopy commutative and* ② *is homotopy anti-commutative in the sense that* $p'' \circ (g, s)^D \circ (-k) \simeq p'$.

Only the commutativity assertions needs proof[15]). We prefer to restate them in the following equivalent but more convenient form. Let us replace $F_j = E(X; F, *)$ by the space $E(X; *, F)$ of paths on X beginning at $*$ and ending in F. Then k, defined just as in 4.7, is a homotopy equivalence from $E(X; *, F)$ to ΩB and we economize on notation by designating the maps in the diagram

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r] & \Omega X \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "1"] \arrow[dr, phantom, "①"] & E(X; *, F) \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, phantom, "②"] & F \arrow[d, "1"] \\ * \arrow[r] & \Omega X \arrow[r, "i''"'] & \Omega X \times F \arrow[r, "p''"'] & F \end{tikzcd} \tag{5.12}$$

by the same symbols as those in the statement of 5.11 and we prove (5.12) commutative up to homotopy. Now from (5.3), (5.5) and the evident relation $s \circ \Omega p \simeq 0$, together with the fact that $(\Omega p)_*$ is a monomorphism we readily deduce that

$$g \circ \Omega p \simeq 1\,, \quad g \circ d \simeq 0\,. \tag{5.13}$$

Now $v \circ i'$ is just $(g \circ \Omega p, s \circ \Omega p)^D$ so that the homotopy-commutativity of ① follows immediately. To prove the homotopy-commutativity of ② we consider the two homotopies $u_t, v_t : E(X; *, F) \to X$ given by $u_t(l) = l(t)$, $v_t(l) = f_t(*, pl)$ and invoke 3.3 to deduce that $p' \simeq sp : E(X; *, F) \to F$; but $sp = p''v$.

Again we briefly record the dual story. We have a cofibration sequence

$$Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{q} F \to *$$

and we suppose $q \simeq 0$. If $q_t : X \to F$ is such that $q_0 = 0$, $q_1 = q$, we define $d : \Sigma Y \to F$ by

$$d(y, t) = q_t i(y)\,. \tag{5.1'}$$

Let $m : \Sigma Y \to \Sigma Y * \Sigma Y$ be the usual suspension comultiplication.

Theorem 5.2'. $(\Sigma i * d) \circ m : \Sigma Y \to \Sigma X * F$ *is a homotopy equivalence.*

Under the same hypotheses we may prove

Proposition 5.10'. *If* $\xi \in \Pi(F, B)$, $\beta \in \Pi_1(Y, B)$ *then*

$$\xi^\beta = \partial(d^* \xi + \beta)\,.$$

[15]) A variant of the assertion about v could have been the starting point of another proof of 5.2.

In the course of proving Theorem 5.2′ we would show that there is a map $s:F \to \Sigma Y$ such that $s^* = \partial:\Pi_1(Y, B) \to \Pi(F, B)$ and $ds \simeq 1$. Moreover there is a map $g: \Sigma X \to \Sigma Y$ such that

$$1 = \{g \circ \Sigma i\} + \{s \circ d\}\,. \tag{5.5′}$$

Then $(g, s)^F: \Sigma X * F \to \Sigma Y$ is a homotopy inverse of $(\Sigma i * d) \circ m$ and if $k:\Sigma Y \to F^q$ is the homotopy equivalence of 4.7′, then the equivalence $v = k \circ (g, s)^F: \Sigma X * F \to F^q$ has the commutativity properties dual to those of Proposition 5.11. We also remark that it follows immediately from Theorem 5.2′ (or indeed from the relation $ds \simeq 1$) that F admits a comultiplication.

References

[1] Brown, E. H., jr.: Twisted tensor products, I. Ann. Math. **69**, 223 (1959).
[2] Eckmann, B., and P. J. Hilton: Groupes d'homotopie et dualité. C. R. Acad. Sci. (Paris) **246**, 2444, 2555, 2991 (1958).
[3] Fadell, E., and W. Hurewicz: On the structure of higher differental operators in spectral sequences. Ann. Math. **68**, 314 (1958).
[4] Puppe, D.: Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen. I. Math. Z. **69**, 299 (1958).
[5] Spanier, E., and J. H. C. Whitehead: On fibre spaces in which the fibre is contractible. Comm. Math. Helv. **29**, 1 (1955).
[6] Steenrod, N. E.: Cohomology invariants of mappings. Ann. Math. **50**, 954 (1949).

(Received January 8, 1960)

Nieto, J.
Math. Annalen 141, 22—42 (1960)

Eine Charakterisierung der elliptischen Differentialoperatoren

Von

José Nieto in Heidelberg*)

Einleitung

Wichtige Probleme der Theorie der Differentialgleichungen bestehen darin, bei einer linearen partiellen Differentialgleichung $P(x, D)\varphi = \psi$ aus gewissen Eigenschaften der rechten Seite ψ auf entsprechende Eigenschaften der Lösungen φ zu schließen und zu untersuchen, welchen Einfluß dabei der Charakter des Differentialoperators $P(x, D)$ hat. So ist seit Bernstein (1904) bekannt, daß bei einem elliptischen Operator $P(x, D)$ mit beliebig oft differenzierbaren Koeffizienten jede Lösung der homogenen Gleichung beliebig oft differenzierbar ist. Sie ist sogar analytisch, wenn die Koeffizienten von $P(x, D)$ analytisch sind.

Mit Hilfe der Theorie der Distributionen lassen sich viele Eigenschaften der Differentialgleichungen in einfacherer Weise als mit klassischen Methoden nachweisen. Es war also naheliegend, die Distributionstheorie und ihre Methoden auch heranzuziehen. Dabei erwiesen sich die Räume $\mathfrak{L}^s_\Omega$ (s eine nichtnegative ganze Zahl und Ω eine offene Menge aus R^N) als besonders wichtig. $\mathfrak{L}^s_\Omega$ ist der Raum der Distributionen φ, deren Ableitungen (im Sinne der Distributionstheorie) bis zur Ordnung s in Ω lokal quadratisch integrierbar sind. Diese Räume haben ihren Ursprung in der Arbeit von Gårding [4] über die Lösung des Dirichlet-Problems für elliptische Operatoren und in den Arbeiten von K. O. Friedrichs [3] und P. Lax [7] über die Differenzierbarkeit der Lösungen von elliptischen Differentialgleichungen. Malgrange [8] hat in seiner Thèse systematisch die Räume $\mathfrak{L}^s_\Omega$ benutzt. In seiner in Bogotá (Kolumbien) 1956 gehaltenen Vorlesung über „Partielle Differentialgleichungen vom elliptischen Typ“ [10] hat L. Schwartz die Räume $\mathfrak{L}^s_\Omega$ für reelles s verallgemeinert. In einer unlängst erschienenen Arbeit [9] hat Malgrange noch allgemeinere Räume eingeführt, von denen die Räume $\mathfrak{L}^s_\Omega$ Spezialfälle sind.

In den Paragraphen 1—3 wird die Theorie der Räume $\mathfrak{L}^s_\Omega$ entwickelt und das Verhalten der Differentialoperatoren in diesen Räumen studiert. Die Ergebnisse werden in Paragraph 4 auf die Theorie der elliptischen Operatoren angewendet. Es wird gezeigt, daß die Räume $\mathfrak{L}^s_\Omega$ eine Charakterisierung der

*) Diese Arbeit wurde als Dissertation von der Naturwiss.-Math. Fakultät der Universität Heidelberg angenommen.

elliptischen Operatoren mit beliebig oft differenzierbaren Koeffizienten gestatten. Mit Hilfe solcher Räume läßt sich nämlich der Begriff der Quasielliptizität definieren. Ein Operator $P(x, D)$ der Ordnung m heiße quasielliptisch, wenn für alle offenen Mengen Ω aus $P(x, D)\varphi \in \mathfrak{L}^s_\Omega$ die Beziehung $\varphi \in \mathfrak{L}^{s+m}_\Omega$ folgt, wobei s alle reellen Zahlen durchläuft. Unser Hauptsatz besagt nun, daß ein Differentialoperator genau dann elliptisch ist, wenn er quasielliptisch ist. Nicht bekannt war bisher, daß jeder quasielliptische Operator elliptisch ist. Es wird sogar gezeigt, daß jeder Operator $P(x; D)$ der Ordnung m, dessen Hauptteil $P_0(x, D)$ die Eigenschaft besitzt, daß aus $P_0(x, D)\varphi \in \mathfrak{L}^0_\Omega$ die Beziehung $\varphi \in \mathfrak{L}^m_\Omega$ folgt, elliptisch ist [Hauptsatz 1]. Daß jeder elliptische Operator quasielliptisch ist, wurde schon von L. SCHWARTZ bewiesen ([10], Satz 3.3). Wir geben hier einen einfacheren Beweis.

In Paragraph 5 wird der Begriff der Hypoelliptizität eingeführt: Ein Operator $P(x, D)$ heißt nach SCHWARTZ hypoelliptisch, wenn jede Distribution φ, für die $P(x, D)\varphi$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion in einer offenen Menge $\Omega \subset R^N$ ist, selbst eine beliebig oft differenzierbare Funktion in Ω ist. Die Hypoelliptizität eines Operators ähnelt der Bernsteinschen Eigenschaft der elliptischen Operatoren. Auf Grund unseres Hauptsatzes ist es klar, daß jeder elliptische Operator hypoelliptisch ist. Hieraus folgt unter anderem die in der Potentialtheorie wichtige Eigenschaft des Laplace-Operators, daß jede Funktion φ, die im Sinne der Distributionstheorie Lösung von $\Delta\varphi = 0$ ist, eine beliebig oft differenzierbare Funktion und damit Lösung im klassischen Sinne ist (Weilsches Lemma, [12]).

Ist ein Operator $P(x, D) = \sum \alpha_P(x) D^P$ mit variablen Koeffizienten hypoelliptisch, so braucht keineswegs der Operator $P(a, D) = \sum \alpha_P(a) D^P$ mit konstanten Koeffizienten hypoelliptisch zu sein. Wir geben ein Beispiel eines homogenen hypoelliptischen Operators an, der in keinem Punkt a hypoelliptisch ist. Das Ergebnis ([6], S. 239), daß jeder homogene hypoelliptische Operator mit konstanten elliptisch ist, läßt sich also nicht auf Operatoren mit variablen Koeffizienten übertragen.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. G. KÖTHE und Herrn Dr. H. G. TILLMANN für ihre wertvolle Hilfe bei der Durchführung dieser Arbeit recht herzlich danken. Mein Dank gilt auch Herrn Prof. L. SCHWARTZ, der in mir das Interesse für dieses Gebiet der Mathematik geweckt hat, und Herrn Prof. B. MALGRANGE für freundliche Hinweise.

§ 0. Schreibweise und formale Eigenschaften der Differentialoperatoren

Für Differentialoperatoren werden wir hier die Schreibweise von HÖRMANDER [6] und MALGRANGE [9] benutzen. Demgemäß bezeichnet D_j den Operator $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$. Es sei $P = (P_1, \ldots, P_N)$, wobei P_i $i = 1, \ldots, N$ nichtnegative ganze Zahlen sind und N die Dimension des Raumes R^N ist. Dann schreibt man:

$$D^P = (D_1)^{P_1} \cdots (D_N)^{P_N} \quad \xi^P = \xi_1^{P_1} \cdots \xi_N^{P_N} \quad |P| = P_1 + \cdots + P_N .$$

Es sei nun $P(\xi) = \sum\limits_{|P| \leq m} \alpha_P \xi^P$ ein Polynom vom Grad m, dessen Koeffizienten α_P komplexe Zahlen sind. Man ordnet diesem Polynom den Differentialoperator $P(D)$ der Ordnung m mit konstanten Koeffizienten α_P:

$$P(D) = \sum_{|P| \leq m} \alpha_P D^P$$

zu und stellt fest, daß diese Zuordnung eineindeutig ist. Dann läßt sich die Leibnizsche Formel auf folgende Weise:

$$P(D)(\psi\varphi) = \sum \frac{D^\beta \psi}{\beta!} P^\beta(D)\varphi \qquad (\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_N),\ \beta! = \beta_1! \ldots \beta_N!)$$

schreiben, wobei $P^\beta(\xi)$ das Polynom $\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)^{\beta_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \xi_N}\right)^{\beta_N} P(\xi)$ bezeichnet. Es sei nun $P(x, D)$ der Differentialoperator mit variablen Koeffizienten $\sum\limits_{|P| \leq m} \alpha_P(x) D^P$. Sind die Funktionen $\alpha_P(x)$ in einem Punkt $x = a$ erklärt, so bezeichnet $P(a, D)$ den Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $\sum\limits_{|P| \leq m} \alpha_P(a) D^P$. Die Leibnizsche Formel läßt sich auf Differentialoperatoren mit variablen Koeffizienten $P(x, D) = \sum\limits_{|P| \leq m} \alpha_P(x) D^P$ verallgemeinern, indem man die Schreibweise

$$P^\beta(x, D) = \sum_{|P| \leq m} \alpha_P(x)\,(D^P)^\beta$$

einführt.

Es sei nun, wie bei L. Schwartz [11], $\mathfrak{S}$ der Raum der beliebig oft differenzierbaren schnell abnehmenden Funktionen und $\mathfrak{S}'$ sein Dual, der Raum der temperierten Distributionen. Für $\varphi \in \mathfrak{S}$ bezeichnet

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} \varphi(x)\, dx \qquad \left(\langle x, \xi \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i\, \xi_i\right)$$

die Fouriertransformierte von φ. Sie liegt wieder in $\mathfrak{S}$. Ist φ eine temperierte Distribution, so wird ihre Fouriertransformierte $\hat{\varphi}$ durch die Formel

$$\langle \hat{\varphi}, \psi \rangle = \langle \varphi, \hat{\psi} \rangle \qquad (\psi \in \mathfrak{S})$$

erklärt, und man kann zeigen, daß $\hat{\varphi}$ in $\mathfrak{S}'$ liegt. Damit ist auch, wegen der Beziehung $L^2 \subset \mathfrak{S}'$, die Fouriertransformation für quadratisch summierbare Funktionen definiert. Es gilt der Satz von Plancherel-Parseval: Ist $\varphi \in L^2$, so ist $\hat{\varphi} \in L^2$ mit

$$\int |\varphi(x)|^2\, dx = \int |\hat{\varphi}(x)|^2\, dx\,.$$

Die Fouriertransformation besitzt ferner die wichtige Eigenschaft

$$\widehat{P(D)\varphi} = P(\xi)\,\hat{\varphi} \quad (\text{insbesondere } \widehat{D^P\varphi} = \xi^P \hat{\varphi}(\xi))\,.$$

Damit gilt für $P(D)\varphi \in L^2$:

$$\int |\widehat{P(D)\varphi}|^2\, dx = \int |P(\xi)\, \hat{\varphi}(\xi)|^2\, d\xi\,.$$

Wie üblich bedeutet $\mathfrak{D}$ den Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger; $\mathfrak{D}'$ seinen Dual, den Raum der Distributionen;

$\mathfrak{D}_\Omega$ (Ω eine offene Menge aus R^N) den Unterraum von $\mathfrak{D}$ der Funktionen φ mit Träger in Ω; $\mathfrak{E}$ den Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen; $\mathfrak{E}_\Omega$ den Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen in Ω, usw.

Es sei $\psi(x_1, \ldots, x_N)$ eine Funktion und $\tau_{h,j}$ der Operator

$$\tau_{h,j}\psi(x_1, \ldots, x_N) = \psi(x_1, \ldots, x_j + h, \ldots, x_N).$$

Ist $\varphi \in \mathfrak{D}'$ und $\psi(x_1, \ldots, x_N) \in \mathfrak{D}$, so bezeichnet $\tau_{h,j}\varphi$ die Distribution

$$\langle \tau_{h,j}\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \tau_{-h,j}\psi \rangle.$$

Für $\varphi \in \mathfrak{S}'$ gilt

$$\widehat{\tau_{h,j}\varphi} = e^{2\pi i h \xi_j}\hat{\varphi}.$$

Bei einem Differentialoperator $P(x, D) = \sum_P \alpha_P(x) D^P$ bezeichnet $\tau_{h,j}P(x, D)$ den Operator $\sum_P [\tau_{h,j}\alpha_P(x)]D^P$.

Mit ϱ wird der euklidische Abstand $\varrho = \sqrt{\sum_{i=1}^N \xi_i^2}$ und mit $*$ die Faltung bezeichnet.

§ 1. Der Raum $\mathfrak{H}^s$ (s eine beliebige reelle Zahl)

Mit $\mathfrak{H}^s$ bezeichnet man den Raum der Distributionen φ aus $\mathfrak{S}'$ mit $(1 + \varrho^2)^{s/2} \cdot \hat{\varphi}(\xi) \in L^2$. Versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle \varphi, \psi \rangle_s = \langle (1 + \varrho^2)^{s/2}\hat{\varphi}, (1 + \varrho^2)^{s/2}\hat{\psi} \rangle_{L^2} = \int (1 + \varrho^2)^s \hat{\varphi}(\xi)\,\overline{\hat{\psi}(\xi)}\, d\xi$$

ist $\mathfrak{H}^s$ ein Hilbertraum. $\mathfrak{H}^s$ ist in der Tat vollständig; denn ist φ_n eine Cauchyfolge in $\mathfrak{H}^s$, so konvergiert (Satz von Riesz-Fischer) in L^2 die Cauchyfolge $(1 + \varrho^2)^{s/2}\hat{\varphi}_n$ gegen ein Element ψ. Es sei nun $\hat{\varphi} = (1 + \varrho^2)^{-s/2}\psi$. Da $(1 + \varrho^2)^{-s/2}\psi \in \mathfrak{S}'$ gilt, ist φ ein Element aus $\mathfrak{H}^s$, und die Cauchyfolge φ_n konvergiert in $\mathfrak{H}^s$ gegen φ.

Bezüglich der Bilinearform

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int \hat{\varphi}(\xi)\,\overline{\hat{\psi}(\xi)}\, d\xi \quad (\varphi \in \mathfrak{H}^s, \psi \in \mathfrak{H}^{-s})$$

sind die Räume $\mathfrak{H}^s$ und $\mathfrak{H}^{-s}$ zueinander dual. Die Räume $\mathfrak{H}^s$ besitzen die folgenden Eigenschaften:

$$\mathfrak{D} \subset \mathfrak{S} \subset \mathfrak{H}^{s'} \subset \mathfrak{H}^s \subset \mathfrak{S}' \subset \mathfrak{D}' \quad (s' \geqq s),$$

wobei die Injektionen $\mathfrak{D} \to \mathfrak{S} \to \mathfrak{H}^{s'} \to \mathfrak{H}^s \to \mathfrak{S}' \to \mathfrak{D}'$ stetig sind. $\mathfrak{D}$ liegt dicht in jedem dieser Räume.

Satz 1.1 ([9] Hilfssatz 1.2.1). *φ ist genau dann ein Element aus $\mathfrak{H}^s$, wenn φ und die $\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$: $j = 1, \ldots, N$ in $\mathfrak{H}^{s-1}$ liegen. Ist φ ein Element aus $\mathfrak{H}^s$, so konvergiert $\frac{\tau_{h,j}\varphi - \varphi}{h}$ gegen $\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$ in $\mathfrak{H}^{s-1}$, wenn h gegen Null strebt.*

Beweis: Wegen $\sum_i \left|\widehat{\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}\right|^2 = 4\pi^2\varrho^2|\hat{\varphi}|^2$ gilt

$$\int (1 + \varrho^2)^s|\hat{\varphi}|^2\, d\xi = \int (1 + \varrho^2)^{s-1}|\hat{\varphi}|^2\, d\xi + \frac{1}{4\pi^2}\sum_i \int (1 + \varrho^2)^{s-1}\left|\widehat{\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}\right|^2 d\xi,$$

und daraus ergibt sich die erste Behauptung. Nun zeigen wir, daß

$$\left\|\frac{\tau_{h,j}\varphi-\varphi}{h}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right\|_{s-1}^2=\int|\hat\varphi|^2\left|\frac{e^{2\pi i h\xi_j}-1}{h}-2\pi i\xi_j\right|^2(1+\varrho^2)^{s-1}\,d\xi$$

mit h gegen Null konvergiert. Da der Integrand für festes ξ mit h gegen Null konvergiert, braucht man nach einem Satz von Lebesgue nur zu zeigen, daß er durch eine integrierbare Funktion majorisiert ist.

In der Tat hat man

$$\left|\frac{e^{2\pi i h\xi_j}-1}{h}-2\pi i\xi_j\right|\leq 2\pi M|\xi_j|$$

mit

$$M=\underset{-\infty<u<\infty}{\operatorname{Max}}\left|\frac{e^{iu}-1}{u}-i\right|.$$

Damit ist der Integrand durch die integrierbare Funktion

$$4\pi^2M^2|\hat\varphi(\xi)|^2(1+\varrho^2)^s$$

majorisiert.

Der Raum $\mathfrak{H}^s$ (s eine nicht-negative ganze Zahl).

Wenn s eine nicht-negative ganze Zahl ist, so erhält man durch rekursive Anwendung von Satz 1.I und auf Grund des Satzes von Plancherel-Parseval, daß φ genau dann ein Element aus $\mathfrak{H}^s$ ist, wenn alle seine Ableitungen (im Sinne der Distributionstheorie) bis zur Ordnung s quadratisch integrierbar sind.

Satz 1.2 (vgl. [10] Satz 2.11). *Es sei $\alpha\in\mathfrak{D}$ und $\varphi\in\mathfrak{H}^s$. Dann gilt $\alpha\varphi\in\mathfrak{H}^s$ und die Abbildung $(\alpha,\varphi)\to\alpha\varphi$ von $\mathfrak{D}\times\mathfrak{H}^s$ in $\mathfrak{H}^s$ ist stetig.*

Beweis: Zuerst beweisen wir die Ungleichung

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\leq C\cdot(1+|\eta|^2)^{|s|/2}\cdot(1+|\xi-\eta|^2)^{s/2}\qquad(C\geq 0).$$

a) Es sei $s\geq 0$. Wegen $|\xi|\leq|\eta|+|\xi-\eta|$ gilt für $|\eta|\geq|\xi-\eta|$ die Beziehung $|\xi|\leq 2|\eta|$ und damit $(1+|\xi|^2)^{s/2}\leq C\cdot(1+|\eta|^2)^{s/2}$. Dann multipliziert man mit der Ungleichung $1\leq 1+|\xi-\eta|^2$. Ist $|\eta|\leq|\xi-\eta|$, so gilt $|\xi|\leq 2|\xi-\eta|$ und damit $(1+|\xi|^2)^{s/2}\leq C\cdot(1+|\xi-\eta|^2)^{s/2}$. Dann multipliziert man mit der Ungleichung $1\leq(1+|\eta|^2)^{s/2}$.

b) Es sei $s=-\sigma$, $\sigma\geq 0$. Dann gilt wegen a):

$$(1+|\xi-\eta|^2)^{\sigma/2}\leq C\cdot(1+|\eta|^2)^{\sigma/2}(1+|\xi|^2)^{\sigma/2}$$

und damit

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\leq C\cdot(1+|\eta|^2)^{|s|/2}(1+|\xi-\eta|^2)^{s/2}.$$

Zieht man in

$$(1+\varrho^2)^{s/2}\widehat{(\alpha\varphi)}=(1+\varrho^2)\hat\alpha*\hat\varphi=\int(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat\alpha(\eta)\,\hat\varphi(\xi-\eta)\,d\eta$$

die eben bewiesene Ungleichung heran, so erhält man:

$$|(1+\varrho^2)^{s/2}\widehat{(\alpha\varphi)}|\leq C(1+|\xi|^2)^{|s|/2}|\hat\alpha(\xi)|*(1+|\xi|^2)^{s/2}|\hat\varphi(\xi)|\,.$$

Damit gilt ([11] Formel VI, 1; 2)

$$\|\alpha\varphi\|_s\leq C\|(1+\varrho^2)^{|s|/2}|\hat\alpha(\xi)|\|_{L^1}\cdot\|(1+\varrho^2)^{s/2}\hat\varphi(\xi)\|_{L^2}=C\|(1+\varrho^2)^{|s|/2}|\hat\alpha(\xi)|\|_{L^1}\cdot\|\varphi\|_s.$$

Daraus ergibt sich der Satz, denn aus $\alpha \to 0$ in $\mathfrak{D}$ folgt

$$\|(1+\varrho^2)^{|s|/2}\,|\hat{\alpha}(\xi)|\|_{L^1} \to 0\,.$$

Satz 1.3. *Es sei*

$$P(x,D) = \sum_{|P|\leq m} \alpha_P(x) D^P$$

ein Differentialoperator der Ordnung m mit $\alpha_P \in \mathfrak{D}$. Dann ist $\varphi \to P(x,D)\varphi$ eine stetige Abbildung von $\mathfrak{H}^s$ in $\mathfrak{H}^{s-m}$.

Beweis: Auf Grund von Satz 1.2 braucht man nur zu zeigen, daß die Abbildung $\varphi \to D^P\varphi$ von $\mathfrak{H}^s$ in $\mathfrak{H}^{s-m}$ stetig ist. In der Tat, wegen $|\xi^P| \leq$ $\leq C(1+\varrho^2)^{m/2}$ kann man schreiben:

$$\left|(1+|\xi|^2)^{\frac{s-m}{2}}\,(\widehat{D^P\varphi})\right| = \left|(1+|\xi|^2)^{\frac{s-m}{2}}\,\xi^P\hat{\varphi}\right| \leq$$

$$\leq C\left|(1+\varrho^2)^{\frac{s-m}{2}}\,(1+\varrho^2)^{\frac{m}{2}}\,\hat{\varphi}\right| = C|(1+\varrho^2)^{s/2}\hat{\varphi}|\,.$$

Hieraus folgt einerseits $(1+\varrho^2)^{\frac{s-m}{2}}\,(\widehat{D^P\varphi}) \in L^2$, d.h. $D^P\varphi \in \mathfrak{H}^{s-m}$, und andererseits die Ungleichung

$$\|D^P\varphi\|_{s-m} = \left\|(1+\varrho^2)^{\frac{s-m}{2}}\,(\widehat{D^P\varphi})\right\|_{L^2} \leq C\|(1+\varrho^2)^{s/2}\hat{\varphi}\|_{L^2} = C\|\varphi\|_s\,.$$

§ 2. Der Raum $\mathfrak{K}_A^s$ (s eine beliebige reelle Zahl und A eine kompakte Menge aus R^N)

Es sei A eine kompakte Menge aus R^N. Mit $\mathfrak{K}_A^s$ bezeichnet man den Raum derjenigen Distributionen von $\mathfrak{H}^s$, deren Träger in A enthalten ist.

$\mathfrak{K}_A^s$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $\mathfrak{H}^s$; denn konvergiert eine Folge $\varphi_n \in \mathfrak{K}_A^s$ gegen ein Element φ aus $\mathfrak{H}^s$, so konvergiert sie in $\mathfrak{D}'$. Wäre der Träger von φ nicht in A enthalten, so gäbe es ein $\psi \in \mathfrak{D}$, dessen Träger im Komplement von A liegt, mit $\langle\varphi,\psi\rangle \neq 0$ und $\langle\varphi_n,\psi\rangle = 0$ für jedes n, im Widerspruch zu $\langle\varphi_n,\psi\rangle \to \langle\varphi,\psi\rangle$. $\mathfrak{K}_A^s$ ist also ein Hilbertraum.

Satz 2.1. *Es sei φ_n eine Folge, die schwach gegen Null in $\mathfrak{K}_A^s$ konvergiert. Dann konvergieren die analytischen Funktionen $\hat{\varphi}_n(\xi)$ gleichmäßig gegen Null auf jeder kompakten Menge aus R^N.*

Beweis: Da die Distributionen φ_n kompakten Träger haben, sind die $\hat{\varphi}_n$ analytische Funktionen (Satz von Paley-Wiener). Es sei H ein Kompaktum aus R^N. Für $\xi \in H$ sei f_ξ die Funktion: $x \to \alpha(x)\cdot e^{2\pi i\langle\xi,x\rangle}$, wobei α eine beliebig oft differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger und gleich 1 auf A ist. Durchläuft ξ die kompakte Menge H, so bilden die Funktionen f_ξ eine kompakte Menge in $\mathfrak{S}$ und damit eine kompakte Menge in $\mathfrak{H}^{-s}$, wegen der Stetigkeit der Injektion $\mathfrak{S} \to \mathfrak{H}^{-s}$.

Da die φ_n schwach in $\mathfrak{H}^s$ gegen Null konvergieren, konvergieren die

$$\hat{\varphi}_n(\xi) = \langle\varphi_n, \alpha(x)\cdot e^{2\pi i\langle\xi,x\rangle}\rangle$$

gleichmäßig auf H gegen Null.

Satz 2.2. *Auf $\mathfrak{K}_A^s$ sind die durch*

$$\|\varphi\|_s = \left\{\int_{R^N} (1+\varrho^2)^s\,|\hat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi\right\}^{1/2} \|\varphi\|'_s = \left\{\int_{\varrho\geq c} (1+\varrho^2)^s\,|\hat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi\right\}^{1/2}$$

definierten Normen $\|\ \|_s$, $\|\ \|'_s$ für jedes $c > 0$ äquivalent.

Beweis: Daß $\|\ \|'_s$ eine Halbnorm ist, ist evident. $\|\ \|'$ ist eine Norm; denn aus $\|\varphi\|'_s = 0$ folgt $\hat{\varphi}(\xi) = 0$ für $\varrho \geq c$, und wegen der Analytizität von $\hat{\varphi}(\xi)$ gilt $\hat{\varphi}(\xi) = 0$ überall und damit $\varphi = 0$.

Da die durch $\|\ \|_s$ definierte Topologie trivialerweise feiner ist als die durch $\|\ \|'_s$ definierte, muß man nur zeigen, daß $\|\ \|'_s$ eine feinere Topologie als $\|\ \|_s$ definiert. Wäre dies nämlich falsch, so gäbe es eine Folge $\varphi_n \in \mathfrak{K}_A^s$ mit

$$\|\varphi_n\|_s = 1 \quad \lim \|\varphi_n\|'_s = 0\,.$$

Man zeigt, daß dies zu einem Widerspruch führt.

In der Tat, aus $\|\varphi_n\|_s = 1$ folgt, daß die Folge φ_n eine schwach kompakte Menge in $\mathfrak{K}_A^s$ ist ([1] S. 49 oder [2] Kap. V, § 1 Satz 4). Damit gibt es eine Teilfolge φ_{n_i}, die schwach gegen ein Element φ mit $\|\varphi\|_s \leq 1$ konvergiert. Wir zeigen nun: $\varphi = 0$.

Da die φ_{n_i} schwach gegen φ konvergieren, konvergieren die analytischen Funktionen $\hat{\varphi}_{n_i}(\xi)$ gleichmäßig auf jedem Kompaktum H gegen $\hat{\varphi}(\xi)$ (Satz 2.1). Damit gilt

$$\lim \int_H (1+\varrho^2)^s\,|\hat{\varphi}_{n_i}(\xi)|^2\,d\xi = \int_H (1+\varrho^2)^s\,|\hat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi\,.$$

Ist H im Komplement der Kugel $\varrho < c$ enthalten, so gilt nach Voraussetzung

$$\int_H (1+\varrho^2)^s\,|\hat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi = 0$$

für ein solches H. Also gilt $\hat{\varphi}(\xi) = 0$ für $\xi \in H$, und damit ist $\hat{\varphi}(\xi) = 0$ für $\varrho \geq c$. Wegen der Analytizität von $\hat{\varphi}(\xi)$ gilt nun $\hat{\varphi}(\xi) = 0$ überall, und daraus folgt $\varphi = 0$ auf R^N. Die analytischen Funktionen $\hat{\varphi}_{n_i}(\xi)$ konvergieren also gleichmäßig auf jedem Kompaktum aus R^N gegen Null, und damit gilt

$$\lim \int_{\varrho\leq c} (1+\varrho^2)^s\,|\hat{\varphi}_{n_i}(\xi)|^2\,d\xi = 0\,.$$

Dann konvergiert

$$\|\varphi_{n_i}\|_s^2 = \int_{\varrho\geq c} (1+\varrho^2)^s\,|\hat{\varphi}_{n_i}(\xi)|^2\,d\xi + \int_{\varrho\leq c} (1+\varrho^2)^s\,|\hat{\varphi}_{n_i}(\xi)|^2\,d\xi$$

gegen Null, im Widerspruch zu $\|\varphi_{n_i}\|_s^2 = 1$.

Normen in $\mathfrak{K}_A^s$ (s eine nicht-negative reelle Zahl).

Für $s \geq 0$ kann man neue zu $\|\ \|_s$ äquivalente Normen einführen. Zunächst ist die Norm

$$\|\varphi\|''_s = \left\{\int_{R^N} \varrho^{2s}\,|\hat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi\right\}^{1/2},$$

wegen der Kette von Ungleichungen

$$\|\varphi\|''_s \leq \|\varphi\|_s \leq b\|\varphi\|'_s \leq d\|\varphi\|''_s \qquad (s \geq 0)\,,$$

zu $\|\ \|_s$ und $\|\ \|'_s$ äquivalent. Die erste Ungleichung ist trivial. Die zweite:

$\|\varphi\|_s \leq b \cdot \|\varphi\|'_s$, gilt wegen der Äquivalenz zwischen $\| \ \|_s$ und $\| \ \|'_s$, und die dritte folgt aus der Ungleichung $(1+\varrho^2)^s \leq K \cdot \varrho^{2s}$ für $\varrho \geq c$. Für $c = 1$ kann man $K = 2^s$ setzen.

Nach Satz 2.2 ist die durch

$$\|\varphi\|_s''' = \left\{ \int_{\varrho \geq c} \varrho^{2s} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi \right\}^{1/2}$$

definierte Norm eine weitere äquivalente Norm.

Im folgenden werden wir in der Schreibweise keinen Unterschied zwischen den verschiedenen Normen machen und einfach $\| \ \|_s$ schreiben.

Satz 2.3. *Es sei*

$$P(x, D) = \sum_{|P| \leq m} \alpha_P(x) D^P$$

ein Differentialoperator der Ordnung m und mit Koeffizienten $\alpha^P \in \mathfrak{E}$. Dann ist die Abbildung $\varphi \to P(x, D)\varphi$ von $\mathfrak{K}^s_A$ in $\mathfrak{K}^{s-m}_A$ stetig.

Beweis: In der Tat, ist $\beta \in \mathfrak{D}$ mit $\beta = 1$ in einer Umgebung von A, so hat der Operator $\beta P(x, D)$ die Koeffizienten $\beta \alpha_P \in \mathfrak{D}$, und der Satz folgt aus Satz 1.3, da $\beta P(x, D)\varphi = P(x, D)\varphi$ gilt.

Satz 2.4. *Es sei $\alpha \in \mathfrak{E}$ und $\varphi \in \mathfrak{K}^s_A$. Dann gilt $\alpha\varphi \in \mathfrak{K}^s_A$ und die Abbildung $(\alpha, \varphi) \to \alpha\varphi$ von $\mathfrak{E} \times \mathfrak{K}^s_A$ in $\mathfrak{K}^s_A$ ist stetig.*

Beweis: Es sei $\beta \in \mathfrak{D}$ wie bei vorigem Satz. Wegen $\alpha\varphi = \alpha\beta\varphi$ kann man

$$\|\alpha\varphi\|_s = \|\alpha\beta\varphi\|_s \leq C \cdot \|(1+\varrho^2)^{|s|/2} \widehat{|\alpha\beta|}\|_{L^1} \cdot \|\varphi\|_s$$

schreiben (siehe Beweis von Satz 1.2). Daraus ergibt sich der Satz; denn aus $\alpha \to 0$ in $\mathfrak{E}$ folgt $\alpha\beta \to 0$ in $\mathfrak{D}$ und damit $\|(1+\varrho^2)^{|s|/2} |\alpha\beta|\|_{L^1} \to 0$.

Satz 2.5. *Es sei $s \geq 0$ und*

$$P(x, D) = \sum_{|P| = m} \alpha_P(x) D^P$$

ein homogener Differentialoperator der Ordnung m mit $\alpha_P(0) = 0$ für alle P. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Umgebung A des Nullpunktes, so daß für $\varphi \in \mathfrak{K}^s_A$ die Beziehung

$$\|P(x, D)\varphi\|_{s-m} \leq \varepsilon \cdot \|\varphi\|_s$$

gilt.

Beweis: Es sei B_ε die Kugel mit Radius ε und Zentrum im Nullpunkt, und für $\varphi \in \mathfrak{K}^s_{B_\varepsilon}$ $(s \geq 0)$ sei $\varphi_{(\varepsilon)}(x) = \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ $\left(\varphi \in \mathfrak{K}^s_{B_\varepsilon} \subset L^2_{(B_\varepsilon)}\right.$: φ ist also eine quadratisch summierbare Funktion; $\varphi_{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$ hat seinen Träger in der Einheitskugel: $\left.\varphi_{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \in \mathfrak{K}^s_{B_1}\right)$.

Da $\varphi(x) = \varphi_{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ ist, gilt $\hat{\varphi}(\xi) = \varepsilon^N \widehat{\varphi_{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}}(\varepsilon\xi)$ und damit

$$\|\varphi\|_s^2 = \int |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \varrho^{2s} \, d\xi = \varepsilon^{2N} \int \left|\widehat{\varphi_{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}}(\varepsilon\xi)\right|^2 \varrho^{2s} \, d\xi$$

$$= \varepsilon^{N-2s} \int \left|\widehat{\varphi_{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}}(\xi')\right|^2 \varrho^{2s} \, d\xi' = \varepsilon^{N-2s} \left\|\varphi_{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right\|_s^2 \cdot$$

Da $(x_i\varphi)_{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}(x) = \varepsilon x_i \varphi_{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}(x)$ ist, gilt nach Satz 2.4 $\|x_i\varphi\|_s \leqq \varepsilon K\|\varphi\|_s$. Dies bedeutet nichts anderes, als daß die Norm der Abbildung $\varphi \to x_i\varphi$ von $\mathfrak{K}^s_{B_\varepsilon}$ in $\mathfrak{K}^s_{B_\varepsilon}$ mit ε gegen Null strebt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also eine kompakte Umgebung des Nullpunktes (nämlich eine Kugel), so daß für $\varphi \in \mathfrak{K}^s_A$ die Beziehung $\|x_i\varphi\|_s \leqq \varepsilon \cdot \|\varphi\|_s$ gilt.

Andererseits kann man auf Grund des Satzes von Whitney (siehe Beweis in [10])

$$\alpha_P(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i \alpha_{P_i}(x)$$

mit $\alpha_{P_i} \in \mathfrak{E}$ schreiben. Somit erhält man: $P(x, D) = \sum_{P,i} x_i \alpha_{P_i}(x) D^P$. Damit gilt für $\varphi \in \mathfrak{K}^s_A$ unter Anwendung der Sätze 2.3 und 2.4:

$$\|P(x, D)\varphi\|_{s-m} \leqq \varepsilon' \|\varphi\|_s$$

mit $\varepsilon' = \varepsilon \sum_{P,i} c_{P_i} b_P$, wobei c_{P_i} die Norm der Abbildung $\varphi \to \alpha_{P_i}\varphi$ und b_P die der Abbildung $\varphi \to D^P\varphi$ ist. Dies beweist den Satz.

§ 3. Der Raum $\mathfrak{L}^s_\Omega$ (s eine beliebige reelle Zahl und Ω eine offene Menge aus R^N)

$\mathfrak{L}^s_\Omega$ ist der Raum derjenigen Distributionen φ in Ω, für die $\alpha\varphi \in \mathfrak{H}^s$ gilt, für jede beliebig oft differenzierbare Funktion α mit kompaktem Träger A, $A \subset \Omega$. α ist also ein Element aus $\mathfrak{D}_\Omega$ und $\alpha\varphi$ liegt in $\mathfrak{K}^s_A$.

Die Topologie $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{L}^s_\Omega$ ist die gröbste Topologie, für die die Abbildungen $\varphi \to \alpha\varphi$ von $\mathfrak{L}^s_\Omega$ in $\mathfrak{H}^s$ stetig sind. Die Halbnormen $p_\alpha(\varphi) = \|\alpha\varphi\|_s$ mit $\alpha \in \mathfrak{D}_\Omega$ definieren also die Topologie von $\mathfrak{T}$. Der Raum $\mathfrak{L}^s_\Omega$ ist nicht nur lokalkonvex, sondern auch metrisierbar und vollständig, d. h. es gilt der

Satz 3.1. *$\mathfrak{L}^s_\Omega$ ist ein $\mathfrak{F}$-Raum.*

Beweis: Zuerst zeigen wir, daß $\mathfrak{L}^s_\Omega$ metrisierbar ist ([2] S. 97). Es sei $\{\Omega_i\}_{i\in I}$, Ω_i relativkompakt, eine abzählbare lokalendliche Überdeckung von Ω und $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ eine der Überdeckung $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ untergeordnete Zerlegung der Einheit (siehe dazu [11]). Es sei $p_i(\varphi) = \|\alpha_i\varphi\|_s$ und $p(\varphi)_J = \operatorname{Sup}_{i\in J} p_i(\varphi)$, wobei J eine endliche Teilmenge der Indexmenge I ist. Die Menge der Halbnormen $\{P_J\}$ definiert eine lokalkonvexe Topologie $\mathfrak{T}'$ auf $\mathfrak{L}^s_\Omega$. Die lokalkonvexe Topologie $\mathfrak{T}$ definiert durch alle Halbnormen p_α (mit $p_\alpha(\varphi) = \|\alpha\varphi\|_s$, $\alpha \in \mathfrak{D}_\Omega$) ist offenbar feiner als $\mathfrak{T}'$. Wir zeigen nun, daß $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ äquivalent sind.

Es sei A ($A \subset \Omega$) der Träger von α. Da $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ eine lokalendliche Zerlegung der Einheit ist, kann man

$$\alpha = \sum_{i=1}^{q} \alpha\alpha_i$$

schreiben. Wegen der Stetigkeit der Abbildung $\alpha_i\varphi \to \alpha(\alpha_i\varphi)$ von $\mathfrak{H}^s$ in $\mathfrak{H}^s$ gilt $\|\alpha\alpha_i\varphi\|_s \leqq c'\|\alpha_i\varphi\|_s$ und damit

$$\|\alpha\varphi\|_s = \left\|\sum_{i=1}^{q} \alpha\alpha_i\varphi\right\|_s \leqq c' \sum_{i=1}^{q} \|\alpha_i\varphi\|_s \leqq (qc') \cdot \operatorname*{Sup}_{i=1,\ldots,q} \|\alpha_i\varphi\|_s .$$

Dies bedeutet, daß $\mathfrak{T}'$ auch feiner als $\mathfrak{T}$ ist; $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ fallen also zusammen, $\mathfrak{L}^s_\Omega$ ist daher metrisierbar.

$\mathfrak{L}^s_\Omega$ ist vollständig:

Es sei φ_n eine Cauchyfolge in $\mathfrak{L}^s_\Omega$ und $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ eine Ausschöpfung von Ω ($\Omega = \bigcup_i \Omega_i$, $\overline{\Omega_{i-1}} \subset \Omega_i$) mit offenen Mengen Ω_i. Ferner sei $\alpha_i \in \mathfrak{D}_{\Omega_i}$ gleich 1 auf Ω_{i-1}. Dann konvergiert die Cauchyfolge $\alpha_i \varphi_n$ in $\mathfrak{H}^s$ gegen ein Element ψ_i. Es sei nun in Ω_{i-1} die Distribution ψ^i durch $\langle \psi^i, \varphi\rangle = \langle \psi_i, \varphi\rangle$ ($\varphi \in \mathfrak{D}_{\Omega_{i-1}}$) erklärt. ψ^i ist also die Einschränkung von ψ_i auf Ω_{i-1}, und für $j \geqq i$ gilt $\langle \psi^i, \varphi\rangle = \langle \psi^j, \varphi\rangle$ für $\varphi \in \mathfrak{D}_{\Omega_{i-1}}$. Dann gibt es (Principe du recollement des morceaux [11]) eine Distribution ψ, die in Ω_{i-1} mit ψ_i übereinstimmt. Da $\mathfrak{L}^s_\Omega$ separiert ist, hängt ψ nicht von der Ausschöpfung $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ ab. Ist $\alpha \in \mathfrak{D}_\Omega$ mit Träger A ($A \subset \Omega$), so gibt es ein $i \in I$ mit $A \subset \Omega_{i-1}$ und $\alpha = \alpha\alpha_i$. Damit konvergiert $\alpha\varphi_n = \alpha(\alpha_i\varphi_n)$ in $\mathfrak{H}^s$ gegen $\alpha\psi_i = \alpha\psi$. Die Cauchyfolge φ_n konvergiert also in $\mathfrak{L}^s_\Omega$ gegen ψ.

Aus der Definition der Räume $\mathfrak{L}^s_\Omega$ folgt unmittelbar, daß jede Distribution aus $\mathfrak{L}^s_\Omega$ lokal in $\mathfrak{H}^s$ liegt. Die Umkehrung gilt auch. Es sei $\alpha \in \mathfrak{D}$ mit Träger A ($A \subset \Omega$) und φ eine Distribution, die in einer Umgebung eines jeden Punktes von Ω mit einer Distribution aus $\mathfrak{H}^s$ übereinstimmt. Da A sich mit endlich vielen offenen Umgebungen U_i $i = 1, \ldots, k$ überdecken läßt, kann man Ω mit U_i $i = 0, \ldots, k$ überdecken, wobei $U_0 = \Omega \cap \complement A$ auch eine offene Menge ist. Stimmt φ in U_i mit der Distribution φ_i aus $\mathfrak{H}^s$ überein und ist $\{\alpha_i\}$ $i = 0, \ldots, k$ eine der Überdeckung $\{U_i\}$ $i = 0, \ldots, k$ untergeordnete Zerlegung der Einheit, so gilt, wegen $\alpha\alpha_0 = 0$,

$$\alpha\varphi = \sum_{i=1}^{k} \alpha\alpha_i\varphi_i \in \mathfrak{H}^s.$$

φ gehört also genau dann zu $\mathfrak{L}^s_\Omega$, wenn für jeden Punkt $a \in \Omega$ eine Umgebung existiert, in der φ mit einem Element aus $\mathfrak{H}^s$ übereinstimmt.

Dementsprechend kann man sagen, wenn s eine nicht-negative ganze Zahl ist, daß φ genau dann zu $\mathfrak{L}^s_\Omega$ gehört, wenn für jedes $|P| \leqq s$ $D^P\varphi$ lokal in $L^2_{(\Omega)}$ liegt.

Viele Eigenschaften der Räume $\mathfrak{H}^s$ lassen sich auf die Räume übertragen. Zum Beispiel für $s' \geqq s$ gilt die Beziehung $\mathfrak{L}^{s'}_\Omega \subset \mathfrak{L}^s_\Omega$ und die Injektion $\mathfrak{L}^{s'}_\Omega \to \mathfrak{L}^s_\Omega$ ist stetig.

Dem Satz 2.3 für die Räume $\mathfrak{H}^s$ entspricht für die Räume $\mathfrak{L}^s_\Omega$ der

Satz 3.2. *Es sei*

$$P(x, D) = \sum_{|P| \leq m} \alpha_P(x) D^P$$

ein Differentialoperator der Ordnung m und mit Koeffizienten $\alpha_P \in \mathfrak{E}$. Dann ist die Abbildung $\varphi \to P(x, D)\varphi$ von $\mathfrak{L}^s_\Omega$ in $\mathfrak{L}^{s-m}_\Omega$ stetig.

Beweis: Es sei φ_n eine Folge, die gegen Null in $\mathfrak{L}^s_\Omega$ konvergiert, und seien $\alpha, \beta \in \mathfrak{D}_\Omega$, wobei $\beta = 1$ auf dem Träger von α gilt. Aus $\alpha P(x, D)\varphi_n = \alpha P(x, D)(\beta\varphi_n)$ folgt wegen Satz 2.3 die Konvergenz der Folge $\alpha P(x, D)\varphi_n$ in $\mathfrak{H}^{s-m}$.

Für $m = 0$ erhält man

Satz 3.3. *Es sei $\alpha \in \mathfrak{E}$ und $\varphi \in \mathfrak{L}^s_\Omega$. Dann gilt $\alpha\varphi \in \mathfrak{L}^s_\Omega$, und die Abbildung $\varphi \to \alpha\varphi$ von $\mathfrak{L}^s_\Omega$ in $\mathfrak{L}^s_\Omega$ ist stetig.*

Charakterisierung der Topologie von $\mathfrak{L}^0_\Omega$.

Es sei $\{B_i\}$ eine Ausschöpfung von Ω $\left(\Omega = \bigcup_i B_i, B_1 \subset B_2 \subset \cdots\right)$ mit kompakten Mengen B_i. Es sei p_i die Halbnorm definiert durch

$$p_i^2(\varphi) = \int_{B_i} |\varphi|^2\, dx \qquad (\varphi \in \mathfrak{L}^0_\Omega).$$

Für $\alpha \in \mathfrak{D}_\Omega$ sei p_α die Halbnorm definiert durch

$$p_\alpha^2(\varphi) = \|\alpha\varphi\|_0^2 = \int |\widehat{\alpha\varphi}|^2\, dx \qquad (\varphi \in \mathfrak{L}^0_\Omega).$$

Ist A der Träger von α, so gilt wegen der Parsevalschen Gleichung

$$p_\alpha^2(\varphi) = \int |\widehat{\alpha\varphi}|^2\, dx = \int |\alpha\varphi|^2\, dx = \int_A |\alpha\varphi|^2\, dx \leq c\, p_i^2(\varphi)$$

mit $c \geq 0$, $c = \operatorname{Sup}|\alpha|^2$ und $A \subset B_i$. Ist nun $\alpha \in \mathfrak{D}$ und gleich 1 auf einer Umgebung von B_i, so gilt

$$p_i^2(\varphi) = \int_{B_i} |\varphi|^2\, dx \leq \int |\alpha\varphi|^2\, dx = \int |\widehat{\alpha\varphi}|^2\, dx = p_\alpha^2(\varphi)\,.$$

Die Halbnormen p_α und p_i definieren also auf $\mathfrak{L}^0_\Omega$ dieselbe Topologie. Dies wird später für uns von Nutzen sein.

§ 4. Elliptische Differentialoperatoren

Es sei $P(x, D) = \sum_{|P| \leq m} \alpha_P(x) D^P$ $(\alpha_P \in \mathfrak{E})$. Der homogene Operator

$$P_0(x, D) = \sum_{|P| = m} \alpha_P(x) D^P$$

heißt der Hauptteil von $P(x, D)$. Mit $P(a, D)$ bezeichnet man den Operator mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{|P| \leq m} \alpha_P(a)\, D^P.$$

Nach § 0 entspricht dem Operator $P(a, D)$ ein Polynom, das man mit $P(a, \xi)$ bezeichnet. Man hat also:

$$P(a, \xi) = \sum_{|P| \leq m} \alpha_P(a) \xi^P.$$

Das Polynom $P_0(a, \xi) = \sum_{|P| = m} \alpha_P(a) \xi^P$ heißt die homogene Form des Operators $P(a, D)$.

Definition. *$P(a, D)$ (oder $P(a, \xi)$) heißt elliptisch, wenn die zugehörige homogene Form $P_0(a, \xi)$ für ξ reell genau dann verschwindet, wenn $\xi = 0$ ist. (Man sagt auch, $P(x, D)$ ist im Punkt a elliptisch, wenn $P(a, D)$ elliptisch ist.) $P(x, D)$ heißt elliptisch, wenn $P(x, D)$ in jedem Punkt $a \in R^N$ elliptisch ist.*

Aus der Definition folgt unmittelbar, daß ein Operator $P(x, D)$ genau dann elliptisch ist, wenn sein Hauptteil $P_0(x, D)$ es ist.

Bei Sätzen über elliptische Operatoren wird diese Tatsache oft ausgenützt.

Beispiele: Der Laplace-Operator $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ist elliptisch; der Tricomische Operator $x_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ ist in der oberen Halbebene elliptisch; der Wärme-Operator $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ist nicht elliptisch.

Ein gewöhnlicher Differentialoperator ungerader Ordnung mit reellen Koeffizienten kann nicht elliptisch sein.

Für elliptische Operatoren gilt der

Satz 4.1. *a) Ein elliptischer Operator (mit konstanten Koeffizienten) $P(D)$ der Ordnung m genügt den Ungleichungen*

$$K \leqq \frac{1 + |P(\xi)|^2}{(1+\varrho^2)^m} \leqq K' \quad (K > 0, K' > 0)\,. \tag{1}$$

Diese Ungleichungen sind für homogene elliptische Operatoren $P(D)$ charakteristisch.

b) *Ein homogener elliptischer Operator (mit variablen Koeffizienten $\alpha_p \in \mathfrak{E}$) $P_0(x, D)$ der Ordnung m läßt sich in der Form*

$$P_0(x, D) = \sum_{i=1}^{l} a_i(x)\, P_i(D)$$

darstellen, wobei die Polynome $P_i(\xi)$ homogen und elliptisch sind und (1) *genügen. Außerdem sind die a_i beliebig oft differenzierbar.*

Beweis: Es sei $P(D)$ ein homogener Operator elliptischen Typs der Ordnung m. Zunächst zeigen wir, daß $P(\xi)$ den Ungleichungen (1) genügt.

In der Tat, für $\varrho \geqq 1$ gelten die Ungleichungen

$$K_1 \leqq \frac{|P(\xi)|^2}{\varrho^{2m}} \leqq K_1' \quad (K_1 > 0, K_1' > 0)\,. \tag{2}$$

Auf der Einheitskugel gelten die Ungleichungen (2); denn das Polynom $|P(\xi)|^2$ ist nach oben und nach unten wegen $|P(\xi)|^2 > 0$ beschränkt. Wegen der Homogenität von $P(\xi)$ gelten die Ungleichungen auch für $\varrho > 1$.

Damit gilt für $\varrho \geqq 1$

$$K_2 \leqq \frac{1 + |P(\xi)|^2}{(1+\varrho^2)^m} \leqq K_2' \quad (K_2 > 0, K_2' > 0)\,.$$

Andererseits gilt für $\varrho \leqq 1$

$$K_3 \leqq \frac{1 + |P(\xi)|^2}{(1+\varrho^2)^m} \leqq K_3' \quad (K_3 > 0, K_2' > 0)\,.$$

Nimmt man $K = \operatorname{Min}(K_2, K_3)$ und $K' = \operatorname{Max}(K_2', K_3')$, so erhält man die Ungleichungen (1). Nun sei umgekehrt $P(\xi)$ ein homogenes Polynom vom Grade m, das (1) genügt. Dann ist $P(\xi)$ elliptisch; denn andernfalls gäbe es ein $\xi_0 \neq 0$ mit $P(\xi_0) = 0$. Wegen der Homogenität von $P(\xi)$ würde dann auch gelten $P(t\,\xi_0) = 0$. Dann hätte man aber längs der Geraden $\xi = t\,\xi_0$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 + |P(\xi)|^2}{(1+\varrho^2)^m} = 0\,,$$

und dies wäre ein Widerspruch zu $K > 0$.

Nun nehmen wir an, daß $P(D)$ nur elliptisch ist. Wir machen die Zerlegung

$$P(\xi) = P_0(\xi) + P_1(\xi)$$

mit $P_0(\xi) \neq 0$ für alle ξ und Grad von $P_1(\xi) < m =$ Grad von $P_0(\xi)$. Für $P_0(\xi)$ gelten die Ungleichungen (1), und $P(\xi)$ genügt der ersten Ungleichung von (1). Zu zeigen hat man nur, daß für genügend großes ξ der Ausdruck $\dfrac{1+|P(\xi)|^2}{(1+\varrho^2)^m}$ nach oben beschränkt ist. Ist aber ξ genügend groß, derart daß $\dfrac{|P_1(\xi)|}{|P_0(\xi)|} \leq \dfrac{1}{2}$ ist, so gilt

$$\frac{1+|P(\xi)|^2}{(1+\varrho^2)^m} \leq \frac{1+|P_0(\xi)|^2}{(1+\varrho^2)^m}\left|1+\frac{P_1(\xi)}{P_0(\xi)}\right|^2 \leq \frac{9}{4}K'.$$

Damit ist a) bewiesen.

Nun sei E der Vektorraum, der von den elliptischen homogenen Polynomen (mit konstanten Koeffizienten) des Grades m erzeugt wird (siehe Malgrange [9]). E ist von endlicher Dimension. Es sei $\{P_i(D)\}$ $i = 1, \ldots, l$ eine Basis von E, die aus elliptischen homogenen Polynomen besteht. Dann läßt sich $P(x, D)$ in der Form

$$P(x, D) = \sum_{i=1}^{l} a_i(x)\, P_i(D)$$

mit $a_i \in \mathfrak{E}$ darstellen: Man kann nämlich

$$P_i(D) = \sum_{|P| = m} \beta_{iP} D^P$$

und

$$P(x, D) = \sum_i a_i(x)\, P_i(D) = \sum_{i,P} \beta_{iP}(x)\, a_i(x) D^P = \sum_{|P|=m} \alpha_P(x) D^P$$

schreiben. Andererseits, da die Matrix (β_{iP}) den Rang l hat, gibt es $\beta_{iP_1}, \ldots, \beta_{iP_l}$ $i = 1, \ldots, l$, so daß die Determinante des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
\beta_{1P_1} a_1 + \cdots + \beta_{lP_1} a_l &= \alpha_{P_1}\\
&\;\;\vdots\\
\beta_{1P_l} a_1 + \cdots + \beta_{lP_l} a_l &= \alpha_{P_l}
\end{aligned}$$

verschieden von Null ist, und dann kann die Lösung $\{a_i\}$ $i = 1, \ldots, l$ linear durch die α_{P_i} ausgedrückt werden, die nach Voraussetzung beliebig oft differenzierbar sind. Damit ist der Satz bewiesen.

Definition. *Ein Differentialoperator $P(x, D)$ der Ordnung m heißt quasielliptisch, wenn für jedes Ω aus $\varphi \in \mathfrak{D}'_\Omega$ und $P(x, D)\varphi \in \mathfrak{L}^s_\Omega$ die Beziehung $\varphi \in \mathfrak{L}^{s+m}_\Omega$ folgt, wobei s eine beliebige reelle Zahl ist.*

Satz 4.2. *Es sei $P'(x, D)$ ein Differentialoperator der Ordnung m, $P_1(x, D)$ ein Operator von niedriger Ordnung. Dann folgt aus der Quasielliptizität von $P(x, D) = P'(x, D) + P_1(x, D)$ die Quasielliptizität von $P'(x, D)$.*

Beweis: Es sei $P(x, D) = P'(x, D) + P_1(x, D)$ quasielliptisch und $P'(x, D)\varphi \in \mathfrak{L}^s_\Omega$. Wir zeigen nun, daß $\varphi \in \mathfrak{L}^{s+m}_\Omega$ gilt, wobei ω ($\omega \subset \Omega$) eine offene relativkompakte Menge ist. Aus $P'(x, D)\varphi \in \mathfrak{L}^s_\Omega$ folgt $P'(x, D)\varphi \in \mathfrak{L}^s_\omega$. Da auf

jeder offenen relativkompakten Menge ω jede Distribution von endlicher Ordnung ist [11], kann man

$$P(x, D)\varphi = \sum_{|P| \leq n} D^P f_P \quad \text{mit} \quad f_P \in L^2_{(\omega)} = \mathfrak{L}^0_\omega$$

annehmen. Es gibt also, wegen Satz 3.2, ein k (z. B. $k = -n$) mit $P(x,D)\varphi \in \mathfrak{L}^k_\omega$ und damit gilt, wegen der Quasielliptizität von $P(x, D)$, die Beziehung $\varphi \in \mathfrak{L}^{k+m}_\omega$. Da $P_1(x, D)$ höchstens die Ordnung $m - 1$ hat, gilt auf Grund von Satz 3.2 $P_1(x, D)\varphi \in \mathfrak{L}^{k+1}_\omega$. Dann gilt im Falle $k + 1 \geq s$ die Beziehung $P(x, D)\varphi \in \mathfrak{L}^s_\omega$ und damit $\varphi \in \mathfrak{L}^{s+m}_\omega$.

Ist nun $k + 1 < s$, so hat man $P(x, D)\varphi \in \mathfrak{L}^{k+1}_\omega$ und damit $\varphi \in \mathfrak{L}^{k+m+1}_\omega$. Nach endlich vielen Schritten kann man $\varphi \in \mathfrak{L}^{k+m+\tau}_\omega$ mit $k + m + \tau \geq s + m$ erreichen, d. h. $\varphi \in \mathfrak{L}^{s+m}_\omega$. Da für jede offene relativkompakte Menge ω ($\omega \subset \Omega$) $\varphi \in \mathfrak{L}^{s+m}_\omega$ gilt, gilt auch $\varphi \in \mathfrak{L}^{s+m}_\Omega$. Damit ist der Satz bewiesen.

Korollar. *Ein Differentialoperator $P(x, D)$ ist genau dann quasielliptisch, wenn sein Hauptteil $P_0(x, D)$ es ist.*

Der Satz 4.2 besagt nämlich (mit $P_1(x, D) = \sum_{|P| < m} \alpha_P(x) D^P$), daß die Quasielliptizität von $P(x, D)$ die Quasielliptizität von $P_0(x, D)$ zur Folge hat. Andererseits, wendet man den Satz auf den Fall $P_0(x, D) = P(x, D) + (-P_1(x, D))$ an, so folgt aus der Quasielliptizität von $P_0(x, D)$ die Quasielliptizität von $P(x, D)$.

Auf Grund dieser Äquivalenz braucht man also bei quasielliptischen (wie auch bei elliptischen) Operatoren die Sätze nur für den Hauptteil zu formulieren.

Definition. *Es sei $P(x, D)$ ein Operator der Ordnung m mit der Eigenschaft, daß aus $P_0(x, D)\varphi \in \mathfrak{L}^0_\Omega$ die Beziehung $\varphi \in \mathfrak{L}^m_\Omega$ folgt (insbesondere besitzt ein quasielliptischer Operator $P(x, D)$ diese Eigenschaft). Mit Λ^m_Ω bezeichnet man den Raum derjenigen φ aus $\mathfrak{L}^0_\Omega$ mit $P_0(x, D)\varphi \in \mathfrak{L}^0_\Omega$ versehen mit der gröbsten lokalkonvexen Topologie, für die die Abbildungen $\varphi \to \varphi$ und $\varphi \to P_0(x, D)\varphi$ von Λ^m_Ω in $\mathfrak{L}^0_\Omega$ stetig sind. φ konvergiert also gegen Null in Λ^m_Ω genau dann, wenn φ und $P_0(x, D)\varphi$ beide gegen Null in $\mathfrak{L}^0_\Omega$ konvergieren.*

Auf Grund von Satz 3.2 stimmen die Räume Λ^m_Ω und $\mathfrak{L}^m_\Omega$ mengentheoretisch überein. Λ^m_Ω ist metrisierbar; seine Topologie ist nämlich durch die abzählbare Familie von Halbnormen

$$q_k(\varphi) = \{p_k^2(\varphi) + p_k^2(P_0(x, D)\varphi)\}^{1/2}$$

definiert (siehe § 3).

Λ^m_Ω ist außerdem vollständig: Ist nämlich φ_n eine Cauchyfolge in Λ^m_Ω, dann sind φ_n und $P_0(x, D)\varphi_n$ Cauchyfolgen in $\mathfrak{L}^0_\Omega$. Wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{L}^0_\Omega$ gibt es $\varphi \in \mathfrak{L}^0_\Omega$ und $\psi \in \mathfrak{L}^0_\Omega$ mit

$$\varphi_n \to \varphi\,, \quad P_0(x, D)\varphi_n \to \psi\,.$$

Man muß zeigen: $\psi = P_0(x, D)\varphi$. Da die Topologie von $\mathfrak{L}^0_\Omega$ stärker als die durch $\mathfrak{D}'$ in $\mathfrak{L}^0_\Omega$ induzierte Topologie ist, hat man $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathfrak{D}'$, und damit gilt, wegen der Stetigkeit der Ableitung in $\mathfrak{D}'$, $P_0(x, D)\varphi_n \to P_0(x, D)\varphi$ in $\mathfrak{D}'$. Andererseits konvergieren die $P_0(x, D)\varphi_n$ in $\mathfrak{L}^0_\Omega$ und damit in $\mathfrak{D}'$ gegen ψ. Daraus folgt $P_0(x, D)\varphi = \psi$.

Λ_Ω^m ist also ein $\mathfrak{F}$-Raum.

Da die Abbildung $\varphi \to \varphi$ von $\mathfrak{L}_\Omega^m$ in Λ_Ω^m trivialerweise stetig ist, ist diese Abbildung sogar ein Isomorphismus zwischen den $\mathfrak{F}$-Räumen Λ_Ω^m und $\mathfrak{L}_\Omega^m$ ([2], Kap. 1). Es gilt also der

Satz 4.3. *Die $\mathfrak{F}$-Räume Λ_Ω^m und $\mathfrak{L}_\Omega^m$ sind zueinander isomorph.*

Für den Beweis der Elliptizität eines quasielliptischen Operators ist auch wichtig der

Satz 4.4. *Zu jedem nicht elliptischen homogenen Operator $P_0(x, D)$ gibt es eine lineare Koordinatentransformation $y = \mathfrak{A}x + b$ derart, daß der Koeffizient der m-ten Ableitung des neuen Operators bezüglich einer der neuen Veränderlichen (z. B. y_N) den Nullpunkt als Nullstelle hat.*

Beweis: Es sei $y = \mathfrak{A}x + b$, wobei $\mathfrak{A}$ eine Matrix und b ein noch zu bestimmender Vektor ist. Wir schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{N} A_{ij} \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
P_0(x, D) &= (2\pi i)^m \sum_{|P|=m} \alpha_P(x) \frac{\partial^{P_1+\cdots+P_N}}{(\partial x_1)^{P_1}\cdots(\partial x_N)^{P_N}} \\
&= (2\pi i)^m \sum_{|P|=m} \alpha_P(x) \left(\sum_{j_{11}} A_{j_{11}1} \frac{\partial}{\partial y_{j_{11}}}\right) \cdots \left(\sum_{j_{1P_1}} A_{j_{1P_1}1} \frac{\partial}{\partial y_{j_{1P_1}}}\right) \cdots \\
&\quad \cdots \left(\sum_{j_{N1}} A_{j_{N1}N} \frac{\partial}{\partial y_{j_{N1}}}\right) \cdots \left(\sum_{j_{NP_N}} A_{j_{NP_N}N} \frac{\partial}{\partial y_{j_{NP_N}}}\right) \\
&= (2\pi i)^m \sum_{j} \sum_{|P|=m} \alpha_P(\mathfrak{A}^{-1}(y-b))\, A_{j_{11}1} \cdots A_{j_{1P_1}1} \cdots A_{j_{N1}N} \cdots \\
&\quad \cdots A_{j_{NP_N}N} \frac{\partial^m}{\partial y_{j_{11}} \cdots \partial y_{j_{1P_1}} \cdots \partial y_{j_{N1}} \cdots \partial y_{j_{NP_N}}}.
\end{aligned}$$

Ist $j_{11} = \cdots = j_{1P_1} = \cdots = j_{N1} = \cdots = j_{NP_N} = N$, so erhält man als Koeffizient von $\dfrac{\partial^m}{\partial y_N^m}$:

$$\beta(y) = \sum_{|P|=m} \alpha_P(\mathfrak{A}^{-1}(y-b))\, (A_{N1})^{P_1} \cdots (A_{NN})^{P_N}.$$

Da $P_0(x, D)$ nicht elliptisch ist, gibt es ein x^0 und einen von Null verschiedenen Vektor $\xi^0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_N^0)$, so daß

$$\sum_{|P|=m} \alpha_P(x^0)\, (\xi_1^0)^{P_1} \cdots (\xi_N^0)^{P_N} = 0$$

gilt. Es sei nun $y_0 = \mathfrak{A}x^0 + b$. Nimmt man $b = -\mathfrak{A}x^0$ und als $\mathfrak{A}$ eine Matrix mit $A_{Ni} = \xi_i^0$ und $|\mathfrak{A}| = 1$, so erhält man:

$$\beta(0) = \sum_{|P|=m} \alpha_P(x^0)\, (\xi_1^0)^{P_1} \cdots (\xi_N^0)^{P_N} = 0.$$

Hauptsatz 1. *Jeder Operator $P(x, D)$ der Ordnung m, dessen Hauptteil $P_0(x, D)$ die Eigenschaft besitzt, daß aus $P_0(x, D)\varphi \in \mathfrak{L}_\Omega^0$ die Beziehung $\varphi \in \mathfrak{L}_\Omega^m$ folgt, ist elliptisch. Insbesondere ist jeder quasielliptische Operator elliptisch.*

Beweis: Es sei $P(x, D)$ ein Operator mit der Eigenschaft, daß aus $P_0(x, D)\varphi \in \mathfrak{L}^0_\Omega$ die Beziehung $\varphi \in \mathfrak{L}^m_\Omega$ folgt. Wir zeigen, daß die Annahme, daß $P(x, D)$ nicht elliptisch ist, zu einem Widerspruch führt.

Dann wäre nämlich auch $P_0(x, D)$ nicht elliptisch und könnte nach Satz 4.4 in der Form

$$P_0(x, D) = \alpha(x) \cdot \frac{\partial^m}{\partial x_N^m} + \sum_{|P| = m} \alpha_P(x) D^P$$

mit

$$\alpha(0) = 0$$

und

$$D^P = \frac{\partial^{P_1 + \cdots + P_N}}{(\partial x_1)^{P_1} \cdots (\partial x_N)^{P_N}} \quad (P_N < m)$$

geschrieben werden. In einer offenen Umgebung des Nullpunktes gilt $|\alpha(x)| \leqq K \cdot \varrho$, wobei K eine nicht-negative Konstante ist. Einfachheitshalber nehmen wir $\Omega = \{x; \varrho < 2\}$. Wegen der Sätze 4.3 und 3.2 folgt aus $\varphi \to 0$ in Λ^m_Ω die Beziehung $\frac{\partial^m \varphi}{\partial x_N^m} \to 0$ in $\mathfrak{L}^0_\Omega$.

Es sei $\{B_k\}$ eine Ausschöpfung von Ω mit abzählbar vielen konzentrischen Kugeln B_k. Dann gibt es also nach der Definition der Topologie in Λ^m_Ω und $\mathfrak{L}^0_\Omega$ zu jedem B_k ein $B_{k'}$ $(B_k \subset B_{k'})$ und eine Konstante $c > 0$ mit

$$\int_{B_k} \left|\frac{\partial^m \varphi}{\partial x_N^m}\right|^2 dx \leqq c \left(\int_{B_{k'}} |\varphi|^2\, dx + \int_{B_{k'}} |P_0(x, D)\varphi|^2\, dx \right)$$

für alle $\varphi \in \Lambda^m_\Omega$. Damit gilt:

$$\int_{B_k} \left|\frac{\partial^m \varphi}{\partial x_N^m}\right|^2 dx \leqq c \int_{B_{k'}} |\varphi|^2\, dx + c_1 \int_{B_{k'}} \varrho^2 \left|\frac{\partial^m \varphi}{\partial x_N^m}\right|^2 dx + c_2 \int_{B_{k'}} \left(\sum_P |D^P \varphi|^2\right) dx\,.$$

Nun sei B_k die Einheitskugel und φ eine Funktion, deren Träger in B_k liegt. Dann gilt:

$$\int \left|\frac{\partial^m \varphi}{\partial x_N^m}\right|^2 dx \leqq c \int |\varphi|^2\, dx + c_1 \int \varrho^2 \left|\frac{\partial^m \varphi}{\partial x_N^m}\right|^2 dx + c_2 \int \left(\sum_P |D^P \varphi|^2\right) dx\,.$$

Es sei $\varphi_{(\varepsilon)}(x) = \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ mit $0 < \varepsilon < 1$. Da der Träger von $\varphi_{(\varepsilon)}(x)$ in der Kugel mit Radius ε enthalten ist, gilt die Ungleichung

$$\int \left|\frac{\partial^m \varphi}{\partial x_N^m}\right|^2 dx \leqq c \cdot \varepsilon^{2m} \int |\varphi|^2\, dx + c_1 \varepsilon^2 \int \varrho^2 \left|\frac{\partial^m \varphi}{\partial x_N^m}\right|^2 dx + c_2 \int \left(\sum_P |D^P \varphi|^2\right) dx\,.$$

Damit gilt auch:

$$\int \left|\frac{\partial^m \varphi}{\partial x_N^m}\right|^2 dx \leqq c_2 \int \left(\sum_P |D^P \varphi|^2\right) dx\,.$$

Aber diese Ungleichung wird auch von der Funktion

$$\varphi_\mu(x) = \varphi\left(x_1, \ldots, x_{N-1}, \frac{x_N}{\mu}\right) \quad (0 < \mu < 1)$$

erfüllt, und infolgedessen muß auch die Ungleichung

$$\int \left|\frac{\partial^m \varphi}{\partial x_N^m}\right|^2 dx \leq c_2 \left(\sum_P \mu^{2(m-P_N)}\right) \int |D^P \varphi|^2 dx \quad (m > P_N)$$

gelten. Dies ist ein Widerspruch; denn wenn μ gegen Null konvergiert, konvergiert auch die rechte Seite der Ungleichung gegen Null, während die linke Seite konstant verschieden von Null bleibt. Damit ist der Hauptsatz bewiesen.

Für den Beweis der Umkehrung dieses Hauptsatzes braucht man einige Sätze (vgl. [10] und [9]).

Satz 4.5. *Es sei $s \geq 0$ und $P_0(a, D)$ elliptisch. Dann gibt es eine kompakte Umgebung A von a, so daß die Abbildung $\varphi \to P_0(x, D)\varphi$ von $\mathfrak{K}^s_A$ in $\mathfrak{K}^{s-m}_A$ ein Monomorphismus ist.*

Beweis: Da nach Satz 2.3 die Abbildung $\varphi \to P_0(x, D)\varphi$ von $\mathfrak{K}^s_A$ in $\mathfrak{K}^{s-m}_A$ stetig ist, braucht man nur zu zeigen, daß in einer geeigneten kompakten Umgebung A von a die Beziehung

$$\|\varphi\|_s \leq K \cdot \|P_0(x, D)\varphi\|_{s-m}$$

für $\varphi \in \mathfrak{K}^s_A$ gilt.

Da $s \geq 0$ ist, gilt nach Seite 28 und den Ungleichungen (2) von Satz 4.1:

$$\|P_0(a, D)\varphi\|^2_{s-m} = \int_{\varrho \geq 1} |\widehat{P_0(a, D)\varphi}|^2 \varrho^{2(s-m)} d\xi = \int_{\varrho \geq 1} |P_0(a, \xi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \varrho^{2(s-m)} d\xi \geq$$

$$\geq K' \int_{\varrho \geq 1} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \varrho^{2s} d\xi ,$$

d. h. $\|P_0(a, D)\varphi\|_{s-m} \geq K' \cdot \|\varphi\|_s$ mit $K' > 0$, wobei K' von der Menge A nicht abhängt.

Es sei nun

$$P_0(x, D) = P_0(a, D) + P_0'(x, D) \quad \text{mit} \quad P_0'(x, D) = \sum_{|P| = m} (\alpha_P(x) - \alpha_P(a)) D^P .$$

Aber nach Satz 2.5 gilt (mit dem A dieses Satzes) für $\varphi \in \mathfrak{K}^s_A$ (mit einer Translation):

$$\|P_0'(x, D)\varphi\|_{s-m} \leq \varepsilon \|\varphi\|_s .$$

Damit gilt mit $K'' = \frac{1}{K'}$:

$$\|\varphi\|_s \leq K'' \|P_0(a, D)\varphi\|_{s-m} \leq K'' \|P_0(x, D)\varphi\|_{s-m} + K'' \|P_0'(x, D)\varphi\|_{s-m} \leq$$

$$\leq K'' \|P_0(x, D)\varphi\|_{s-m} + \varepsilon K'' \|\varphi\|_s ,$$

d. h.

$$(1 - \varepsilon K'') \|\varphi_s\| \leq K'' \|P_0(x, D)\varphi\|_{s-m} .$$

Nimmt man z. B. als ε die Zahl $\frac{1}{2K''}$, so erhält man

$$\|\varphi\|_s \leq 2K'' \|P_0(x, D)\varphi\|_{s-m}, \text{ w. z. b. w.}$$

Satz 4.6. *Es sei $P_0(x, D)$ elliptisch und s beliebig reell. Dann folgt aus $P_0(x, D)\varphi \in \mathfrak{L}^{s-m}_\Omega$ und $\varphi \in \mathfrak{L}^{s-1}_\Omega$ die Beziehung $\varphi \in \mathfrak{L}^s_\Omega$.*

Beweis: Man muß zeigen, daß es für jeden Punkt $a \in \Omega$ eine Umgebung gibt, in der φ mit einer Distribution aus $\mathfrak{H}^s$ übereinstimmt. Wir betrachten zuerst den Fall $s \geqq 0$.

Es sei A eine kompakte Umgebung von a wie beim Satz 4.5. Wir zeigen nun, daß für $\psi \in \mathfrak{D}_B$ (B kompakt mit $B \subset \mathring{A}$) $\psi\varphi \in \mathfrak{K}^s_A$ gilt.

Nach der Leibnizschen Formel gilt:

$$P_0(x, D)(\psi\varphi) = \psi P_0(x, D)\varphi + P_1(x, D)\varphi\,,$$

wobei $P_1(x, D)$ höchstens der Ordnung $m - 1$ ist. Daraus ergibt sich $P_0(x, D)(\psi\varphi) \in \mathfrak{K}^{s-m}_A$.

Man hat:

$$P_0(x, D)\frac{\tau_{h,j}(\psi\varphi) - \psi\varphi}{h} = \frac{\tau_{h,j}[P_0(x, D)(\psi\varphi)] - P_0(x, D)(\psi\varphi)}{h} + \\ - \frac{\tau_{h,j}P_0(x, D) - P_0(x, D)}{h}\,\tau_{h,j}(\psi\varphi)$$

und für genügend kleines h gilt $\tau_{h,j}(\psi\varphi) \in \mathfrak{K}^{s-1}_A$. Nach Satz 1.1 konvergiert das erste Glied der rechten Seite in $\mathfrak{K}^{s-m-1}_A$, wenn h gegen Null strebt. Da die Multiplikation eine stetige Abbildung von $\mathfrak{E} \times \mathfrak{K}^{s-m-1}_A$ in $\mathfrak{K}^{s-m-1}_A$ ist, konvergiert ebenfalls das zweite Glied in $\mathfrak{K}^{s-m-1}_A$, und zwar gegen den Grenzwert $\sum_{|P|=m} \frac{\partial \alpha_P}{\partial x_j} D^P(\psi\varphi)$ $(P_0(x, D) = \sum_{|P|=m} \alpha_P(x) D^P)$. Aber nach Satz 4.5 konvergiert $\frac{\tau_{h,j}(\psi\varphi) - \psi\varphi}{h}$ in $\mathfrak{K}^{s-1}_A$, wenn h gegen Null strebt. Es gilt also $\frac{\partial(\psi\varphi)}{\partial x_j} \in \mathfrak{K}^{s-1}_A$ $(j = 1, \ldots, N)$, und damit gilt nach Satz 1.1 $\psi\varphi \in \mathfrak{K}^s_A$.

Wir führen nun den Fall $s \leqq 0$ auf den Fall $s \geqq 0$ zurück.

Es sei

$$\left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^q \varphi' = \varphi\,,$$

wobei q eine noch zu bestimmende nicht-negative ganze Zahl ist. Ein solches φ' existiert und ist ein Element aus $\mathfrak{L}^{s+2q-1}_\Omega$. Hierfür genügt es, wegen

$$\left(\delta - \frac{\Delta\delta}{4\pi^2}\right)^\wedge = 1 + \varrho^2,$$

$$\widehat{\varphi'} = \frac{\hat{\varphi}}{(1 + \varrho^2)^q}$$

zu setzen. Ferner gilt lokal

$$(1 + \varrho^2)^{(s+2q-1)/2}\,\widehat{\varphi'} = (1 + \varrho^2)^{(s-1)/2}\,\hat{\varphi} \in L^2.$$

Andererseits hat man:

$$\left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^q P_0(x, D)\varphi' = P_0(x, D)\left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^q \varphi' + \sum_P Q_P(x, D) D^P \varphi'$$
$$= P_0(x, D)\varphi + \sum_P Q_P(x, D) D^P \varphi'\,,$$

wobei die Operatoren Q_P höchstens der Ordnung $2q - 1$ sind. Damit gilt

$$\left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^q P_0(x, D)\varphi' \in \mathfrak{L}^{s-m}_\Omega\,.$$

Es sei $\psi \in \mathfrak{D}_A$. Wegen

$$\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^q [\psi P_0(x,D)\varphi'] = \psi\left[\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^q P_0(x,D)\varphi'\right] + P_1(x,D)(P_0(x,D)\varphi')$$

($P_1(x,D)$ ist höchstens der Ordnung $2q-1$) und $P_0(x,D)\varphi' \in \mathfrak{L}_\Omega^{s-m+2q-1}$ gilt

$$\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^q [\psi P_0(x,D)\varphi'] \in \mathfrak{K}_A^{s-m}.$$

Durch Fouriertransformation erhält man:

$$\psi P_0(x,D)\varphi' \in \mathfrak{K}_A^{s+2q-m},$$

d. h. $P_0(x,D)\varphi' \in \mathfrak{L}_\Omega^{s+2q-m}$. Durch Anwendung des ersten Teiles des Beweises auf den Fall

$$P_0(x,D)\varphi' \in \mathfrak{L}_\Omega^{s+2q-m}, \quad \varphi' \in \mathfrak{L}_\Omega^{s+2q-1} \quad (s+2q \geqq 0)$$

erhält man $\varphi' \in \mathfrak{L}_\Omega^{s+2q}$ und damit $\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^q \varphi' = \varphi \in \mathfrak{L}_\Omega^s$.

Hauptsatz 2. *Jeder elliptische Operator ist quasielliptisch. Insbesondere besitzt der Hauptteil $P_0(x; D)$ eines elliptischen Operators $P(x,D)$ der Ordnung m die Eigenschaft, daß aus $P_0(x,D)\varphi \in \mathfrak{L}_\Omega^0$ die Beziehung $\varphi \in \mathfrak{L}_\Omega^m$ folgt.*

Beweis: Man braucht nur zu zeigen, daß aus der Elliptizität von $P_0(x,D)$ die Quasielliptizität von $P_0(x,D)$ folgt (vgl. P. Lax [7]). Es sei $P_0(x,D)\varphi \in \mathfrak{L}_\Omega^{s-m}$ und ω ($\omega \subset \Omega$) eine offene in Ω relativkompakte Menge. Auf ω ist φ eine Distribution endlicher Ordnung: Es gibt also ein k mit $\varphi \in \mathfrak{L}_\omega^k$. Ist $k \geqq s$, so hat man $\varphi \in \mathfrak{L}_\omega^s$. Auch im Falle $k < s$ gilt die Beziehung $\varphi \in \mathfrak{L}_\Omega^s$. Es sei nämlich $s-1 \leqq k < s$. Dann ist $\varphi \in \mathfrak{L}_\omega^{s-1}$ und nach Satz 4.6 gilt $\varphi \in \mathfrak{L}_\omega^s$.

Es sei nun $k < s-1$. Dann gilt $\varphi \in \mathfrak{L}_\omega^k = \mathfrak{L}_\omega^{(k+1)-1}$ $P_0(x,D)\varphi \in \mathfrak{L}_\omega^{(k+1)-m}$, und damit gilt nach Satz 4.6 $\varphi \in \mathfrak{L}_\omega^{k+1}$. Nach endlich vielen Schritten kann man $\varphi \in \mathfrak{L}_\omega^{k+\tau}$, mit $s-1 \leqq k+\tau < s$, erreichen. Auf diese Weise wird dieser Fall auf den vorangehenden zurückgeführt. Da für jedes ω ($\omega \subset \Omega$, ω relativkompakt) $\varphi \in \mathfrak{L}_\omega^s$ gilt, gilt auch $\varphi \in \mathfrak{L}_\Omega^s$. Damit ist der Hauptsatz bewiesen.

Aus den Hauptsätzen 1 und 2 folgt der

Hauptsatz. *Ein Operator ist genau dann elliptisch, wenn er quasielliptisch ist. Ein Operator $P(x,D)$ ist genau dann quasielliptisch, wenn sein Hauptteil $P_0(x,D)$ die Eigenschaft besitzt, daß aus $P_0(x,D)\varphi \in \mathfrak{L}_\Omega^0$ die Beziehung $\varphi \in \mathfrak{L}_\Omega^m$ folgt.*

§ 5. Hypoelliptische und Formalhypoelliptische Operatoren

Aus dem Hauptsatz lassen sich einige Folgerungen ziehen. Zum Beispiel: Jeder elliptische Operator $P(x,D)$ besitzt die Eigenschaft, daß aus $P(x,D)\varphi \in \mathfrak{E}_\Omega$ die Beziehung $\varphi \in \mathfrak{E}_\Omega$ folgt; denn aus $P(x,D)\varphi \in \mathfrak{E}_\Omega = \bigcap_s \mathfrak{L}_\Omega^s$ folgt $P(x,D)\varphi \in \mathfrak{L}_\Omega^s$ für jedes s, und damit gilt $\varphi \in \mathfrak{L}_\Omega^{s+m}$ für jedes s, d. h. $\varphi \in \bigcap_s \mathfrak{L}_\Omega^{s+m} = \mathfrak{E}_\Omega$.

Definition. *Ein Differentialoperator $P(x,D)$ heißt hypoelliptisch, wenn jede Distribution $\varphi \in \mathfrak{D}'_\Omega$ mit $P(x,D)\varphi \in \mathfrak{E}_\Omega$ ein Element aus $\mathfrak{E}_\Omega$ ist.*

Jeder elliptische Operator ist also hypoelliptisch.

Wenn andererseits $P(x, D)$ in einer offenen Menge Ω elliptisch ist, dann ist für jeden Punkt $a \in \Omega$ der Operator mit konstanten Koeffizienten $P(a, D)$ elliptisch und damit hypoelliptisch. Nach Satz 4.1 hat man für verschiedene Punkte a, b aus Ω die Beziehung:

$$K \leqq \frac{1 + |P(a, \xi)|^2}{1 + |P(b, \xi)|^2} \leqq K',$$

wobei K und K' nicht-negative Konstanten sind. Ein Operator mit dieser Eigenschaft heißt formalhypoelliptisch (siehe Hörmander [5] und Malgrange [9]). Man hat also die folgende

Definition. *Ein Operator $P(x, D)$ heißt formalhypoelliptisch in einer offenen Menge Ω, wenn die zwei folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

a) *Für $a \in \Omega$ ist $P(a, D)$ hypoelliptisch*

b) *Für je zwei Punkte a, b aus Ω sind die Operatoren $P(a, D)$ und $P(b, D)$ gleichstark im folgenden Sinne: Es gibt Konstanten $K > 0$, $K' > 0$ mit*

$$K \leqq \frac{1 + |P(a, \xi)|^2}{1 + |P(b, \xi)|^2} \leqq K'.$$

Jeder elliptische Operator ist also formalhypoelliptisch.

Malgrange [9] und Hörmander [5] haben kürzlich bewiesen, daß jeder formalhypoelliptische Operator hypoelliptisch ist.

Wir geben nun ein Beispiel eines homogenen hypoelliptischen Operators, der in keinem Punkt hypoelliptisch ist. Man geht dabei von dem Wärme-Operator:

$$\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

aus, der bekanntlich hypoelliptisch ist. Durch die Koordinatentransformation

$$s = t + \frac{1}{2} x^2$$

$$y = x$$

erhält man in den neuen Variablen y, s den Operator

$$-\left(y^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2y \frac{\partial^2}{\partial s \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

der homogen und hypoelliptisch ist. Es läßt sich leicht zeigen, daß der Operator

$$P(a, D) = -\left(y_0^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2y_0 \frac{\partial^2}{\partial s \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = -\left(y_0 \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2$$

mit $a = (y_0, s_0)$ nicht hypoelliptisch ist. Denn für jede lokalsummierbare Funktion $u(t)$ genügt die Funktion $\varphi(y, s) = u(s - y_0 y)$ im Sinne der Distributionstheorie der Gleichung:

$$\left(y_0 \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y}\right) \varphi = 0 \quad \text{also auch} \quad P(a, D)\varphi = 0.$$

φ braucht aber nicht beliebig oft differenzierbar zu sein.

Durch die Beziehung des Operators $P(x, D)$ zu den Operatoren $P(a, D)$ können sich also hypoelliptische Operatoren wesentlich von den elliptischen

unterscheiden. Während man bei einem Operator $P(x, D)$ aus der Hypoelliptizität von $P(a, D)$ auf die Hypoelliptizität von $P(x, D)$ schließen kann, wenn die „Stärke" von $P(a, D)$ unverändert bleibt (siehe Seite 41), kennt man noch nicht genügend allgemeine Bedingungen, unter denen die Hypoelliptizität von $P(a, D)$ aus der Hypoelliptizität von $P(x, D)$ folgt. Ob ein hypoelliptischer Operator vom Haupttyp (siehe Hörmander [6], Kap. IV) mit reellem Hauptteil und mit beliebig oft differenzierbaren Koeffizienten in jedem Punkt hypoelliptisch ist, möge als Frage dahingestellt bleiben (dies gilt sicher, wenn die Koeffizienten analytische Funktionen sind. Herr Prof. Malgrange hat mich darauf aufmerksam gemacht). Dies ist verknüpft mit der Frage, unter welchen Bedingungen aus der Hypoelliptizität von $P(x, D)$ auf die Elliptizität von $P(x, D)$ geschlossen werden kann. Es ist hier zu bemerken, daß nach einem Ergebnis von Hörmander ([6], Seite 239) jeder formalhypoelliptische Operator vom Haupttyp elliptisch ist.

Literatur

[1] Achieser, N. I., u. I. M. Glasmann: Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum. Berlin: Akademie-Verlag 1954.

[2] Bourbaki, N.: Espaces vectoriels topologiques. B. 1 (1953), B. 2 (1955). Paris: Hermann.

[3] Friedrichs, K. O.: Differentiability of solutions of linear elliptic differential equations. Comm. Pure and Appl. Math. 6, 299–326 (1953).

[4] Gårding, L.: Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations. Math. scand. 1, 55–72 (1953).

[5] Hörmander, L.: On the interior regularity of the solutions of partial differential equations. Comm. Pure and Appl. Math. 11, 197–218 (1958).

[6] Hörmander, L.: On the theory of general partial differential operators. Acta Math. 94, 161–247 (1955).

[7] Lax, P.: On the Cauchy problem for hyperbolic equations ... Comm. Pure and Appl. Math. VIII, 615–633 (1955).

[8] Malgrange, B.: Existence et aproximation des solutions des équations aux derivées partielles ... (Thèse). Ann. Inst. Fourier 6, 271–354 (1955–1956).

[9] Malgrange, B.: Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques. Bull. Soc. Math. France 85, 283–306 (1957).

[10] Schwartz, L.: Ecuaciones diferenciales parciales elípticas. Herausgegeben von Universidad Nacional de Colombia. Bogotá 1956.

[11] Schwartz, L.: Théorie des Distributions. B. 1 (1957), B. 2 (1959). Paris: Hermann.

[12] Weyl, H.: The method of orthogonal projection in potential theory. Duke J. 7, 411–444 (1940).

(Eingegangen am 16. Januar 1960)

Kanold, H.-J.
Math. Annalen 141, 43—48 (1960)

Über multiplikativ benachbarte Funktionen II

Von

Hans-Joachim Kanold in Braunschweig

Wir beziehen uns in dieser Note auf eine frühere [1]. Zuerst wollen wir als Verallgemeinerung veröffentlichter Ergebnisse den folgenden Satz beweisen.

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{N}$ die Menge aller natürlichen Zahlen; $\mathfrak{N}' \subseteq \mathfrak{N}$. Mit $n' \in \mathfrak{N}'$ sei auch $d \in \mathfrak{N}'$ für alle $d \mid n'$. Es sei ferner $\overline{D}^*(\mathfrak{N}') = \delta \geq \underline{\delta} = \underline{D}^*(\mathfrak{N}')$. Wenn n' die Menge $\mathfrak{N}'$ durchläuft, durchlaufe $f(n')$ die Menge $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{N}$. Endlich sei $\sum\limits_{n' \leq x} \frac{f(n')}{n'} = O(x)$, und für ein gegebenes, nichtnegatives, ganzes a auch $D^*(\mathfrak{F}'_{+a}) = 0$. Dann ist $\overline{D}^*(\mathfrak{N}'_{+a,s}) = \delta$ und $\underline{D}^*(\mathfrak{N}'_{+a,s}) = \underline{\delta}$. Falls auch $\mathfrak{F}'_{-a} \subseteq \mathfrak{N}$ und $D^*(\mathfrak{F}'_{-a}) = 0$ ist, gelten die gleichen Aussagen auch für $\mathfrak{N}'_{-a,s}$.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß

$$(1) \qquad \sum_{n' \leq x} \frac{f_{+a}(n')}{n'} = O(x)$$

gilt. Es genügt, den Beweis für $a = 1$ zu führen. Denn $f_{+a}(n)$ können wir uns schrittweise aus $f(n)$ über $f_{+1}(n), \ldots, f_{+(a-1)}(n)$ entstanden denken. Sei jetzt

$$(2) \qquad n' = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$$

die Primzahlpotenzzerlegung eines $n' \in \mathfrak{N}'$, $n' \leq x$. Dann haben wir

$$(3) \qquad \frac{f_{+1}(n')}{n'} = \prod_{\varkappa=1}^{k} \frac{f(p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}) + 1}{p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}} = \sum_{d \mid n'} \frac{1}{d} \frac{f\left(\frac{n'}{d}\right)}{\frac{n'}{d}}.$$

Dabei erstreckt sich diese Summe über die 2^k Teiler von n' der Gestalt

$$(4) \qquad d = p_1^{\beta_1} \ldots p_k^{\beta_k} \quad \text{mit} \quad \beta_\varkappa = \alpha_\varkappa \quad \text{oder} \quad 0 \quad \text{für} \quad \varkappa = 1, \ldots, k.$$

Aus (3) ergibt sich nun

$$(5) \qquad \sum_{n' \leq x} \frac{f_{+1}(n')}{n'} = \sum_{d \leq x} \frac{1}{d} \sum_{\frac{n'}{d} \leq \frac{x}{d}} f\left(\frac{n'}{d}\right) \frac{d}{n'}.$$

Nach Voraussetzung ist

$$(6) \qquad \sum_{n' \leq x} \frac{f(n')}{n'} < Kx$$

für alle x mit einer geeignet gewählten positiven Konstanten K. Nach (5) und (6) erhalten wir

$$(7) \qquad \sum_{n' \leq x} \frac{f_{+1}(n')}{n'} < Kx \sum_{d \leq x} \frac{1}{d^2} < \frac{\pi^2}{6} Kx.$$

Aus einem früher bewiesenen Satz [2] folgt nun sofort die Richtigkeit unseres Satzes. Für $\mathfrak{N}'$ können wir speziell die Menge der quadratfreien Zahlen nehmen. Dann stellt der folgende Satz ebenfalls eine Verallgemeinerung eines früheren dar [1] (insbesondere Satz 5).

Satz 2. *K sei eine beliebige positive Konstante. Es sei $\mathfrak{N}'$ die Menge aller quadratfreien natürlichen Zahlen, die nur Primteiler $> K$ besitzen; $f(n')$ sei eine multiplikative Funktion, die für alle $n' \in \mathfrak{N}'$ erklärt ist; ferner sei $\mathfrak{F}' \subseteqq \mathfrak{N}$, $\lim\limits_{n'\to\infty} f(n') = \infty$, $\sum\limits_{n' \leqq x} \frac{f(n')}{n'} = O(x)$, $\mathfrak{Q}$ die Menge der Quadrate aller ganzen Zahlen. Wenn $D^*(\mathfrak{F}'_{+a}) = 0$, $a \geqq 0$, ganz, ist $\mathfrak{F}'_{+a} \cap \mathfrak{Q}$ eine unendliche Menge. Wenn $\mathfrak{F}'_{-a} \subseteqq \mathfrak{N}$ und $D^*(\mathfrak{F}'_{-a}) = 0$, ist $\mathfrak{F}'_{-a} \cap \mathfrak{Q}$ eine unendliche Menge.*

Beweis. Wir beachten, daß aus $\lim\limits_{n'\to\infty} f(n') = \infty$ auch $\lim\limits_{n'\to\infty} f_{+a}(n') = \infty$ und mit der weiteren Voraussetzung $\mathfrak{F}'_{-a} \subseteqq \mathfrak{N}$ auch $\lim\limits_{n'\to\infty} f_{-a}(n') = \infty$ folgt. Die Menge $\mathfrak{N}'$ erfüllt die Bedingungen von Satz 1. Also ist $\bar{D}^*(\mathfrak{N}'_{+a,s}) = \delta$, bzw. auch $\bar{D}^*(\mathfrak{N}'_{-a,s}) = \delta$. Wenn $\delta > 0$ erfüllt ist, dann gibt es zwei verschiedene quadratfreie Zahlen n'_1, n'_2 aus $\mathfrak{N}'$, für welche (bei entsprechenden Vorzeichen)

$$f_{\pm a}(n'_1) = f_{\pm a}(n'_2)\,; \quad f_{\pm a}\left(\frac{n'_1 n'_2}{(n'_1, n'_2)^2}\right) = Q^2 \tag{8}$$

mit beliebig großem ganzzahligem Q (bei passend gewähltem K) gilt. Daraus können wir sogleich die Richtigkeit von Satz 2 erkennen. Wir müssen also nur noch

$$\bar{D}^*(\mathfrak{N}') = \delta > 0 \tag{9}$$

nachweisen. Seien $p_1 < \cdots < p_k \leqq K$ die der Größe nach geordneten Primzahlen, welche K nicht übertreffen. $\mathfrak{N}'$ ist die Menge aller quadratfreien Zahlen, welche zu $p_1 p_2 \ldots p_k = P$ teilerfremd sind. $\mathfrak{M}$ sei diejenige echte Obermenge von $\mathfrak{N}'$, die aus allen Elementen $m = n' n^3$ besteht, wobei n' alle Elemente von $\mathfrak{N}'$ durchläuft und n^3 alle natürlichen Zahlen, die jeden ihrer Primteiler mindestens in der zweiten Potenz enthalten. Es ist

$$\varliminf_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x} \geqq \frac{\varphi(P)}{P} > 0\,, \tag{10}$$

wenn $M(x)$ die Anzahl der $m \in \mathfrak{M}$, $m \leqq x$ bedeutet. Aus einem früher bewiesenen Hilfssatz [3] folgt, für $\mathfrak{N}' = \mathfrak{F}$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$:

$$\text{Aus } \varlimsup_{x\to\infty} \frac{F(x)}{x} = L = \delta \text{ folgt } 0 < \varlimsup_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x} \leqq 30L = 30\delta\,. \tag{11}$$

Damit ist Satz 2 bewiesen. Als Beispiel zu unseren Sätzen wollen wir die „identische" Funktion $f(n) = n$ betrachten. Dann ist

$$\mathfrak{F}' = \mathfrak{N}'\,, \sum_{n' \leqq x} \frac{f(n')}{n'} = O(x)\,. \tag{12}$$

Nehmen wir n' in der Gestalt (2) gegeben an, so folgt

$$f_{\pm a}(n') = \prod_{\varkappa=1}^{k} (p_\varkappa^{\alpha_\varkappa} \pm a)\,. \tag{13}$$

Um über $D^*(\mathfrak{F}'_{\pm a}) = D^*(\mathfrak{N}'_{\pm a})$ etwas aussagen zu können, beachten wir den Satz 3 aus [1]. Für beliebig vorgegebenes, *ungerades* a gilt auch (für $K > a$)

$$2 \mid f_{\pm a}(p) = p \pm a > 0 \tag{14}$$

für alle Primzahlen $p > K$. Aus (13) folgt für jedes feste $\varepsilon < 1$

$$\begin{aligned} \frac{f_{\pm a}(n')}{n'} (\log n')^{1-\varepsilon} &= \prod_{\varkappa=1}^{k} \left(1 \pm \frac{a}{p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}}\right) \cdot \left(\log \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}\right)^{1-\varepsilon} \geq \\ &\geq (\log n')^{1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{\prod\limits_{\varkappa=1}^{k} \left(1 + \frac{a}{p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}} + \cdots\right)} > c > 0 \end{aligned} \tag{15}$$

mit einer passend gewählten Konstanten c für alle n', die höchstens, bei festem S, $S-1$ verschiedene Primzahlen $p > K$ in genau der ersten Potenz enthalten. Für die Menge der übrigen n' und den Wertevorrat $\mathfrak{F}'_{\pm a, 1}$ gilt aber wie früher

$$\overline{D}^*(\mathfrak{F}'_{\pm a, 1}) \leq 2^{-S}. \tag{16}$$

Wir erhalten schließlich

$$D^*(\mathfrak{F}'_{\pm a}) = 0 \tag{17}$$

und daraus nach Satz 1

$$\overline{D}^*(\mathfrak{N}'_{\pm a, s}) = \overline{\delta}; \quad \underline{D}^*(\mathfrak{N}'_{\pm a, s}) = \underline{\delta}. \tag{18}$$

Dieses Resultat können wir in einem Satz so formulieren:

Satz 3. *Wenn $\mathfrak{N}'$ eine Menge von natürlichen Zahlen mit positiver oberer asymptotischer Dichte ist, welche mit jedem ihrer Elemente auch dessen sämtliche Teiler enthält, wenn s eine feste natürliche Zahl bedeutet, so gibt es unendlich viele $n' \in \mathfrak{N}'$ derart, daß zu jedem dieser n' mindestens s von n' und paarweise voneinander verschiedene Elemente $n'_1, \ldots, n'_s$ aus $\mathfrak{N}'$ existieren, so daß*

$$\prod_{p^\alpha \mid n'} (p^\alpha + a) = \prod_{p^\alpha \mid n'_1} (p^\alpha + a) = \cdots = \prod_{p^\alpha \mid n'_s} (p^\alpha + a) \tag{19}$$

erfüllt ist, wenn wir unter p^α die bei den entsprechenden kanonischen Zerlegungen auftretenden Primzahlpotenzen und unter a eine gegebene ungerade (nicht notwendig positive) ganze Zahl verstehen, vorausgesetzt, daß alle bei allen kanonischen Zerlegungen aller $n' \in \mathfrak{N}'$ auftretenden $p^\alpha > -a$ sind.

Aus Satz 2 erhalten wir ebenso

Satz 4. *$\mathfrak{N}'$ bedeute wieder die Menge aller quadratfreien natürlichen Zahlen, die nur Primteiler $> K$ besitzen; a sei eine gegebene, ungerade, positive oder negative, ganze Zahl. Dann gibt es unendlich viele $n' \in \mathfrak{N}'$, für welche*

$$\prod_{p \mid n'} (p + a) = Q^2 \tag{20}$$

mit ganzzahligem Q erfüllt ist.

Wir wollen im letzten Teil dieser Note noch einige Bemerkungen machen. Es sei $f(n)$ eine beliebige multiplikative zahlentheoretische Funktion, für welche $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$ erfüllt sein soll. Wir betrachten für alle Primzahlen $p > K$ die Werte $f(p)$. Es sei $a > 1$ eine gegebene natürliche Zahl. Von den Werten $f(p)$, $f_{+1}(p) = f(p) + 1, \ldots, f_{+(a-1)}(p) = f(p) + a - 1$ ist, bei festem p, genau

einer durch a teilbar. Wir betrachten eine neue multiplikative Funktion $g(n)$, welche wir so definieren:

$$(21)\qquad \begin{cases} g(p^\alpha) = f(p^\alpha) & \text{für alle Primzahlen } p \text{ und } \alpha > 1\,; \\ g(p) = f(p) & \text{für alle Primzahlen } p \leq K\,; \\ g(p) = f_{+r_p}(p) = f(p) + r_p & \text{für alle Primzahlen } p > K\,, \end{cases}$$

wobei r_p eine der Zahlen $0, 1, \ldots, a-1$ bedeutet, von p abhängig ist und so gewählt wird, daß

$$(22)\qquad a \mid g(p)$$

für $p > K$ gilt. Die Funktion $g(n)$ erfüllt dann die Bedingung a) von [1], Satz 3. Es ist ferner $g(n) \geq f(n)$. Wenn also

$$(23)\qquad \underline{\lim}_{n\to\infty} f(n)\,n^{-1}(\log n)^{1-\varepsilon} > 0$$

gilt, dann ist

$$(24)\qquad D^*(\mathfrak{G}) = 0 \quad (\mathfrak{G} = \text{Wertevorrat von } g(n))\,.$$

Wenn

$$(25)\qquad \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{f(n)}{h(n)}\, n^{-1/2} > 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} h(n) = \infty$$

ist, dann ist

$$(26)\qquad \overline{D}^*(\mathfrak{G}) \leq \frac{1}{a}\,.$$

Aus

$$(27)\qquad \sum_{n' \leq x}{}' \frac{f(n')}{n'} = O(x)$$

folgt auch

$$(28)\qquad \sum_{n' \leq x}{}' \frac{g(n')}{n'} = O(x)\,,$$

wenn $\mathfrak{N}'$ so wie in Satz 1 definiert ist. Wir können also die Sätze 1 und 2 in geeigneter Form auch für $g(n)$ aussprechen. Gehen wir wieder von $f(n) = n$ aus, so können wir zu (19) und (20) analoge Aussagen gewinnen: Sei $b > 1$, ganz, beliebig gegeben, so definieren wir $g(n)$ durch (21) und r_p so, daß

$$(29)\qquad b \mid p + r_p$$

für $p > K$, $0 \leq r_p < b$ gilt. Dann ist z. B. statt (20)

$$(30)\qquad \prod_{p \mid n'} (p + r_p) = Q^2$$

für unendlich viele $n' \in \mathfrak{N}'$ erfüllt. Diese kurzen Ausführungen mögen hier genügen. Wir wollen noch die folgende Frage stellen: Können wir auch einige Ergebnisse von [4] auf multiplikativ benachbarte Funktionen „übertragen"? Sei $f(n) = \sigma_r(n) = \sum_{d \mid n} d^r$, r eine feste natürliche Zahl. Sei $V(n) = k$, die Anzahl der verschiedenen Primteiler von n, eine feste, von n unabhängige Zahl. Sei a eine gegebene natürliche Zahl. Kann dann die Gleichung

$$(31)\qquad f_{+a}(n) \cdot n^{-r} = \text{const} = C$$

unendlich viele Lösungen n besitzen? Wir wollen zeigen, daß dies, abgesehen von leicht übersehbaren Sonderfällen, nie eintreten kann. Dazu beachten wir, daß für jede Zahl n_ϱ, die Lösung von (31) ist, gilt:

$$(32) \qquad n_\varrho = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_{\varrho\varkappa}^{\alpha_{\varrho\varkappa}}; \quad \prod_{\varkappa=1}^{k} (1 + p_{\varrho\varkappa}^{-r} + \cdots + p_{\varrho\varkappa}^{-r\alpha_{\varrho\varkappa}} + a p_{\varrho\varkappa}^{-r\alpha_{\varrho\varkappa}}) = C .$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$(33) \qquad 1 + p_{\varrho\varkappa}^{-r} + \cdots + p_{\varrho\varkappa}^{-r\alpha_{\varrho\varkappa}} + a p_{\varrho\varkappa}^{-r\alpha_{\varrho\varkappa}} = v_{\varrho\varkappa}$$

und nehmen wir an, es gäbe unendlich viele verschiedene Lösungen n_ϱ von (31), dann wählen wir wieder eine geeignete Teilfolge so aus, daß

$$(34) \qquad \lim_{\varrho\to\infty} v_{\varrho\varkappa} = h_\varkappa; \quad \prod_{\varkappa=1}^{k} h_\varkappa = C$$

gilt. Es ist nun

$$(35) \qquad \frac{p_{\varrho\varkappa}^r}{p_{\varrho\varkappa}^r - 1} \leqq v_{\varrho\varkappa} < \frac{p_{\varrho\varkappa}^r}{p_{\varrho\varkappa}^r - 1} (1 + a p_{\varrho\varkappa}^{-r\alpha_{\varrho\varkappa}}) .$$

Dabei tritt das Gleichheitszeichen nur ein, wenn $a \cdot r \cdot p_{\varrho\varkappa} = 2$ ist. Weil dann aber $2 = v_{\varrho\varkappa} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}$ für alle natürlichen Zahlen α gilt, erhalten wir die erwähnten Sonderfälle $\frac{\sigma_{+1}(n)}{n} = C$, bei denen mit einer geraden Zahl n als Lösung auch unendlich viele gerade Zahlen als Lösungen auftreten. Für $a \cdot r \cdot p_{\varrho\varkappa} > 2$ gelangen wir nun wieder wie früher zu einer Einteilung der $h_\varkappa$ in drei Klassen:

I. $p_{\varrho\varkappa} \to \infty$ für $\varrho \to \infty$ ergibt $h_\varkappa = 1$, $v_{\varrho\varkappa} = h_\varkappa + \varepsilon_{\varrho\varkappa}$, $\varepsilon_{\varrho\varkappa} > 0$;

II. $p_{\varrho\varkappa}$ und $\alpha_{\varrho\varkappa}$ unabhängig von ϱ ergibt $h_\varkappa = v_{\varrho\varkappa}$, $\varepsilon_{\varrho\varkappa} = 0$;

(36) III. Die $p_{\varrho\varkappa}$ bleiben beschränkt für $\varrho \to \infty$; wir können dann o. B. d. A. annehmen, daß $p_{\varrho\varkappa}$ unabhängig von ϱ ist, also $p_{\varrho\varkappa} = p_\varkappa$ gilt, ferner, daß $\alpha_{\varrho\varkappa} \to \infty$ erfüllt ist. Somit haben wir für die Häufungspunkte der Klasse III

$$(37) \qquad \frac{p_\varkappa^r}{p_\varkappa^r - 1} < v_{\varrho\varkappa} = h_\varkappa + \varepsilon_{\varrho\varkappa} < \frac{p_\varkappa^r}{p_\varkappa^r - 1} (1 + a p_\varkappa^{-r\alpha_{\varrho\varkappa}}) .$$

Das liefert aber

$$(38) \qquad h_\varkappa = \frac{p_\varkappa^r}{p_\varkappa^r - 1}, \quad \varepsilon_{\varrho\varkappa} > 0 .$$

Weil keiner der Häufungspunkte von unten angenähert wird, ergibt sich ein Widerspruch. Damit ist bewiesen, daß (31), mit Ausnahme der Sonderfälle nur endlich viele Lösungen besitzen kann. Das Ergebnis ist enthalten in einem etwas allgemeineren Satze, welchen wir zum Schluß formulieren wollen. Sein Beweis ist nach dem Gesagten sofort einleuchtend.

Satz 5. *$f(n)$ sei eine multiplikative zahlentheoretische Funktion, die nicht notwendig ganzzahlige Werte anzunehmen braucht. Wir betrachten nur solche n, die eine vorgegebene Anzahl k verschiedener Primteiler besitzen. Es sei für jede Primzahlpotenz p^α der Wert $f(p^\alpha)$ positiv und nach oben durch eine von p^α un-*

abhängige Konstante beschränkt. Dann besitzt die Gleichung $f(n) = \text{const}$ höchstens endlich viele Lösungen n, wenn aus $f(p_\varrho^{\alpha_\varrho}) \to h$ für irgendeine Folge von verschiedenen Primzahlpotenzen $\{p_\varrho^{\alpha_\varrho}\}$ für hinreichend große ϱ entweder stets $f(p_\varrho^{\alpha_\varrho}) < h$ oder stets $f(p_\varrho^{\alpha_\varrho}) > h$ folgt.

Literatur

[1] KANOLD, H.-J.: Über multiplikativ benachbarte Funktionen. Math. Ann. **140**, 249–255 (1960).

[2] KANOLD, H.-J.: Über zahlentheoretische Funktionen. III. Math. Ann. **135**, 251–256 (1958), insbesondere Satz 5′.

[3] KANOLD, H.-J.: Über das harmonische Mittel der Teiler einer natürlichen Zahl. II. Math. Ann. **134**, 225–231 (1958).

[4] KANOLD, H.-J.: Über einen Satz von L. E. Dickson. II. Math. Ann. **132**, 246–255 (1956).

(Eingegangen am 25. Januar 1960)

WAGNER K.
Math. Annalen 141, 49—67 (1960)

Faktorklassen in Graphen

Von
K. WAGNER in Köln

§ 1. Einleitende Betrachtungen

Es sei $G = E \cup K$ ein Graph[1]). Stoßen an einer Ecke $p \in E$ genau n normale Kanten und s Schlingen von G an, so heißt die Zahl $n + 2s$ der Grad von p in G. Wir bezeichnen ihn mit $\gamma(p, G)$. Ein Graph $G' = E' \cup K'$ heißt ein Faktor von G, wenn $E' = E$ und $K' \subseteq K$ gilt. $G' = E \cup K'$ $(K' \subseteq K)$ heißt ein f-Faktor von G, wenn $\gamma(p, G') = f$ für jedes $p \in E$ gilt, also die Anzahl der an p anstoßenden Kanten von G' (Schlingen doppelt gerechnet) für sämtliche $p \in E$ konstant gleich f ist. G heißt f-teilbar bzw. f-prim, wenn es (mindestens) einen bzw. keinen f-Faktor von G gibt.

Die Frage, ob ein Graph $G = E \cup K$ f-teilbar ist, kann weitgehend verallgemeinert werden, indem wir an die Stelle des konstanten f ein variables $f(p)$ $(p \in E)$ setzen. Hierzu denken wir uns eine (eindeutige) Funktion Γ auf E mit ganzzahligen, nicht negativen Werten $\Gamma(p)$ $(p \in E)$ vorgegeben. Wir nennen $G' = E \cup K'$ $(K' \subseteq K)$ einen *Γ-Faktor* von $G(= E \cup K)$, wenn $\gamma(p, G') = \Gamma(p)$ für jedes $p \in E$ gilt. G heiße *Γ-teilbar* bzw. *Γ-prim*, wenn es (mindestens) einen bzw. keinen Γ-Faktor (mit dem vorgegebenen Γ) von G gibt.

Die Menge sämtlicher Faktoren von G zerfällt nun in bestimmte Äquivalenzklassen, wobei jede Funktion Γ (ganzzahlig und nicht negativ) auf E mit je genau einer (evtl. leeren) Äquivalenzklasse und umgekehrt jede nicht leere Äquivalenzklasse mit je genau einer Funktion Γ, wie folgt, gepaart ist: Sind G_1, G_2 zwei Faktoren von $G(= E \cup K)$, so setzen wir

$$G_1 \sim G_2$$

dann und nur dann, wenn $\gamma(p, G_1) = \gamma(p, G_2)$ in jedem $p \in E$ gilt. Ist G_1 ein Γ-Faktor von G, so ist also $G_2 \sim G_1$ gleichbedeutend damit, daß G_2 ebenfalls ein Γ-Faktor von G ist. Ist f eine ganze Zahl $\geqq 0$, so bilden sämtliche f-Faktoren

---

[1]) Genauer gesagt, gehen wir von zwei elementfremden Mengen E und C $(E \cap C = \Theta)$ und folgender Gleichheitsrelation aus: Wir setzen $(p_1 k_1 q_1) = (p_2 k_2 q_2)$ (mit $p_\nu, q_\nu \in E$ und $k_\nu \in C$, $\nu = 1, 2$) dann und nur dann, wenn gleichzeitig $k_1 = k_2$ gilt und $(p_1 q_1)$, $(p_2 q_2)$ — als ungeordnete Paare aufgefaßt — gleiche Paare sind. Ferner sei K eine Teilmenge der Menge dieser Tripel derart, daß es zu jedem $k \in C$ ein und nur ein $(pkq) \in K$ mit jeweils diesem k gebe. Dann heißt $E \cup K$ ein Graph G mit der Eckenmenge E und Kantenmenge K. Da die Abbildung $(pkq) \to k$ (mit $(pkq) \in K$) eine umkehrbar eindeutige Abbildung von K auf C ist, dürfen wir die Kanten (pkq) von G auch kurz mit (jeweils diesem) k bezeichnen. Jede Kante (pkp) heißt eine *Schlinge*. Zum Unterschiede hierzu nennen wir jede Kante (pkq) mit $p \neq q$ eine *normale Kante*. Wir setzen im folgenden voraus, daß an jeder Ecke von G höchstens endlich viele Kanten von G liegen.

von G genau eine Äquivalenzklasse, und zwar die Äquivalenzklasse mit $\Gamma = f$. Die f-Faktoren bilden also spezielle Äquivalenzklassen, für jedes $f \geqq 0$ je genau eine. Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, die von TUTTE und BELCK betrachteten hyper-f-primen Graphen (vgl. [3] für $f = 1$ und [1] für beliebiges konstantes, ganzzahliges $f \geqq 1$) für den allgemeinen Fall eines variablen $\Gamma(p)$, $p \in E$, zu untersuchen und eine genaue Übersicht über die Gesamtheit dieser Graphen, die wir im folgenden maximal Γ-prim genannt haben, zu schaffen[2]).

Eine Folge von Kanten $(p_{\nu-1} k_\nu p_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, n$, aus $G = E \cup K$, ausgeschrieben:

$$(p_0 k_1 p_1), (p_1 k_2 p_2), \ldots, (p_{n-1} k_n p_n),$$

heißt ein (von p_0 nach p_n führender oder auch p_0, p_n verbindender) *Kantenzug* in G (mit den Endpunkten p_0, p_n), wenn je zwei Kanten k_ν, k_μ, $1 \leqq \nu < \mu \leqq n$, der Folge verschieden sind. Wir nennen einen Kantenzug $(p_{\nu-1} k_\nu p_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, n$, *bezüglich* K_1, K_2 $(K_1 \subseteq K, K_2 \subseteq K)$ *alternierend* (kurz: K_1, K_2 alternierend), wenn für jedes $\nu = 1, \ldots, n-1$ entweder $k_\nu \in K_1 - K_2$ und $k_{\nu+1} \in K_2 - K_1$ oder umgekehrt $k_\nu \in K_2 - K_1$ und $k_{\nu+1} \in K_1 - K_2$ gilt. Eine Folge von Kanten $(p_{\nu-1} k_\nu p_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, n, n+1$, aus G heißt ein *Kreiszug* (kurz: Kreis) in G, wenn $p_n = p_0$, $p_{n+1} = p_1$, $k_{n+1} = k_1$ gilt und je zwei Kanten k_ν, k_μ der Folge mit $1 \leqq \nu < \mu \leqq n$ verschieden sind. Wir nennen einen Kreis $(p_{\nu-1} k_\nu p_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, n+1$, *bezüglich* K_1, K_2 $(K_1 \subseteq K, K_2 \subseteq K)$ *alternierend* (kurz: K_1, K_2 alternierend), wenn für jedes $\nu = 1, \ldots, n$ entweder $k_\nu \in K_1 - K_2$ und $k_{\nu+1} \in K_2 - K_1$ oder umgekehrt $k_\nu \in K_2 - K_1$ und $k_{\nu+1} \in K_1 - K_2$ gilt. Wir bezeichnen einen Kantenzug bzw. Kreis $(p_{\nu-1} k_\nu p_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, n$ bzw. $\nu = 1, \ldots, n+1$, kurz mit $k_1, \ldots, k_n$. Sind $G_1 = E_1 \cup K_1$, $G_2 = E_2 \cup K_2$ Teilgraphen von $G = E \cup K$, so sagen wir statt „K_1, K_2 alternierend" auch „G_1, G_2 alternierend", oder auch „K_1, G_2 alternierend" oder „G_1, K_2 alternierend".

Es gilt[3]):

Satz 1. *Man habe zwei verschiedene Teilgraphen*

$$G_\nu = E \cup K_\nu,\ \nu = 1, 2\ (K_1 \neq K_2),$$

von $G = E \cup K$. Es sei $G_1 \sim G_2$ (d. h. $\gamma(p, G_1) = \gamma(p, G_2)$ in jedem $p \in E$). Dann gibt es bezüglich G_1, G_2 alternierende Kreise $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ in G derart, daß jede Kante $k \in K_1 \cup K_2 - (K_1 \cap K_2)$ in je genau einem Φ_ν $(1 \leqq \nu \leqq n)$ vorkommt.

---

[2]) Während in den Arbeiten [4], [5] und [2] von TUTTE bzw. ORE als Hauptziel Kriterien für Γ-Teilbarkeit, Γ-Primität von Graphen aufgestellt werden, läßt sich insbesondere für die maximal Γ-primen Graphen, wie im folgenden gezeigt wird, der Bau solcher Graphen näher beschreiben. Unter anderem wird die (ordnungstheoretische) Methode der Untersuchung maximaler Elemente auch in [2] (vgl. [2], S. 127 unten) angewendet, jedoch in bezug auf eine völlig andere Menge von Graphen als hier für die geordnete Menge der Γ-primen Graphen.

[3]) Da „unendlich lange" alternierende Kantenzüge oft zu Schwierigkeiten führen würden, wollen wir im folgenden voraussetzen, daß G stets ein endlicher Graph ist, obwohl manche Sätze mit Beweisen ohne weiteres auf Graphen mit abzählbar unendlich vielen Ecken (jedoch mit der am Schluß der Fußnote 1 genannten Einschränkung) übertragen werden könnten. — Unser Satz 1 enthält Satz 2 und Theorem I von [1] als Spezialfälle.

Beweis: Wegen $K_1 \neq K_2$ gibt es eine Kante $k_1 \in K_1 \cup K_2 - (K_1 \cap K_2)$. Wir können $k_1 \in K_1 - K_2$ voraussetzen. p_0, p_1 seien die (nicht notwendig verschiedenen) Endpunkte von k_1. Wegen

$$\gamma(p_1, E \cup K_1 - K_2) = \gamma(p_1, E \cup K_2 - K_1)$$

gibt es eine an p_1 liegende Kante $k_2 \in K_2 - K_1$. Wir nehmen nun an, man habe $n+1$ (nicht notwendig verschiedene) Ecken $p_0, p_1, \ldots, p_n$ und zu jedem $\nu = 1, \ldots, n$ eine $p_{\nu-1}$ mit p_ν verbindende Kante k_ν mit $k_\nu \in K_1 - K_2$ für jedes ungerade ν, mit $k_\nu \in K_2 - K_1$ für jedes gerade ν. Außerdem soll die Folge $k_1, \ldots, k_n$ aus n verschiedenen Kanten bestehen. Da unsere Folge $k_1, \ldots, k_n$ alternierend ist, gibt es, wenn nicht gleichzeitig $p_n = p_0$ und n gerade ist (d. h., wenn nicht bereits $k_1, \ldots, k_n$ ein alternierender Kreis ist), wegen $\gamma(p_n, E \cup K_1 - K_2) = \gamma(p_n, E \cup K_2 - K_1)$ eine in dem Kantenzug $k_1, \ldots, k_n$ nicht vorkommende, an p_n liegende Kante k_{n+1} mit $k_{n+1} \in K_1 - K_2$, falls $k_n \in K_2 - K_1$, mit $k_{n+1} \in K_2 - K_1$, falls $k_n \in K_1 - K_2$ gilt. Mit anderen Worten können wir unseren alternierenden Kantenzug $k_1, \ldots, k_n$, solange er sich nicht zu einem alternierenden Kreis schließt, noch um eine weitere Kante k_{n+1} verlängern. Da K_1 endlich ist, gibt es einen K_1, K_2 alternierenden Kreis Φ_1. Es sei $\check{\Phi}_1$ die Menge der in Φ_1 vorkommenden Kanten. Wir betrachten:

$$\overline{G}_1 = G_1 - \check{\Phi}_1, \quad \overline{G}_2 = G_2 - \check{\Phi}_1 .$$

Ist dann $\overline{G}_1 = \overline{G}_2$, d. h. $\check{\Phi}_1 = K_1 \cup K_2 - (K_1 \cap K_2)$, so erfüllt Φ_1 die Behauptung von Satz 1. Gilt dagegen $\overline{G}_1 \neq \overline{G}_2$, so liefert die obige Schlußweise einen bezüglich $\overline{G}_1, \overline{G}_2$ (daher auch bezüglich G_1, G_2) alternierenden Kreis Φ_2 in G, da $\overline{G}_1, \overline{G}_2, G$ die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllen. Da wir diese Schlußweise iterieren können, bis die gefundenen alternierenden Kreise sämtliche Kanten von $K_1 \cup K_2 - (K_1 \cap K_2)$ enthalten, folgt die Behauptung von Satz 1.

Ist Φ ein Kantenzug oder Kreis, so bezeichnen wir die Menge der Kanten von Φ mit $\check{\Phi}$. Es sei $G_1 = E \cup K_1$ ein Γ-Faktor von G. Wir denken uns jede Kante von K_1 rot, dagegen jede Kante von $G - K_1$ blau gefärbt. Ist dann Φ ein bezüglich $G_1, G - K_1$ alternierender Kreis in G, so ist auch $G_2 = E \cup \cup (K_1 - \check{\Phi}) \cup (\check{\Phi} - K_1)$ ein Γ-Faktor von G. Wir sagen dann, G_2 sei aus G_1 mittels einer *zyklischen Umfärbung* (von Φ) gewonnen. Satz 1 besagt dann, daß aus jedem Faktor G_1 von G mittels zyklischer Umfärbungen die ganze Äquivalenzklasse von G_1 gewonnen wird, wobei wir noch fordern können, daß diese zyklischen Umfärbungen jeweils sogar gleichzeitig in G (also nicht etwa nacheinander — das soll heißen, von G_1 zu G_1' mittels einer, usw. von $G_1^{(n)}$ zu G_2 mittels einer zyklischen Umfärbung) vorgenommen werden sollen.

§ 2. Einsgraphen

Wir denken uns eine endliche Menge E und hierauf eine (eindeutige) ganzzahlige, nicht negative Funktion Γ fest vorgegeben. Es sei $G = E \cup K$ ein Γ-teilbarer Graph. Sind dann zwei verschiedene Ecken $p \neq q$ von G durch mehr als $\mathrm{Min}(\Gamma(p), \Gamma(q))$ viele Kanten von G verbunden und entsteht $\overline{G}$ aus G

durch Streichung p, q verbindender Kanten von G bis auf genau $\mathrm{Min}(\Gamma(p), \Gamma(q))$ viele solcher Kanten, so ist $\overline{G}$ Γ-teilbar, da jeder Γ-Faktor höchstens $\mathrm{Min}(\Gamma(p), \Gamma(q))$ viele p, q verbindende Kanten benötigt. Es ist somit ohne Einfluß auf die Γ-Teilbarkeit bzw. Γ-Primität eines Graphen G, ob zwei verschiedene Ecken p, q von G durch $\mathrm{Min}(\Gamma(p), \Gamma(q))$ viele oder mehr Kanten verbunden sind. Wir sagen daher, G ist *zwischen* p, q $(p \neq q)$ *Γ-vollständig* (kurz: Γ_v), wenn p und q durch mindestens $\mathrm{Min}(\Gamma(p), \Gamma(q))$ viele Kanten von G verbunden sind. Dagegen sagen wir, G ist *zwischen* p, q $(p \neq q)$ *Γ-unvollständig* (kurz: Γ_{uv}), wenn die Anzahl der p, q verbindenden Kanten von G kleiner als $\mathrm{Min}(\Gamma(p), \Gamma(q))$ ist. Dann gilt:

Satz 2. *Man habe einen Graphen $G = E \cup K$ und Ecken $p_1, p_2, q_1, q_2 \in E$ mit $p_\nu \neq q_\mu$ für jedes $\nu = 1, 2$ und $\mu = 1, 2$ ($p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$, $p_1 = p_2$ und $q_1 = q_2$ zugelassen). G sei zwischen p_1, q_1 und zwischen p_1, q_2 Γ_v. K_p bzw. K_q seien elementfremde, endliche Mengen neuer (das soll heißen, nicht in G vorkommender) Kanten, wobei jede Kante von K_p p_1 mit p_2, jede Kante von K_q q_1 mit q_2 verbinden soll (im Falle $p_1 = p_2$ bzw. $q_1 = q_2$ also Schlingen).*

Ist dann G Γ-prim, so ist (wenigstens) einer der beiden Graphen $G \cup K_p$, $G \cup K_q$ Γ-prim[4]).

Beweis: Wir nehmen an, $G \cup K_p$ und $G \cup K_q$ seien Γ-teilbar, d. h. es existiere ein Γ-Faktor F_1 von $G \cup K_p$ und ein Γ-Faktor F_2 von $G \cup K_q$. Dann sind F_1 und F_2 Γ-Faktoren gemeinsam von $G \cup K_p \cup K_q$. Es ist also $F_1 \sim F_2$ in $G \cup K_p \cup K_q$. Ferner gilt:

$$F_1 \cap K_q = \Theta \quad \text{und} \quad F_2 \cap K_p = \Theta .$$

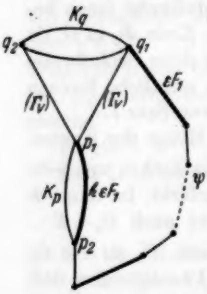

Fig. 1

Wäre $F_1 \cap K_p$ leer, so wäre F_1 wegen $F_1 \cap K_q = \Theta$ ein Γ-Faktor von G. Wir dürfen daher voraussetzen, daß eine Kante $k \in F_1 \cap K_p$ existiert. Dann gibt es nach Satz 1 in $G \cup K_p \cup K_q$ einen bezüglich F_1, F_2 alternierenden Kreis Φ durch k. Enthielte Φ keine Kante von K_q, so ergäbe sich mittels zyklischer Umfärbung von Φ aus F_1 ein Γ-Faktor $\overline{F}_1$ von $G \cup (K_p - k)$. Enthält dagegen Φ eine Kante von K_q, so gäbe es auf Φ einen in k beginnenden, bezüglich F_1, F_2 alternierenden Kantenzug Ψ, der in q_1 oder q_2 mit einer Kante von $F_1 - F_2$ endet und keine Kante mit K_q gemeinsam hat. Wir können annehmen, daß Ψ in q_1 endet. Da sowohl an p_1 als auch an q_1 je (mindestens) eine Kante von F_1 (nämlich k bzw. die letzte Kante von Ψ) liegt und G nach Voraussetzung zwischen p_1, q_1 Γ_v sein soll, können nicht sämtliche p_1, q_1 verbindende Kanten von G zu F_1 gehören. Daher gäbe es eine p_1, q_1 verbindende Kante $k' \in G - F_1$. Ψ mit k' zusammengenommen, würde einen bezüglich $F_1, G - F_1$ alternierenden Kreis Φ' in $G \cup K_p$ liefern. Mittels zyklischer Umfärbung von Φ' erhielten wir dann aus F_1 wiederum (wie im ersten Falle) einen Γ-Faktor $\overline{F}_1$ von $G \cup (K_p - k)$. Da K_p endlich ist, folgt durch Iteration, daß G Γ-teilbar ist. Wenn umgekehrt G

[4]) Unser Satz 2 ist eine Verallgemeinerung des Satzes 3 von [1].

Γ-prim ist, muß unsere Annahme, daß $G \cup K_p$ und $G \cup K_q$ Γ-teilbar sind, falsch sein. Also ist dann mindestens einer dieser beiden Graphen Γ-prim.

Ähnlich wie oben für zwei verschiedene Ecken $p \neq q$ von G ergibt sich für $p = q$, falls an dieser Ecke $\left[\frac{\Gamma(p)}{2}\right]$ $\left(\text{gleich größte ganze Zahl} \leq \frac{\Gamma(p)}{2}\right)$ viele Schlingen von G liegen, daß die Γ-Teilbarkeit bzw. Γ-Primität keine Änderung erleidet, sei es, daß wir G betrachten, oder sei es, daß wir an dieser Ecke p weiter (endlich viele) Schlingen zu G hinzufügen. Wir sagen daher, G ist *zwischen* p, p (oder kurz, *in* p) *Γ-vollständig* (kurz: Γ_v), wenn die Anzahl der an p liegenden Schlingen von G größer oder gleich $\left[\frac{\Gamma(p)}{2}\right]$ ist. Dagegen sagen wir, G ist *zwischen* p, p (kurz, *in* p) *Γ-unvollständig* (kurz: Γ_{uv}), wenn diese Anzahl kleiner als $\left[\frac{\Gamma(p)}{2}\right]$ ist. Soll ein Graph G auf Γ-Teilbarkeit oder Γ-Primität untersucht werden, so können wir also an je zwei Ecken p, q von G, zwischen denen G Γ_v ist, im Falle $p \neq q$, den über $\mathrm{Min}(\Gamma(p), \Gamma(q))$ hinausgehenden Überschuß p, q verbindender Kanten von G, bzw. im Falle $p = q$, den über $\left[\frac{\Gamma(p)}{2}\right]$ hinausgehenden Überschuß an p liegender Schlingen von G stets löschen. Sozusagen als Gegenstück von Satz 2 gilt:

Satz 3. *Man habe eine Kante $k \in G$ mit zwei verschiedenen Endpunkten $p \neq q$. G sei in p und in q Γ_v. K_{pq} sei eine endliche Menge neuer (d. h. nicht in G vorkommender), p mit q verbindender Kanten.*

Ist dann G Γ-prim, so ist auch $G \cup K_{pq}$ Γ-prim[5]).

Beweis: Wir nehmen an, $G \cup K_{pq}$ sei Γ-teilbar, d. h. es existiere ein Γ-Faktor F von $G \cup K_{pq}$. Wir können voraussetzen, daß F eine Kante $\bar{k}$ von K_{pq} enthält. Läge unser k nicht in F, so wäre $(F - \bar{k}) \cup k$ ein Γ-Faktor von $G \cup (K_{pq} - \bar{k})$. Liegt dagegen k in F, so gäbe es eine an p liegende Schlinge $k_p \in G - F$, da an p mindestens zwei Kanten (k und $\bar{k}$) von F anstoßen und G in p nach Voraussetzung Γ_v sein soll. Desgleichen gäbe es eine an q liegende Schlinge $k_q \in G - F$. $k, k_p, \bar{k}, k_q$ wäre dann ein F, $G - F$ alternierender Kreis. Mittels zyklischer Umfärbung dieses Kreises ergäbe sich aus F wiederum ein Γ-Faktor von $G \cup (K_{pq} - \bar{k})$. Durch Iteration folgt, daß G Γ-teilbar wäre. Wenn umgekehrt G Γ-prim ist, muß also (entgegen unserer Annahme) $G \cup K_{pq}$ Γ-prim sein.

Fig. 2

Wir nennen $G = E \cup K$ einen *Einsgraphen* bezüglich Γ (auch kurz einen Γ_v-Graphen), wenn G zwischen je zwei Ecken p, q von G (auch für $p = q$) Γ_v ist. Ist $G = E \cup K$ ein Einsgraph bezüglich Γ und ist dieser Graph Γ-prim, so sind alle Graphen (mit der Eckenmenge E) Γ-prim, da ja allgemein aus der Γ-Primität eines Graphen die Γ-Primität seiner sämtlichen Faktoren folgt. Es ist daher wichtig, zu wissen, welche Γ_v-Graphen Γ-prim sind. Es gilt:

Satz 4. *Ein Γ_v-Graph G ist dann und nur dann Γ-prim, wenn die Anzahl sämtlicher Ecken p von G mit ungeradem $\Gamma(p)$ ungerade ist*[6]).

[5]) Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des Satzes 6 von [1].

[6]) Unser Satz 4 enthält den Satz 10 von [1] als Spezialfall.

Beweis: E bestehe nur aus einer Ecke p. Ist $\Gamma(p)$ gerade und ist daher die Anzahl der an p liegenden Schlingen $\geqq \frac{\Gamma(p)}{2}$, so ist G Γ-teilbar. Ist dagegen $\Gamma(p)$ ungerade, so ist G Γ-prim. Für $|E| = 1$ ist also unser Satz richtig. Es sei nun $G = E \cup K$ ein Γ_v-Graph mit $|E| \geqq 2$ und wir nehmen an, die Behauptung von Satz 4 sei für sämtliche Einsgraphen mit einer Eckenanzahl $< |E|$ richtig. Wir setzen zunächst voraus, G sei Γ-teilbar, d. h. es existiere ein Γ-Faktor F von G. Wir betrachten eine (feste) Ecke $q \in E$. Dann denken wir uns in G und F die Ecke q samt sämtlicher an q liegenden Kanten gelöscht und bezeichnen die verbleibenden Graphen mit $\overline{G}$ und $\overline{F}$. Ferner sei $\overline{\Gamma}(p)$ für jedes $p \neq q$ aus E gleich der Differenz aus $\Gamma(p)$ und der Anzahl sämtlicher p, q verbindenden Kanten von F. Dann ist $\overline{F}$ ein $\overline{\Gamma}$-Faktor[7]) von $\overline{G}$. Nach Induktionsannahme ist die Anzahl sämtlicher $p \neq q$ von E mit ungeradem $\overline{\Gamma}(p)$ gerade. Daher ist die Summe aus der Anzahl sämtlicher an q liegenden, normalen Kanten von F und der Anzahl sämtlicher $p \neq q$ von E mit ungeradem $\Gamma(p)$ ebenfalls gerade. Hieraus folgt, daß die Anzahl sämtlicher $p \in E$ mit ungeradem $\Gamma(p)$ gerade ist. Nun umgekehrt setzen wir für unseren Γ_v-Graphen G voraus, daß die Anzahl sämtlicher $p \in E$ mit ungeradem $\Gamma(p)$ gerade sei. Gibt es ein $q \in E$ mit geradem $\Gamma(q)$, so existiert nach Induktionsannahme ein Γ-Faktor von $\overline{G}$[8]). Da $\Gamma(q)$ gerade und G in q Γ_v ist, liefert der Γ-Faktor von $\overline{G}$ mit den $\frac{\Gamma(p)}{2}$ an q liegenden Schlingen von G zusammengenommen einen Γ-Faktor von G. Wir können daher voraussetzen, daß $\Gamma(p)$ in jedem $p \in E$ ungerade ist. Da somit $|E|$ gerade ist, können wir E in $\frac{|E|}{2}$ Eckenpaare aufteilen und jedes dieser Paare (wegen $\Gamma \geqq 1$ und der Γ-Vollständigkeit von G) durch je eine Kante von G verbinden. Nehmen wir zu diesen Kanten noch an jeder Ecke $p \in E$ je $\left[\frac{\Gamma(p)}{2}\right]$ an p liegende Schlingen von G hinzu, so erhalten wir einen Γ-Faktor von G. Hieraus folgt mittels vollständiger Induktion Satz 4.

§ 3. Maximal Γ-prime Graphen

Wir denken uns eine endliche Menge E und hierauf ein Γ (fest) vorgegeben. Sämtliche Graphen $G = E \cup K$ (mit dem festen E) können wir uns, da wir im folgenden nur Graphen auf Γ-Teilbarkeit bzw. Γ-Primität untersuchen wollen, gemeinsam in einem Γ_v-Graphen $\hat{G} = E \cup \hat{K}$ (als gemeinsamen Obergraphen) eingebettet denken. Hierbei ist es am bequemsten, als $\hat{G}$ den „kleinsten" Γ_v-Graphen zu nehmen, worin also je zwei verschiedene Ecken p, q von E durch genau $\mathrm{Min}(\Gamma(p), \Gamma(q))$ Kanten verbunden sind und an jeder Ecke $p \in E$ je genau $\left[\frac{\Gamma(p)}{2}\right]$ Schlingen liegen. Die Menge sämtlicher Graphen $G = E \cup K$

[7]) Hier wird besonders deutlich, daß die Γ-Faktoren gegenüber den f-Faktoren (f = const) methodische Vorteile bieten.

[8]) Ist allgemein $G' = E' \cup K'$ ein Teilgraph von $G = E \cup K$ ($E' \subseteq E, K' \subseteq K$; also $E' \subset E$ zugelassen), so nennen wir einen Faktor F' von G' einen Γ-Faktor von G', wenn $\gamma(p, G') = \Gamma(p)$ in jedem $p \in E'$ gilt. — Das obige $\overline{G}$ soll dieselbe Bedeutung haben wie das $\overline{G}$ des ersten Teiles des Beweises.

(mit dem festen E) bildet mittels $\subseteq$ eine geordnete (d. h. teilweise geordnete) Menge A. Hierin bilden die Γ-primen Graphen eine geordnete Untermenge B. Das zu jedem $b \in B$ gehörende Anfangsstück von A liegt dann stets ganz in B, da sämtliche Faktoren eines Γ-primen Graphen stets wiederum Γ-prim sind. Wir nennen einen Graphen *maximal Γ-prim*, wenn er ein maximales Element der Menge B ist[9]). Da aus der Γ-Teilbarkeit eines Graphen die Γ-Teilbarkeit eines jeden seiner Obergraphen folgt, ergibt sich folgende Charakterisierung für maximal Γ-prime Graphen: Ein Graph $G = E \cup K$ ist dann und nur dann maximal Γ-prim, wenn er Γ-prim ist und für je zwei Ecken $p, q \in E$ (auch für $p = q$), falls G zwischen p, q Γ_{uv} ist, $G \cup k$ stets Γ-teilbar ist, wobei k eine neue (d. h. nicht in G liegende), p mit q verbindende Kante (also im Falle $p = q$ eine Schlinge an p) bedeuten soll. Ist die Anzahl sämtlicher $p \in E$ mit ungeradem $\Gamma(p)$ ungerade, so sind nach Satz 4 sämtliche Graphen $G = E \cup K$ Γ-prim; $\hat{G}$ ist dann der einzige maximal Γ-prime Graph. Wir können daher diesen Fall als den „trivialen" Fall bezeichnen. Ist dagegen die Anzahl sämtlicher $p \in E$ mit ungeradem $\Gamma(p)$ gerade und daher $\hat{G}$ nach Satz 4 Γ-teilbar, so ist jeder Γ-prime Graph $G = E \cup K$ ein echter Teilgraph von $\hat{G}$ (also mit $K \subset \hat{K}$).

Wir nennen eine Ecke p von $G = E \cup K$ einen *Γ-Häufungspunkt* von G, wenn G zwischen p und jedem $q \in E$ (auch für $q = p$) Γ_v ist. Zum Beispiel ist jede Ecke $p \in E$ mit $\Gamma(p) = 0$ ein Γ-Häufungspunkt von G. Wir nennen jede solche Ecke einen trivialen Γ-Häufungspunkt von G. Da wir den „kleinsten" Einsgraphen $\hat{G}$ bezüglich Γ genommen haben, sind die trivialen Γ-Häufungspunkte von $G \subseteq \hat{G}$ isolierte Ecken in G, d. h. Ecken, an die keine Kante von G anstößt. Wir bezeichnen die Menge sämtlicher Γ-Häufungspunkte von G (kurz) mit E^* und nennen den Graphen $G' = (E - E^*) \cup (K - K(E^*))$[10]) die *$\Gamma$-Ableitung* von G. Ferner bezeichnen wir die Menge sämtlicher Ecken $p \in E$, in denen G Γ_{uv} ist $\left(\text{d. h., in denen } \left[\frac{\Gamma(p)}{2}\right] \text{ größer als die Anzahl der an } p \text{ liegenden Schlingen von } G \text{ ist}\right)$, kurz mit E_{uv}. Wir nennen den Graphen $(E - (E^* \cup E_{uv})) \cup (K - K(E^* \cup E_{uv}))$ den *Γ_v-Rest* von G. Dieser entsteht also aus der Γ-Ableitung G' von G durch Löschung von E_{uv} samt sämtlicher hieran anliegenden Kanten von G'. Es gilt:

(3.1) *Ist G maximal Γ-prim, so ist jede Komponente des Γ_v-Restes von G ein Einsgraph*[11]).

---

[9]) Wir weichen hier in den Bezeichnungen von [1] und [3] ab. BELCK und TUTTE nennen diese Graphen (für $\Gamma = f = \text{const}$) hyper f-prim, hyperprim für $f = 1$.

[10]) Ist allgemein $G = E \cup K$ ein Graph und E_1 eine Teilmenge von E, so verstehen wir unter $K(E_1)$ die Menge derjenigen Kanten von G, die an wenigstens einer Ecke von E_1 anstoßen. Analog bedeute $E(K_1)$ ($K_1 \subseteq K$) die Menge der Endpunkte sämtlicher Kanten von K_1.

[11]) Wir nennen allgemein einen Teilgraphen $G_1 = E_1 \cup K_1$ von G ($E_1 \subseteq E, K_1 \subseteq K$; $E_1 \subset E$ zugelassen!) einen *Einsgraphen* (bezüglich Γ), wenn G zwischen je zwei Ecken $p, q \in E_1$ (auch für $p = q \in E_1$) Γ_v ist und K_1 sämtliche p, q verbindenden Kanten von G für je zwei Ecken $p, q \in E_1$ (auch für $p = q \in E_1$) enthält. K_1 besteht dann (genau) aus diesen Kanten (und Schlingen) von G.

Beweis: Es sei $G_1 = E_1 \cup K_1$ eine Komponente des Γ_v-Restes von G. Zunächst ist G in jeder Ecke $q \in E_1$, da der Γ_v-Rest von G keine Ecke von E_{uv} enthält, Γ_v, und sämtliche an q liegenden Schlingen von G gehören zu G_1. Sind q_1, q_2 zwei Ecken von G_1 mit einem Abstande 1 in G_1[12]), so ist G, da es maximal Γ-prim ist, nach Satz 3 zwischen q_1, q_2 Γ_v, und sämtliche q_1, q_2 verbindenden Kanten von G gehören zu G_1. Nun seien q_1, q_2 zwei Ecken von G_1 mit einem Abstande $|q_1, q_2| = n \geqq 2$ in G_1 und es sei angenommen, daß G zwischen je zwei Ecken von G_1 mit einem Abstande $< n$ in G_1 Γ_v ist. Dann gibt es einen q_1, q_2 verbindenden Kantenzug in G_1 mit der Länge n und daher nach Induktionsannahme eine Ecke $p_1 \neq q_1, q_2$ auf diesem Kantenzuge derart, daß G zwischen p_1, q_1 und zwischen p_1, q_2 Γ_v ist. Wegen $p_1 \notin E^*$ ist G zwischen p_1 und (wenigstens) einer Ecke $p_2 \in E$ Γ_{uv}. Da G maximal Γ-prim ist, folgt aus Satz 2, daß G auch zwischen q_1, q_2 Γ_v ist. Da q_1 und q_2 in derselben Komponente G_1 des Γ_v-Restes von G liegen, gehören sämtliche q_1, q_2 verbindenden Kanten von G zu G_1. Hieraus folgt durch vollständige Induktion, daß G_1 ein Einsgraph ist.

(3.2) *Ist $G = E \cup K$ ein maximal Γ-primer Graph mit $E^* \neq E$ und $E_{uv} = \Theta$, so besitzt die Γ-Ableitung von G mindestens zwei Komponenten.*

Beweis: Wegen $E^* \neq E$ ist die Γ-Ableitung G' von G nicht leer. Es gibt daher (mindestens) eine Komponente G_1 von G'. Es sei $p \in G_1$. Wegen $p \notin E^*$ gibt es ein $q \in E$, so daß G zwischen p, q Γ_{uv} ist. Nach (3.1) liegt dann aber q nicht in G_1, also wegen $q \notin E^*$ in einer von G_1 verschiedenen Komponente von G'.

(3.3) *Ist $G = E \cup K$ maximal Γ-prim, so ist G zwischen $p, q \in E - E^*$ dann und nur dann Γ_v, wenn p und q in derselben Komponente des Γ_v-Restes von G liegen.*

Beweis: Zunächst setzen wir voraus, G sei zwischen $p, q \in E - E^*$ Γ_v. Im Falle $p = q$ liegt diese Ecke im Γ_v-Rest von G und daher in derselben Komponente des Γ_v-Restes. Wir können $p \neq q$ voraussetzen. Wäre G in p (analog für q) Γ_{uv}, so wäre q nach Satz 2 ein Γ-Häufungspunkt von G im Widerspruch zu $q \notin E^*$. Also liegen p und q im Γ_v-Rest von G. Da Γ in p und q ungleich 0 ist (sonst wäre ja p bzw. q ein trivialer Γ-Häufungspunkt) und daher p, q durch mindestens eine Kante von G verbunden ist, liegen p und q in derselben Komponente des Γ_v-Restes von G. Liegen umgekehrt p, q in derselben Komponente des Γ_v-Restes von G, so ist G zwischen p, q nach (3.1) Γ_v.

Der folgende Satz gibt eine genaue Übersicht über sämtliche (nicht trivialen) maximal Γ-primen Graphen mit leerem E_{uv}.

Satz 5. *Ein Graph $G = E \cup K$ mit nicht leerer Γ-Ableitung*[13]) *G' und leerem E_{uv} ist dann und nur dann maximal Γ-prim, wenn er folgende Eigenschaften hat:*

---

[12]) Ist allgemein $G = E \cup K$ ein Graph und $k_1, \ldots, k_n$ ein Kantenzug in G, so heiße n die Länge dieses Kantenzuges. Wir sagen, $p, q \in E$ haben den Abstand $|p, q| = 0$ in G dann und nur dann, wenn $p = q$ gilt. Wir sagen, $p \neq q \in E$ haben den Abstand $|p, q| = \infty$ in G, wenn es keinen p, q verbindenden Kantenzug in G gibt. Gibt es dagegen einen $p, q \in E$ $(p \neq q)$ verbindenden Kantenzug in G, so verstehen wir unter dem Abstande $|p, q|$ in G die Minimallänge der p, q verbindenden Kantenzüge in G. Man sieht leicht, daß unsere $|p, q|$ die drei Axiome einer Metrik erfüllen.

[13]) Das heißt, es soll nicht der triviale Fall $E^* = E$ vorliegen (vgl. Satz 4).

1. *Jede Komponente von G' ist ein Einsgraph,*
2. *Die Anzahl sämtlicher Ecken p mit ungeradem $\Gamma(p)$ ist in jeder Komponente von G' ungerade,*
3. *Die Anzahl σ der Komponenten von G' ist gleich:*

$$\sigma = 2 + \sum_{p \in E^*} \Gamma(p)^{14)}.$$

Beweis: Wir setzen zunächst voraus, G sei maximal Γ-prim. Wegen $E_{uv} = \Theta$ ist der Γ_v-Rest von G gleich der Ableitung G' von G. Daher folgt Behauptung 1 aus (3.1). Aus (3.2) folgt ferner $\sigma \geqq 2$. Es gibt daher zwei Komponenten G_1', G_2' von G'.

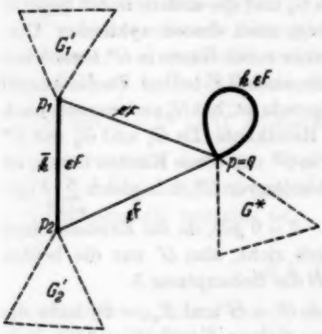

Fig. 3

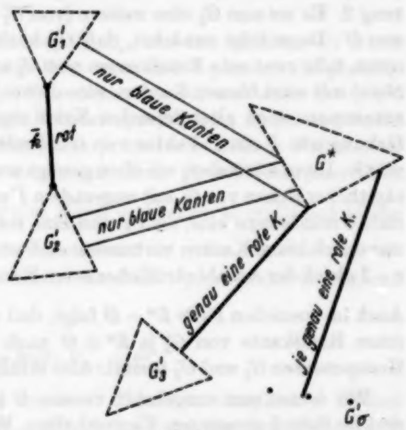

Fig. 4

Wir verbinden eine Ecke $p_1 \in G_1'$ mit einer Ecke $p_2 \in G_2'$ durch eine neue (d. h. nicht in G liegende) Kante $\bar{k}$. Dann gibt es wegen (3.3) einen Γ-Faktor F von $G \cup \bar{k}$. Wir denken uns sämtliche Kanten von F rot, dagegen die Kanten von $G - F$ blau gefärbt. $\bar{k}$ ist dann rot, da sonst G Γ-teilbar wäre. Wären zwei Ecken $p, q \in E^*$ ($p = q$ zugelassen) durch eine rote Kante k verbunden, so gäbe es, da G zwischen p, p_1 und zwischen q, p_2 Γ_v ist, eine blaue p, p_1 verbindende und eine blaue q, p_2 verbindende Kante von G. Diese beiden blauen Kanten würden zusammen mit k und $\bar{k}$ einen alternierenden Kreis durch $\bar{k}$ liefern und nach zyklischer Umfärbung dieses Kreises ergäbe sich aus F ein Γ-Faktor von G. Die Ecken von E^* sind also miteinander nur durch blaue Kanten verbunden[15]).

---

[14]) Hierin bedeute im Falle $E^* = \Theta$ diese Summe 0. Zusammen mit (3.1) folgt daher, daß es in einem maximal Γ-primen Graphen G mit $E_{uv} = \vartheta$ dann und nur dann eine Ecke p mit $\gamma(p, G) < \Gamma(p)$ gibt, wenn entweder die obige Summe gleich 0 ist und gleichzeitig mindestens eine der beiden Komponenten von G' nur eine Ecke besitzt oder $\Gamma(p) \neq 0$ für genau eine Ecke $p \in G$ gilt und G ein Einsgraph (bezüglich Γ) ist. — Unser Satz 5 enthält Satz 14 von [1] als Spezialfall.

[15]) Bezeichnen wir den Graphen, der aus E^* und sämtlichen Kanten (einschl. Schlingen) von G besteht, die Ecken aus E^* verbinden, als den *Γ-Kern* G^* von G, so enthält G^* also nur blaue Kanten. G^* ist ein Einsgraph (bezüglich Γ).

Analog folgt, daß es mit Ausnahme von $\bar{k}$ nur blaue Randkanten[16]) von G_1' und G_2' gibt. Denn wäre eine Ecke $p \in G_1'$ mit einer Ecke $q \in E^*$ durch eine rote Kante k verbunden, so gäbe es wiederum (analog wie oben) eine blaue p, p_1 verbindende und eine blaue q, p_2 verbindende Kante und diese beiden Kanten würden mit $k, \bar{k}$ zusammen einen alternierenden Kreis durch $\bar{k}$ ergeben. Daher hat G_1' (und analog G_2') nur eine rote Randkante (und zwar $\bar{k}$). Hieraus folgt nach Satz 4, da $F \cap G_1'$ für $\boldsymbol{\Gamma}(p_1) = \Gamma(p_1) - 1$ ($\boldsymbol{\Gamma} = \Gamma$ sonst) ein $\boldsymbol{\Gamma}$-Faktor von G_1' ist, daß die Anzahl sämtlicher Ecken von G_1' mit ungeradem Γ ungerade ist. Da G_1' eine beliebig wählbare Komponente von G' war, erfüllt G die Behauptung 2. Es sei nun G_3' eine weitere (von G_1' und G_2' verschiedene) Komponente von G'. Dann folgt zunächst, daß G_3' höchstens eine rote Randkante hat, da sonst, falls zwei rote Randkanten von G_3' existieren würden, diese (analog wie oben) mit zwei blauen Kanten, eine davon in G_3' und die andere in G^* liegend, zusammen einen alternierenden Kreis ergäben, nach dessen zyklischer Umfärbung aus F ein Γ-Faktor von $G \cup \bar{k}$ mit einer roten Kante in G^* resultieren würde. Dann wäre aber, wie oben gezeigt wurde, auch G Γ-teilbar. Da die Anzahl sämtlicher Ecken von G_3' mit ungeradem Γ ungerade ist, hat G_3' andererseits nach Satz 4 mindestens eine, also genau eine rote Randkante. Da G_1' und G_2' mit G^* nur durch blaue Kanten verbunden sind und in G^* nur blaue Kanten liegen, ist $\sigma - 2$ gleich der Anzahl sämtlicher roten Randkanten von G^*, d. h. gleich $\sum_{p \in E^*} \Gamma(p)$. Auch im speziellen Falle $E^* = \Theta$ folgt, daß $\sigma - 2 = 0$ gilt, da die Existenz einer roten Randkante von G_3' ja $E^* \neq \Theta$ nach sich zieht, also G' nur die beiden Komponenten G_1' und G_2' besitzt. Also erfüllt G die Behauptung 3.

Wir setzen nun umgekehrt voraus, G (mit $G' \neq \Theta$ und $E_{uv} = \Theta$) habe die drei im Satz 5 genannten Eigenschaften. Wäre G dann Γ-teilbar, so hätte jede Komponente G_ν' ($\nu = 1, \ldots, \sigma$) von G' nach Satz 4 zufolge der Eigenschaften 1 und 2 mindestens eine rote Randkante, woraus $\sigma \leqq \sum_{p \in E^*} \Gamma(p)$ folgen würde entgegen der Eigenschaft 3. Es ist G also Γ-prim. Wir wollen zeigen, G ist maximal Γ-prim. Hierzu sei $\bar{k}$ eine neue (d. h. nicht in G liegende) Kante, die eine Ecke $p_1 \in G_1'$ mit einer Ecke $p_2 \in G_2'$ verbinde. Gilt zunächst $\sum_{p \in E^*} \Gamma(p) = 0$, also $\sigma = 2$, so finden wir mit Hilfe von Satz 4, wenn wir $\boldsymbol{\Gamma}(p_\nu) = \Gamma(p_\nu) - 1$ ($\nu = 1, 2$) und sonst $\boldsymbol{\Gamma} = \Gamma$ setzen — hierbei ist zu beachten, daß jedes p mit $\Gamma(p) = 0$ in E^* liegt, also tatsächlich $\boldsymbol{\Gamma}(p_\nu) \geqq 0$ folgt —, in G_1' einen $\boldsymbol{\Gamma}$-Faktor von G_1' und analog in G_2' einen $\boldsymbol{\Gamma}$-Faktor von G_2', die beide mit $\bar{k}$ zusammengefaßt einen Γ-Faktor von $G \cup \bar{k}$ ergeben. Ist dagegen $\sum_{p \in E^*} \Gamma(p) > 0$, also $\sigma \geqq 3$, so wählen wir in jedem G_ν', $\nu = 3, \ldots, \sigma$, eine Ecke p_ν. Es sei $E^* = \{p_1^*, \ldots, p_l^*\}$. Für jedes p_λ^* mit $\Gamma(p_\lambda^*) \neq 0$ ($\lambda = 1, \ldots, l$) und jedes p_ν ($\nu = 3, \ldots, \sigma$) gibt es wegen $\mathrm{Min}(\Gamma(p_\lambda^*), \Gamma(p_\nu)) \geqq 1$ eine p_λ^*, p_ν verbindende Kante in G. Wir können daher für jede Ecke p_ν ($\nu = 3, \ldots, \sigma$) eine Kante von G aussuchen und rot färben, die dieses p_ν jeweils mit demjenigen $p_\lambda^* \in E^*$ ver-

[16]) Ist allgemein G_1 ein Teilgraph von G, so heißen diejenigen (normalen) Kanten von G, die eine Ecke von G_1 mit einer Ecke von $G - G_1$ verbinden, Randkanten von G_1.

binden soll, dessen λ entweder $\nu - 2 \leqq \Gamma(p_\lambda^*)$ und $\Gamma(p_\mu^*) = 0$ für jedes $\mu < \lambda$ oder aber $\sum_{\mu=1}^{\lambda-1} \Gamma(p_\mu^*) < \nu - 2 \leqq \sum_{\mu=1}^{\lambda} \Gamma(p_\mu^*)$ erfüllt. Wegen Eigenschaft 3 liegt dann an jedem $p_3, \ldots, p_\sigma$ je eine rote Kante und an jedem $p_\lambda^* \in E^*$ liegen je $\Gamma(p_\lambda^*)$ rote Kanten. Setzen wir $\bar{\Gamma}(p_\nu) = \Gamma(p_\nu) - 1$ in jedem $p_1, \ldots, p_\sigma$ und $\bar{\Gamma} = \Gamma$ sonst, so gibt es weiter nach Satz 4 zufolge der Eigenschaften 1 und 2 in jedem G'_ν $(\nu = 1, \ldots, \sigma)$ einen $\bar{\Gamma}$-Faktor von G'_ν. Denken wir uns weiter dann sämtliche Kanten dieser $\bar{\Gamma}$-Faktoren und auch noch $\bar{k}$ rot gefärbt, so ergeben alle roten Kanten zusammengefaßt einen Γ-Faktor von $G \cup \bar{k}$. Also ist G maximal Γ-prim.

Da im Falle $\Gamma(p) = \text{const} = 1$ notwendig E_{uv} leer ist, erhalten wir durch Satz 5 folgende Übersicht über sämtliche maximal 1-primen Graphen[17]): *Werden l Ecken: $E^* = \{p_1^*, \ldots, p_l^*\}$ ($E^* = \Theta$ zugelassen) und weiter $\sigma = l + 2$ zu E^* und untereinander elementfremde Eckenmengen $E'_1, \ldots, E'_\sigma$ mit ungeraden $|E'_\nu|$ $(\nu = 1, \ldots, \sigma)$ gewählt und werden dann je zwei verschiedene Ecken eines jeden E'_ν $(\nu = 1, \ldots, \sigma)$ miteinander sowie jede Ecke $p_\lambda^* \in E^*$ mit jeder Ecke $q \neq p_\lambda^*$ aus $E = E^* \cup \bigcup_{\nu=1}^{\sigma} E'_\nu$ durch je eine Kante verbunden, so ergibt sich hierbei stets ein maximal 1-primer Graph, und umgekehrt ist jeder maximal 1-prime Graph $G \subset \hat{G}$ ein solcher Graph; $\hat{G}$ ist hierbei maximal 1-prim genau dann, wenn seine Eckenanzahl ungerade ist.*

§ 4. Der Fall: $E_{uv} \neq \Theta$

Wir nennen eine Ecke p eines maximal Γ-primen Graphen G *kritisch* (vgl. [1], S. 230, oben), wenn $p \in E_{uv}$ gilt, d. h., wenn die Anzahl der an p liegenden Schlingen von G kleiner als $\left[\frac{\Gamma(p)}{2}\right]$ ist. Löschen wir an einer kritischen Ecke q eine Schlinge aus oder fügen wir umgekehrt eine neue Schlinge bei q zu G hinzu, so können wir fragen, ob der abgeänderte Graph bezüglich eines in q entsprechend abgeänderten $\bar{\Gamma}$ wieder maximal $\bar{\Gamma}$-prim ist. Es gilt:

Satz 6. *Es sei $G = E \cup K$ maximal Γ-prim und $q \in E_{uv}$.*

Ist $\bar{k}$ eine Schlinge von G an q und setzen wir $\bar{\Gamma}(q) = \Gamma(q) - 2$, $\bar{\Gamma}(p) = \Gamma(p)$ in jedem $p \neq q$ von E, dann ist $G - \bar{k}$ maximal $\bar{\Gamma}$-prim. Fügen wir umgekehrt an q eine (neue) Schlinge $\bar{k}$ zu G hinzu und setzen $\bar{\Gamma}(q) = \Gamma(q) + 2$, $\bar{\Gamma}(p) = \Gamma(p)$ in jedem $p \neq q$ von E, so ist $\bar{G} = G \cup \bar{k} \cup K_q$ maximal $\bar{\Gamma}$-prim, wobei noch q mit jedem $p \in E^*$ durch jeweils $\mathrm{Min}(\Gamma(p), \bar{\Gamma}(q)) - \mathrm{Min}(\Gamma(p), \Gamma(q))$ *viele neue Kanten (also 0, 1 oder 2 neue Kanten jeweils) verbunden werde und K_q die Menge dieser neuen Kanten bedeute*[18]).

---

[17]) Wir erinnern daran, daß wir uns, wie im ersten Abschnitt des § 3 gezeigt wurde, auf die Betrachtung von Graphen $G \subseteq \hat{G}$ beschränken konnten. Im obigen Spezialfall $\Gamma = 1$ hat demnach G weder Schlingen noch Doppelkanten (Kanten mit denselben Endpunkten).

[18]) Diese Hinzunahme von K_q bewirkt, daß G zwischen q und jedem $p \in E^*$ $\bar{\Gamma}_\nu$ ist. Kurz gesagt, muß also nur die $\bar{\Gamma}$-Vollständigkeit zwischen q und E^* gewahrt bleiben. Dieses geht im ersten Teile von Satz 6 dagegen ohnehin in Erfüllung.

Beweis: Wir beweisen zunächst den ersten Teil des Satzes. $G - \bar{k}$ ist $\boldsymbol{\Gamma}$-prim, da G sonst Γ-teilbar wäre. k_1 sei eine Schlinge an q, die nicht in G liegen soll. Da G maximal Γ-prim ist, gibt es einen Γ-Faktor F_1 von $G \cup k_1$ mit $\bar{k} \in F_1$. Daher ist $F_1 - \bar{k}$ ein $\boldsymbol{\Gamma}$-Faktor von $(G - \bar{k}) \cup k_1$. Nun sei $G - \bar{k}$ zwischen $p_1, p_2 \in E$ $\boldsymbol{\Gamma}_{uv}$. Dann ist G zwischen p_1, p_2 Γ_{uv}. Ist daher k_2 eine neue (d.h. nicht in $G - \bar{k}$ liegende) Kante, die p_1, p_2 verbinde, so gibt es einen Γ-Faktor F_2 von $G \cup k_2$. Der Fall $k_2 = k_1$ ist erledigt. Wir können daher annehmen, daß k_2 keine Schlinge an q sei. Dann gibt es nach Satz 1 einen F_1, F_2 alternierenden Kreis Φ in $G \cup k_1 \cup k_2$ mit $k_1, k_2 \in \Phi$. Da jede an q liegende Schlinge von $G \cup k_1$ notwendig in F_1 liegt, gibt es auf Φ einen F_1, F_2 alternierenden Kreis Φ', der nur eine Schlinge an q, und zwar k_1, enthält. Mittels zyklischer Umfärbung von Φ' ergibt sich aus F_1 ein Γ-Faktor F von $G \cup k_2$ mit $\bar{k} \in F$. Folglich ist $F - \bar{k}$ ein $\boldsymbol{\Gamma}$-Faktor von $(G - \bar{k}) \cup k_2$. Also ist $G - \bar{k}$ maximal $\boldsymbol{\Gamma}$-prim. Zum zweiten Teile von Satz 6 zeigen wir zunächst, daß $\overline{G}$ $\boldsymbol{\Gamma}$-prim ist. Hätte $\overline{G}$ einen $\boldsymbol{\Gamma}$-Faktor, so würde dieser, da G Γ-prim ist, nicht $\bar{k}$ enthalten. Es gäbe daher einen $\boldsymbol{\Gamma}$-Faktor $\overline{F}_1$ von $\overline{G} - \bar{k}$. Ist $\bar{\bar{k}}$ eine nicht in $\overline{G}$ liegende Schlinge an q, so gäbe es weiter, weil G maximal Γ-prim ist, einen $\boldsymbol{\Gamma}$-Faktor $\overline{F}_2$ von $\overline{G} \cup \bar{\bar{k}}$ mit $\bar{k}, \bar{\bar{k}} \in \overline{F}_2$. Nach Satz 1 würde ein $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ alternierender Kreis Φ existieren mit $\bar{k} \in \Phi$ und $\bar{\bar{k}} \notin \Phi$. Mittels zyklischer Umfärbung von Φ ergäbe sich dann aber aus $\overline{F}_2$ ein $\boldsymbol{\Gamma}$-Faktor $\overline{F}$ mit $\bar{k} \notin \overline{F}$ und $\bar{\bar{k}} \in \overline{F}$. Folglich wäre $\overline{F} - \bar{\bar{k}}$ ein Γ-Faktor von $G \cup K_q$. Da die Kanten von K_q nur solche Ecken verbinden, zwischen denen G bereits Γ_v ist, wäre G Γ-teilbar. $\overline{G}$ ist demnach $\boldsymbol{\Gamma}$-prim. Nun habe man zwei Ecken $p_1, p_2 \in E$ und $\overline{G}$ sei zwischen diesen $\boldsymbol{\Gamma}_{uv}$. Dann ist G nach (3.3) und Konstruktion von $\overline{G}$ zwischen p_1, p_2 Γ_{uv}. Ist daher k eine neue (d. h. nicht in $\overline{G}$ liegende), p_1, p_2 verbindende Kante, so gibt es einen Γ-Faktor F von $G \cup k$. Dann ist $F \cup \bar{k}$ ein $\boldsymbol{\Gamma}$-Faktor von $\overline{G} \cup k$. Also ist $\overline{G}$ maximal $\boldsymbol{\Gamma}$-prim.

Da wir den ersten Teil von Satz 6 sukzessive auf sämtliche an kritischen Ecken liegende Schlingen von G anwenden können, sehen wir, daß wir (kurz gesagt) sämtliche Schlingen an sämtlichen kritischen Ecken eines maximal Γ-primen Graphen bei gleichzeitiger entsprechender Abänderung (Herabsetzung) von Γ abbauen können. Für Doppelkanten gilt analog:

Satz 7. *Es sei $G = E \cup K$ maximal Γ-prim. Man habe zwei verschiedene Ecken $p_1, p_2 \in E$ und G sei zwischen diesen Γ_{uv}.*

Sind dann p_1, p_2 durch (mindestens) zwei Kanten $k, \bar{k} \in G$ verbunden und setzen wir $\boldsymbol{\Gamma}(p_\nu) = \Gamma(p_\nu) - 1$ $(\nu = 1, 2)$ und $\boldsymbol{\Gamma}(p) = \Gamma(p)$ in jedem $p \neq p_1, p_2$ aus E, so ist $\overline{G} = G - \bar{k}$ maximal $\boldsymbol{\Gamma}$-prim.

Ist p_1, p_2 durch (mindestens) eine Kante $k \in G$ verbunden, fügen wir dann eine neue (d. h. nicht in G liegende), p_1, p_2 verbindende Kante $\bar{k}$ zu G hinzu und setzen wir $\boldsymbol{\Gamma}(p_\nu) = \Gamma(p_\nu) + 1$ $(\nu = 1, 2)$ und $\boldsymbol{\Gamma}(p) = \Gamma(p)$ in jedem $p \neq p_1, p_2$ aus E, so ist $\overline{G} = G \cup \bar{k} \cup K_{p_1} \cup K_{p_2}$ maximal $\boldsymbol{\Gamma}$-prim, wobei p_ν noch mit denjenigen $p \in E$ durch je eine neue (d. h. nicht in G liegende) Kante verbunden werde, für die G zwischen p, p_ν Γ_v aber nicht $\boldsymbol{\Gamma}_v$ ist, und K_{p_ν} $(\nu = 1, 2)$ die Menge dieser neuen Kanten bedeute.

Beweis: Im ersten Teile von Satz 7 folgt zunächst, $\overline{G}$ ist Γ-prim, da sonst G Γ-teilbar wäre. Wir wollen zeigen, $\overline{G}$ ist maximal Γ-prim. Hierzu sei k_1 eine nicht in G liegende, p_1 mit p_2 verbindende (neue) Kante. Da G zwischen p_1, p_2 Γ_{uv} ist, gibt es einen Γ-Faktor F_1 von $G \cup k_1$, der, da G maximal Γ-prim ist, sämtliche p_1, p_2 verbindenden Kanten von $G \cup k_1$ enthält. Es gilt daher:

$$k, \bar{k}, k_1 \in F_1 .$$

Nun habe man zwei Ecken $p, q \in E$ und $\overline{G}$ sei zwischen diesen Γ_{uv}. Dann ist G zwischen p, q Γ_{uv}. Ist daher k_2 eine neue (d. h. nicht in G liegende), p, q verbindende Kante, so gibt es einen Γ-Faktor F_2 von $G \cup k_2$ mit

$$k_2 \in F_2 .$$

Im Falle $k_2 = k_1$ ist $F_1 - \bar{k}$ ein Γ-Faktor von $\overline{G} \cup k_2$. Wir können daher annehmen, daß k_2 nicht p_1, p_2 verbindet. Dann gibt es nach Satz 1 einen F_1, F_2 alternierenden Kreis Φ in $G \cup k_1 \cup k_2$ durch k_1 und k_2. Φ enthält nicht beide Kanten k und $\bar{k}$, da sonst ein F_1, F_2 alternierender Kreis Φ' auf Φ existieren würde, der nicht k_1 enthielte und durch mindestens eine p_1, p_2 verbindende Kante von G hindurchginge und deshalb nach zyklischer Umfärbung von Φ' einen Γ-Faktor von G liefern würde. Mittels zyklischer Umfärbung von Φ ergibt sich daher aus F_1 ein Γ-Faktor F von $G \cup k_2$, der k oder $\bar{k}$ enthält. Da wir die beiden Kanten $k, \bar{k}$ miteinander vertauschen könnten, falls F nicht $\bar{k}$ enthielte, dürfen wir $\bar{k} \in F$ annehmen. Dann ist $F - \bar{k}$ ein Γ-Faktor von $\overline{G}$. Also ist $\overline{G}$ maximal Γ-prim. Der letzte Teil von Satz 7 kann analog wie der letzte Teil von Satz 6 bewiesen werden.

Wir wollen nun den Aufbau maximal Γ-primer Graphen, deren E_{uv} nicht leer sein soll, näher untersuchen. Hierbei gehen wir analog wie in [1] (S. 242ff.) vor. Es sei $G = E \cup K$ maximal Γ-prim mit $E_{uv} \neq \Theta$. Wir betrachten eine (feste) Ecke $p_0 \in E_{uv}$ und eine neue (nicht in G liegende) Schlinge k_0 an p_0. Dann gibt es einen Γ-Faktor F von $G \cup k_0$ ($k_0 \in F$). Im folgenden bedeute das Wort alternierend (ohne Zusatz) stets F, $G - F$ alternierend. Wir denken uns sämtliche Kanten von F rot, dagegen die Kanten von $G - F$ blau gefärbt. k_0 ist also rot gefärbt. Wir sagen, eine Ecke $p \in G$ sei *rot* bzw. *blau erreichbar*, wenn es einen bei p_0 mit einer blauen Kante beginnenden und in p mit einer roten bzw. blauen Kante endenden, alternierenden Kantenzug in $G \cup k_0$ gibt[19]). Wir sagen, p ist *nur-rot* bzw. *nur-blau erreichbar*, wenn p rot aber nicht blau bzw. blau aber nicht rot erreichbar ist. p heiße *doppelt erreichbar*, wenn es sowohl rot als auch blau erreichbar ist.

Dann gilt[20]):

(4.1) *Jeder Γ-Häufungspunkt p von G (d. h. $p \in E^*$) ist nur-blau erreichbar.*

(4.2) *Jede Ecke p des Γ_v-Restes von G (d. h. $p \in E - (E^* \cup E_{uv})$) ist doppelt erreichbar.*

---

[19]) Die betrachteten alternierenden Kantenzüge sollen also immer bei dem festen p_0 und zwar daselbst immer mit einer blauen Kante beginnen.

[20]) Die folgenden Sätze (4.1), (4.2), (4.3) können völlig analog wie die Sätze 16, 17, 18 in [1] bewiesen werden. Wir übergehen daher hier die Beweise. Jedoch muß es in Satz 18 (vgl. [1], S. 243) richtig heißen: Jeder von P verschiedene kritische Punkt .... Entsprechend muß in (4.3) daher $p \neq p_0$ vorausgesetzt werden.

(4.3) *Jede kritische Ecke $p \neq p_0$ (d. h. $p \in E_{uv} - p_0$) ist nur-rot erreichbar.*

Weiter gilt:

(4.4) *Jeder alternierende Kantenzug, der bei einer Ecke $p \in E_{uv}$ mit einer blauen Kante beginnt und in einem $q \in E_{uv}$ endet ($p = q$ zugelassen), endet mit einer roten Kante.*

Beweis: Wir nehmen an, Ψ sei ein alternierender Kantenzug, der bei $p \in E_{uv}$ mit einer blauen Kante beginnt und mit einer blauen Kante in $q \in E_{uv}$ endet. Dann ist (mindestens) eine der beiden Ecken p, q von p_0 verschieden, da sonst Ψ mit k_0 zusammengenommen ein alternierender Kreis wäre, nach dessen zyklischer Umfärbung sich aus F ein Γ-Faktor von G ergäbe. Wir können daher $p \neq p_0$ voraussetzen. Dann gibt es nach (4.3) einen alternierenden Kantenzug Ψ', der in p_0 mit einer blauen Kante beginnt und mit einer roten Kante in p endet. Betrachten wir auf Ψ' (von p_0 aus gerechnet) die erste gemeinsame Ecke von Ψ' mit Ψ, so könnten wir von hier aus auf Ψ weiter alternierend unseren Gang entweder nach p oder nach q fortsetzen und kämen daher in p oder q mit einer blauen Kante an, im Widerspruch zu (4.3) bzw. zum ersten Teile dieses Beweises. Jeder alternierende Kantenzug, der bei einem $p \in E_{uv}$ mit einer blauen Kante beginnt und in einem $q \in E_{uv}$ endet, muß daher mit einer roten Kante enden.

Wir bezeichnen mit G_{uv} denjenigen Teilgraphen von G, der aus E_{uv} und sämtlichen Kanten (einschl. Schlingen) von G besteht, deren Endpunkte beide in E_{uv} liegen. Weiter gilt:

(4.5) *In G_{uv} gibt es nur rote, in G^* nur blaue Kanten.*

Der erste Teil von (4.5) folgt aus (4.4); der letzte Teil folgt mit Hilfe eines analogen Schlusses wie im ersten Teile des Beweises von Satz 5.

Ferner gilt:

(4.6) *Es sei k_r eine rote Kante, die unser p_0 mit einer Ecke $p_0^* \in E^*$ verbinde. Ist dann $\bar{p}$ eine neue (nicht in G liegende) Ecke und setzen wir $\bar{\Gamma}(\bar{p}) = 1$, $\bar{\Gamma}(p_0) = \Gamma(p_0) - 1$, $\bar{\Gamma}(p) = \Gamma(p)$ in jedem $p \neq p_0$ aus E, so ist der Graph $\bar{G} = G \cup \bar{p} \cup \bar{K}$ maximal $\bar{\Gamma}$-prim, wobei $\bar{p}$ mit jeder Ecke von E^* durch je eine neue (nicht in G liegende) Kante verbunden werde und $\bar{K}$ die Menge dieser neuen Kanten bedeute*[21]).

Beweis: Zunächst folgt, daß $\bar{G}$ $\bar{\Gamma}$-prim ist, da ein $\bar{\Gamma}$-Faktor von $\bar{G}$ mittels Identifizierung von $\bar{p}$ und p_0 in G einen Γ-Faktor von G liefern würde. Nun sei k_1 eine neue (nicht in G liegende) Kante, zwischen deren Endpunkte $\bar{G}$ $\bar{\Gamma}_{uv}$ sei. Verbindet k_1 die Ecken $\bar{p}, p_0$, so ist $(F - k_0) \cup \bar{p} \cup k_1$ ein $\bar{\Gamma}$-Faktor von $\bar{G} \cup k_1$. Verbindet k_1 die Ecke $\bar{p}$ mit einer Ecke $q \in E - E^*$ ($q \neq p_0$), so denken wir uns p_0 mit q durch eine neue Kante k_2 verbunden. Da G nach (3.3) zwischen p_0 und q Γ_{uv} ist, gibt es einen Γ-Faktor F_2 von $G \cup k_2$ und daher

[21]) Da $\bar{G}$ in $\bar{p}$ wegen $\left[\frac{\bar{\Gamma}(\bar{p})}{2}\right] = 0$ $\bar{\Gamma}_v$ ist, bildet die neue Ecke $\bar{p}$ eine Komponente des $\bar{\Gamma}_v$-Restes von $\bar{G}$. Die Komponenten des Γ_v-Restes von G sind dann die übrigen Komponenten des $\bar{\Gamma}_v$-Restes von $\bar{G}$. Ferner gilt $\bar{E}^* = E^*$ und $\bar{E}_{uv} = E_{uv}$. Nach (4.6) können also weiter, kurz gesagt, sämtliche roten, p_0 mit E^* verbindenden Kanten von G abgebaut werden.

einen Γ-Faktor $(F_2 - k_2) \cup \bar{p} \cup k_1$ von $\bar{G} \cup k_1$. Es bleibt übrig, daß die Endpunkte p, q von k_1 in E liegen und G zwischen p, q Γ_{uv} ist. Im Falle $k_1 = k_0$ ist $(F - k_r) \cup \bar{p} \cup \bar{k}$, worin $\bar{k}$ die $\bar{p}, p_0^*$ verbindende Kante von $\bar{K}$ bedeutet, ein Γ-Faktor von $\bar{G} \cup k_1$. Es sei daher $k_1 \neq k_0$. Dann gibt es einen Γ-Faktor F_1 von $G \cup k_1$ und nach Satz 1 einen F, F_1 alternierenden Kreis Φ durch k_0 und k_1. Gilt $k_r \in F_1$, so ist $(F_1 - k_r) \cup \bar{p} \cup \bar{k}$, worin $\bar{k}$ die $\bar{p}, p_0^*$ verbindende Kante aus $\bar{K}$ bedeutet, ein Γ-Faktor von $\bar{G} \cup k_1$. Es bleibt somit übrig $k_r \notin F_1$. Wegen $k_r \in F$ und Satz 1 können wir annehmen, daß k_r auf Φ liegt. Da p_0^* nach (4.1) nur-blau erreichbar ist, zerfällt Φ in zwei F, F_1 alternierende Kreise Φ', Φ'', von denen einer (etwa Φ') k_r, der andere Φ'' die Kanten k_0 und k_1 enthält. Mittels zyklischer Umfärbung von Φ' ergibt sich aus F_1 ein Γ-Faktor F_1' von $G \cup k_1$ mit $k_r \in F_1'$. Dann ist (analog wie im vorletzten Fall) $(F_1' - k_r) \cup \bar{p} \cup \bar{k}$ ein Γ-Faktor von $\bar{G} \cup k_1$. Also ist $\bar{G}$ maximal Γ-prim.

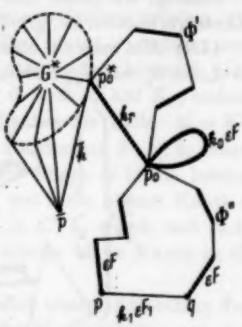

Fig. 5

Ist der Γ_v-Rest von unserem G nicht leer, so seien seine Komponenten im folgenden mit $G_1, \ldots, G_\sigma$ bezeichnet. Dann folgt leicht:

(4.7) *Hat man ein $G_\nu (1 \leqq \nu \leqq \sigma)$, so gibt es entweder genau eine oder keine rote Kante, die G_ν mit E^* verbindet.*

Denn gäbe es zwei solche roten Kanten, so wären die in G_ν liegenden Endpunkte dieser beiden Kanten wegen (3.1) durch (mindestens) eine blaue Kante verbunden und ferner wäre jeder der beiden in E^* liegenden Endpunkte (der beiden roten Kanten) mit unserem p_0 durch je (mindestens) eine blaue Kante verbunden. Diese fünf Kanten würden aber mit k_0 zusammengenommen einen alternierenden Kreis bilden und G wäre dann Γ-teilbar.

Wir nennen ein G_ν $(1 \leqq \nu \leqq \sigma)$ kurz ein *rotes* bzw. *blaues* G_ν, wenn es mit E^* durch eine bzw. keine rote Kante verbunden ist. Hat man ein rotes G_ν, so kann es sein, daß ein alternierender Kreis Φ durch die rote, G_ν mit E^* verbindende Kante existiert, der keine blaue, auf E^* endende Randkante von $G_1, \ldots, G_\sigma$ enthält. In diesem Falle ließe sich mittels zyklischer Umfärbung von Φ die Anzahl der roten G_ν $(1 \leqq \nu \leqq \sigma)$ verkleinern. Wir können daher im folgenden weiter voraussetzen, daß die Anzahl der roten G_ν in der beschriebenen Weise nicht verkleinert werden kann. Dann gilt:

(4.8) *Hat man ein rotes G_ν, so ist G_ν mit keiner kritischen Ecke durch eine Kante verbunden. Das heißt, sämtliche Randkanten der roten G_ν $(1 \leqq \nu \leqq \sigma)$ enden auf E^*.*

Beweis: Es sei k_r die rote Kante, die G_ν mit E^* verbindet. Ihre Endpunkte seien $p_\nu \in G_\nu$ und $p^* \in E^*$. Wäre eine Ecke $p \in G_\nu$ mit einer kritischen Ecke q durch eine rote Kante verbunden, so würde (da p^* ein Γ-Häufungspunkt ist) eine blaue, p^*, q verbindende Kante und ferner wegen (3.1) eine blaue, p, p_ν verbindende Kante und hiermit zusammen ein alternierender Kreis durch k_r existieren. Daher folgt (wegen der vorausgesetzten minimalen Anzahl roter G_ν),

daß G_ν höchstens durch blaue Kanten mit kritischen Ecken verbunden sein könnte. Wäre nun p_ν durch eine blaue Kante k mit $q \in E_{u\nu}$ verbunden, so könnten wir q mittels einer blauen, p_0, p^* verbindenden Kante und mittels k_ν und k blau erreichen, im Widerspruch zu (4.4). Es bleibt übrig, daß eine von p_ν verschiedene Ecke $p \in G_\nu$ mit $q \in E_{u\nu}$ durch eine blaue Kante k verbunden wäre. Wegen $\Gamma(p) \geqq 1$ ($\Gamma(p) = 0$ hätte ja $p \in E^*$ zur Folge) würde eine rote, an p liegende Kante $k' \in G_\nu$ existieren. Da nach (3.1) weiter an k' eine blaue Kante $k'' \in G_\nu$ nach p_ν angeschlossen ist, wäre q wiederum mittels einer blauen, p_0, p^* verbindenden Kante und mittels k_ν, k'', k' und k blau erreichbar. Es gibt daher keine Kante in G, die G_ν mit $E_{u\nu}$ verbindet.

Analog, wie jedes rote G_ν $(1 \leqq \nu \leqq \sigma)$ mit E^* durch je genau eine rote Kante verbunden ist, gilt für die blauen G_μ und $E_{u\nu}$:

(4.9) *Hat man ein blaues G_μ $(1 \leqq \mu \leqq \sigma)$, so gibt es genau eine blaue Kante in G, die G_μ mit $E_{u\nu}$ verbindet.*

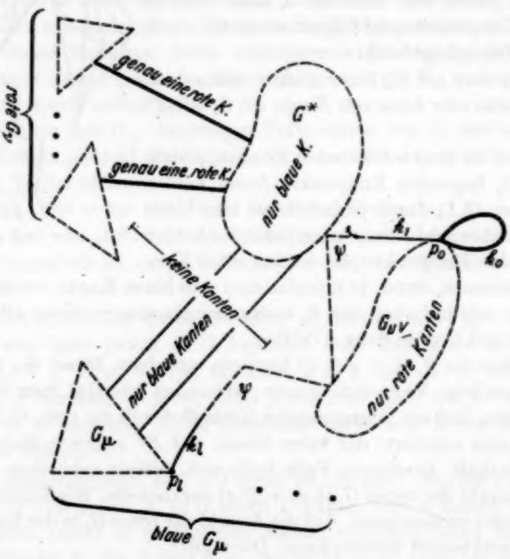

Fig. 6

Beweis: Nach (4.2) existiert ein bei p_0 mit einer blauen Kante k_1 beginnender, alternierender Kantenzug $\Psi: k_1, \ldots, k_l$, der nur seinen Endpunkt p_l mit G_μ gemeinsam hat. Die Endpunkte von k_λ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ seien $p_{\lambda-1}, p_\lambda$. Wir behaupten, p_{l-1} ist eine kritische Ecke. Denn andernfalls läge p_{l-1} in E^*, k_l wäre blau (da G_μ blau ist) und k_{l-1} wäre rot. p_{l-2} läge nach (4.4) nicht in $E_{u\nu}$. Daher würde k_{l-1} wegen (4.4) und (4.5) auf unserem Gange auf Ψ (von p_0 aus gerechnet) aus einem roten G_ν heraus nach E^* führen. Werden

hierbei (4.4), (4.5) und (4.8) beachtet, so folgt rekursiv, daß die (erste) rote Kante k_2 aus einem gewissen roten G_ν heraus nach E^* führen würde und dieses G_ν daher mit p_0 durch k_1 verbunden wäre, im Widerspruch zu (4.8). Also ist p_{l-1} eine kritische Ecke. Da k_l wegen (4.4) blau ist, gibt es somit (mindestens) eine blaue Kante, die G_μ mit E_{uv} verbindet. Gäbe es nun noch eine (von k_l verschiedene) blaue Kante k' in G, die eine Ecke $p' \in G_\mu$ mit einem $q' \in E_{uv}$ verbinden würde, so könnten wir nach (4.2) sowohl p' als auch p_l jeweils auf einem alternierenden, bei p_0 mit einer blauen Kante beginnenden Kantenzug Ψ' bzw. Ψ'' rot erreichen. Nach (4.4) müßte Ψ' die Kante k' und Ψ'' müßte die Kante k_l enthalten, und zwar so, daß wir auf Ψ' (analog Ψ'') unmittelbar vor der Durchwanderung von k' die Ecke q', dahinter die Ecke p' antreffen und hinter p' noch eine weitere alternierende Wanderung anschließen würden, die bei p' mit einer roten Kante k_r' (also auf Ψ' unmittelbar hinter k') beginnt und in p' wieder rot endet. Analog würden wir auf Ψ'' unmittelbar hinter k_l eine rote Kante k_r'' antreffen. Wegen (4.4) könnte weder k_r' noch k_r'' auf E_{uv} enden. k_r' und k_r'' müßten also in G_μ liegen. Wir unterscheiden die Fälle: $k_r' = k_r''$, $k_r' \neq k_r''$. Im ersten Falle liefert der alternierende Kantenzug k', k_r', k_l einen Widerspruch zu (4.4). Im zweiten Falle könnten wir wegen (3.1) die beiden von p', p_l verschiedenen Endpunkte von k_r' und k_r'' mit einer blauen Kante k verbinden und der alternierende Kantenzug k', k_r', k, k_r'', k_l würde mit (4.4) wiederum im Widerspruch stehen. Also ist k_l die einzige blaue Kante in G, die G_μ mit E_{uv} verbindet.

Es wäre per definitionem zu erwarten gewesen, daß unsere Einteilung der Komponenten des Γ_v-Restes von G in rote und blaue Komponenten von der Wahl des kritischen Punktes p_0 und dann noch von der Wahl des Γ-Faktors F (kurz gesagt, von der Färbung) von $G \cup k_0$ abhängen könnte. Es stellt sich jedoch jetzt nach (4.8) und (4.9) heraus, daß sich hierbei immer dieselbe Einteilung ergibt, da nach (4.8) eine Komponente des Γ_v-Restes von G genau dann rot bzw. nach (4.9) genau dann blau ist, wenn sie mit E_{uv} durch keine bzw. mindestens eine Kante von G verbunden ist. Es ergibt sich nun:

Satz 8. *Ist $G = E \cup K$ ein maximal Γ-primer Graph mit nicht leerer Γ-Ableitung*[13]) *G', so hat er folgende Eigenschaften:*

1. *Jede Komponente des Γ_v-Restes von G ist ein Einsgraph (bezüglich Γ),*
2. *Für jede Komponente G_λ ($1 \leq \lambda \leq \sigma$) des Γ_v-Restes von G ist die Summe aus der Anzahl sämtlicher Ecken $p \in G_\lambda$ mit ungeradem $\Gamma(p)$ und der Anzahl sämtlicher Kanten von G, die G_λ mit E_{uv} verbinden, ungerade,*
3. *Die Anzahl σ sämtlicher Komponenten des Γ_v-Restes von G ist gleich:*

$$\sigma = 2 + \sum_{p \in E^*} \Gamma(p) + \sum_{p \in E_{uv}} (\gamma(p, G') - \Gamma(p))^{22)}.$$

Umgekehrt ist jeder Graph mit diesen drei Eigenschaften Γ-prim (nicht notwendig maximal Γ-prim).

[22]) Hierin bedeutet im Falle $E^* = \Theta$ bzw. $E_{uv} = \Theta$ die obige Summe 0. Mittels (4.5), (4.7), (4.8), (4.9) und Satz 4 kann man ferner den Satz beweisen: Ein maximal Γ-primer Graph $G = E \cup K$ ist dann und nur dann ein Einsgraph (bezüglich Γ), wenn die Anzahl sämtlicher $p \in E$ mit ungeradem $\Gamma(p)$ ungerade ist. Dieser Satz enthält das Theorem III von [1] (vgl. [1], S. 245) als Spezialfall.

Beweis: Wir setzen zunächst voraus, G sei maximal Γ-prim (mit $G' \neq \Theta$). Dann hat G nach (3.1) die Eigenschaft 1. Für die roten G_ν folgt Eigenschaft 2 aus (4.7), (4.8) und Satz 4. Für die blauen G_μ folgt Eigenschaft 2 aus (4.7), (4.9) und Satz 4. Bezeichnet allgemein $\beta_r(E', E'')$ bzw. $\beta_b(E', E'')$ die Anzahl sämtlicher roten bzw. blauen Kanten in G, die ein $E' \subsetneqq E$ mit einem $E'' \subsetneqq E$ verbinden ($E' \cap E'' = \Theta$), so folgt für σ_r (= Anzahl der roten G_ν) und σ_b (= Anzahl der blauen G_μ):

$$\sigma_r + \sigma_b = \sigma\,,$$

$$\sum_{p \in E^*} \Gamma(p) = \sigma_r + \beta_r(E^*, E_{uv}) \quad \text{nach (4.5) 2. Teil und (4.7)}\,,$$

$$\sum_{p \in E_{uv}} (\gamma(p, G') - \Gamma(p)) = \sigma_b - \beta_r(E_{uv}, E^*) - 2$$

nach (4.5) 1. Teil, (4.8) und (4.9). Addieren wir die beiden letzten Gleichungen, so erfüllt G auch die Eigenschaft 3. Wir setzen nun umgekehrt voraus, daß $G = E \cup K$ ein Graph mit den Eigenschaften 1, 2 und 3 sei. Wir behaupten, G ist Γ-prim. Denn, gäbe es einen Γ-Faktor F von G, so wäre, wenn wir uns sämtliche Kanten von F rot, die Kanten von $G-F$ dagegen blau gefärbt denken, die Anzahl σ_r sämtlicher Komponenten des Γ_v-Restes von G, die durch mindestens eine rote Kante mit E^* verbunden sind,

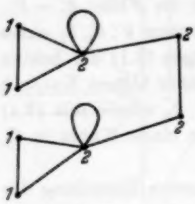

Fig. 7

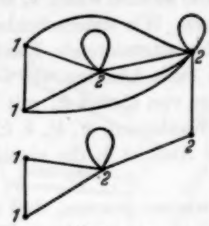

Fig. 8

$$\sigma_r \leqq \beta_r(E - (E^* \cup E_{uv}), E^*)\,.$$

Ferner wäre die Anzahl σ_b sämtlicher Komponenten des Γ_v-Restes von G, die mit E^* durch keine rote Kante verbunden sind, da jede solche Komponente nach Satz 4 wegen Eigenschaft 1 und 2 durch je mindestens eine blaue Kante mit E_{uv} verbunden sein müßte:

$$\sigma_b \leqq \sum_{p \in E_{uv}} (\gamma(p, G') - \Gamma(p)) + \beta_r(E_{uv}, E^*)\,.$$

Beide Ungleichungen zusammen ergäben:

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_b \leqq \sum_{p \in E^*} \Gamma(p) + \sum_{p \in E_{uv}} (\gamma(p, G') - \Gamma(p))$$

entgegen Eigenschaft 3.

Das folgende Beispiel (vgl. Fig. 7, worin die bei jeder Ecke p angeschriebene Zahl das $\Gamma(p)$ bedeuten soll) zeigt einen Graphen G mit $G' = G$, $\sigma = 2$, der die Eigenschaften 1, 2 und 3 erfüllt, jedoch nicht maximal Γ-prim ist. Wenn ein Graph $G = E \cup K$ mit den Eigenschaften 1, 2 und 3 nicht maximal Γ-prim ist, so kann dies nach Satz 8 (da jeder Γ-prime Graph in einem maximal Γ-primen Graphen enthalten ist) nur daran liegen, daß es noch einen Graphen $\bar{G} = E \cup \bar{K} \supset G$ mit den Eigenschaften 1, 2 und 3 gibt, der sich aus G (kurz

gesagt) mittels gewisser Zusammenfassungen von Komponenten des Γ_v-Restes von G oder kritischer Ecken (oder solcher Komponenten und kritischer Ecken) und mittels Ausbau dieser Zusammenfassungen (durch Hinzufügung neuer Kanten) zu neuen Einsgraphen (bezüglich Γ) ergibt. Einen solchen maximal Γ-primen, echten Obergraphen zu unserem G des Beispieles der Fig. 7 zeigt Fig. 8.

Zum Schluß möchten wir noch auf einen Zusammenhang zwischen der Eigenschaft 3 maximal Γ-primer Graphen (vgl. Satz 8) und einem Kriterium von TUTTE für Γ-prime Graphen (vgl. [5], S. 348, Theorem C) hinweisen. Hat man einen maximal Γ-primen Graphen G, so können wir für die beiden Mengen S und T des Kriteriums von TUTTE ([5], S. 348, (6)) unsere $S = E^*$ und $T = E_{uv}$ einsetzen. Hierfür lautet dann die Bedingung (6) von TUTTE (in unserer Bezeichnungsweise):

$$\sum_{p \in E^*} \Gamma(p) < \sigma + \sum_{p \in E_{uv}} (\Gamma(p) - \gamma(p, G')) .$$

Nach Satz 8 ergibt sich, daß die Bedingung (6) von TUTTE insbesondere für maximal Γ-prime Graphen schärfer als Gleichung (statt der Ungleichung (6)) mit Addition von 2 auf der linken Seite von (6) erfüllt werden kann.

Literatur

[1] BELCK, H.-B.: Reguläre Faktoren von Graphen. J. reine angew. Math. **188**, 228–252 (1950).
[2] ORE, O.: Graphs and subgraphs. Trans. Amer. Math. Soc. **84**, 109–136 (1957).
[3] TUTTE, W. T.: The factorization of linear graphs. J. London Math. Soc. **22**, 107–111 (1947).
[4] TUTTE, W. T.: The factors of graphs. Can. J. Math. **4**, 314–328 (1952).
[5] TUTTE, W. T.: A short proof of the factor theorem for finite graphs. Can. J. Math. **6**, 347–352 (1954).

(Eingegangen am 31. Januar 1960)

GÜNZLER, H.
Math. Annalen 141, 68—86 (1960)

Eine Charakterisierung harmonischer Funktionen

Von
HANS GÜNZLER in Göttingen

Für harmonische Funktionen $f(x)$ gilt nach GAUSS der Satz vom arithmetischen Mittel: Der Oberflächenmittelwert $O_t f(x)$ über eine Kugel vom Radius t stimmt überein mit dem Funktionswert $f(x)$ im Mittelpunkt x der Kugel. Umgekehrt hat KOEBE gezeigt (vgl. KELLOG [12], S. 227), daß aus der Gleichung $O_t f(x) = f(x)$, gültig für alle x und $t > 0$, die Gleichung $\Delta f = 0$ folgt. Diese Charakterisierung harmonischer Funktionen ist nach den verschiedensten Richtungen hin verallgemeinert worden (vgl. z. B. SAKS [19], JOHN [10], COURANT-HILBERT [1], S. 251—257, RADO [18], S. 7 und 19, PRIVALOFF [17], ISHIKAWA [9], TASHIRO [21]), stets wurden hierbei aber die Werte von $O_t f$ für $t \to 0$ herangezogen, außerdem wurden diese dabei meist in Verbindung gesetzt mit $f(x)$ selbst. Der einzige Fall, in dem nicht irgendwie $t \to 0$ betrachtet wird, scheint die sehr schöne Charakterisierung harmonischer Funktionen von DELSARTE [3], [4] zu sein, auf die wir weiter unten in Abschnitt 4 eingehen werden.

In der vorliegenden Note nun charakterisieren wir harmonische Funktionen durch das Verhalten von $O_t f$ für $t \to \infty$: Die Funktion f ist schon dann harmonisch, wenn ihr Mittelwert $O_t f$ für $t \to \infty$ ein gewisses Wiederkehrverhalten aufweist. Dieses Wiederkehrverhalten ist z. B. dann vorhanden, wenn $O_t f(x)$ in t schließlich fastperiodisch ist. Speziell ist f harmonisch, wenn $O_t f$ schließlich periodisch ist oder wenn $O_t f$ auf irgendeinem t-Intervall konstant bleibt. Wenn man will, kann man dieses Ergebnis auch negativ formulieren: Es gibt keine nicht-trivialen fastperiodischen Funktionen der Form $O_t f$. Da wir beliebige lokal integrable Funktionen f betrachten, sind zunächst gewisse Singularitäten im Endlichen (und natürlich beliebige im Unendlichen) dabei zulässig. Diese Ergebnisse gelten für alle Dimensionen $n \geqq 2$, für die Volumenmittelwerte $V_t f$ über Vollkugeln gelten entsprechende Aussagen schon von $n = 1$ an.

Zum Beweise werden wir eine gewisse Gleichgradigkeit des Wiederkehrverhaltens in x benötigen, doch genügt es schon, wenn z. B. die Fastperiodizität nur lokal im Mittel gleichgradig in x gefordert wird. Wesentliches Hilfsmittel bei den Beweisen ist die Distributionstheorie von L. SCHWARTZ (die wir auch im Falle beliebig glatter $f(x)$ nicht vermeiden können) sowie eine Formel von ASGEIRSSON und JOHN über iterierte Oberflächenmittelwerte.

Verallgemeinerungen der hier bewiesenen Aussagen sind natürlich auf mannigfache Weise möglich, doch wollen wir hier darauf nicht weiter eingehen.

Die folgenden drei ersten Abschnitte dienen im wesentlichen der Vorbereitung: In § 1 finden sich Aussagen über die Existenz und die Stetigkeitseigenschaften der Oberflächen- und Volumenmittelwerte (Satz 1) sowie die Differentialgleichung von EULER-POISSON-DARBOUX, der die Mittelwerte im Distributionssinn genügen (Satz 2). In § 2 werden Häufungspunkte von $O_t f$ bzw. $V_t f$ für $t \to \infty$ eingeführt und untersucht, z. B. ist $\lim\limits_{t\to\infty} O_t f$, wenn er existiert, stets harmonisch (Folgerung in § 2). Daß eine im R^n definierte Funktion $f(x)$, für die der Mittelwert $O_t f$ bzw. $V_t f$ in einem gewissen t-Intervall von t unabhängig ist, überall harmonisch ist, wird in § 3 gezeigt (Satz 3, Folgerung I und II). § 4 bringt dann die schon oben erwähnte Charakterisierung harmonischer Funktionen f durch ein gewisses Wiederkehrverhalten von $O_t f$ bzw. $V_t f$ für $t \to \infty$ (Satz 4) sowie als Folgerung I, daß eine Funktion f bereits dann harmonisch ist, wenn ihr Mittelwert $O_t f$ bzw. $V_t f$ schließlich fastperiodisch ist. Auch aus der Gleichung $\lim\limits_{t\to\infty} O_t f = f$ darf man schließen, daß f harmonisch ist (Folgerung II). In einem Anhang wird der in § 4 vorkommende Begriff „fastperiodische Funktion auf einer Halbgruppe mit Werten in einem lokal-konvexen Vektorraum" näher erläutert.

§ 1. Einige Eigenschaften der Oberflächen- und Volumenmittelwerte

Sei Ω eine offene Menge des reellen euklidischen $R^n (n = 1, 2, \ldots)$. Unter $L^1_{\text{lok}}(\Omega)$ werden wir dann das System aller komplexwertigen, auf Ω meßbaren und lokal integrablen Funktionen $f(x)$ verstehen, versehen mit der üblichen linearen Struktur und der Topologie der lokalen Konvergenz im Mittel, d. h. die Funktionen $f \in L^1_{\text{lok}}(\Omega)$ sind über jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ integrabel (hier und im folgenden ist stets das Lebesgue-Maß gemeint), und eine Umgebungsbasis des Nullelements θ wird geliefert durch die Mengen

$$\left(f : f \in L^1_{\text{lok}}(\Omega), \int_K |f(x)|\, dx < \varepsilon\right)$$

mit beliebigem kompaktem $K \subset \Omega$ und $\varepsilon > 0$; f. ü. gleiche f werden also identifiziert. $L^1_{\text{lok}}(\Omega)$ ist dann ein komplexer, lokalkonvexer topologischer linearer Raum, der das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt (also metrisierbar ist) und der vollständig ist (wegen der Terminologie vgl. DAY [2]).

Führt man im R^n Polarkoordinaten $p = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, r)$ ein,

$$x = x(p) = : r \cdot \xi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \quad \text{mit } |\xi| = 1\,,$$

bezeichnet man den Absolutbetrag der Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, r)}$$

mit $\Delta_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, r) = r^{n-1}\delta_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2})$, ist weiter Q der $(n-1)$-dimensionale Quader im $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$-Raum, dessen Bild $\xi(Q)$ gerade die Einheitssphäre $|x| = 1$ liefert, bedeutet dq das gewöhnliche Lebesgue-Maß im q-Raum $= \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$-Raum, und bezeichnet man schließlich den Oberflächeninhalt

der Einheitssphäre im R^n mit ω_n, so werde für t reell > 0 unter $O_t f(x)$ der *Oberflächenmittelwert*

$$\frac{1}{\omega_n}\int\limits_Q f(x+t\,\xi(q))\,\delta_n(q)\,dq$$

verstanden[1]), sofern er existiert, d. h. sofern $\int\limits_Q |f\cdot\delta_n|\,dq<\infty$.

Analog sei der *Volumenmittelwert* $V_t f(x)$ erklärt durch

$$V_t f(x) := \frac{1}{t^n v_n}\int\limits_{|y|\le t} f(x+y)\,dy = \frac{n}{\omega_n}\int\limits_{|z|\le 1} f(x+tz)\,dz\,,$$

wo $v_n = \frac{\omega_n}{n}$ der Rauminhalt der Einheitskugel im R^n ist.

Hier gilt nun der

Satz 1. *Ist $f\in L^1_{\mathrm{lok}}(R^n)$, $1\le n$, so existieren $O_t f$ und $V_t f$ für alle $t>0$ als Elemente von $L^1_{\mathrm{lok}}(R^n)$, d. h. für (festes) $t>0$ existieren $O_t f(x)$ und $V_t f(x)$ für fast alle $x\in R^n$, als Funktionen von x sind sie meßbar und lokal integrabel, und als Elemente von $L^1_{\mathrm{lok}}(R^n)$ sind sie unabhängig von der Wahl der Repräsentanten $f(x)$. $O_t f$ und $V_t f$ sind stetige Abbildungen von $(0,+\infty)$ in $L^1_{\mathrm{lok}}(R^n)$, im Sinne der Topologie von $L^1_{\mathrm{lok}}(R^n)$ gilt $\lim\limits_{t\to 0} O_t f = \lim\limits_{t\to 0} V_t f = f$. Schließlich sind noch $O_t f(x)$ und $V_t f(x)$ (x,t)-meßbar auf $R^n\times(0,+\infty)$ und (eindeutige) Elemente von $L^1_{\mathrm{lok}}(R^n\times(0,+\infty))$.*

Beweis[2]): Die Behauptungen über $V_t f$ sind klar: $V_t f(x)$ ist sogar (x,t)-stetig, wie man durch einfache Abschätzungen feststellt; die Aussage über $\lim\limits_{t\to 0} V_t f$ gilt für beliebige (abelsche) lokalkompakte topologische Gruppen (i. w. findet sich dies z. B. bei HALMOS [7], § 61, Aufgabe 5, S. 268).

Um die Aussagen über $O_t f$ zu beweisen, zeigen wir zuerst, daß die Funktion $g(x,q) := f(x+t\cdot\xi(q))$ bei festem $t>0$ in den $2n-1$ Variablen x, q meßbar ist: Die Transformation $T: R^n\times Q\to R^n$, gegeben durch $T(x,q) := x+t\cdot\xi(q)$, ist stetig, also Borel-meßbar; außerdem sind, wie man leicht feststellt, die Urbilder von Borel-Nullmengen wieder Nullmengen, T ist daher Lebesgue-meßbar, d. h. die Urbilder von L-meßbaren Mengen sind wieder L-meßbar. Nach HALMOS [7], § 39, S. 162, ist daher $g(x,q)$ meßbar, also auch $g(x,q)\cdot\delta_n(q)$; für beliebige kompakte $K\subset R^n$ erhält man daher mit FUBINI

$$\int\limits_K\int\limits_Q |g(x,q)\,\delta_n(q)|\,dq\,dx = \int\limits_Q \delta_n(q)\int\limits_K |f(\overline{x}+t\cdot\xi(q))|\,dx\,dq \le \int\limits_Q \delta_n(q)\int\limits_{K^t}|f(z)|\,dz\,dq\,,$$

wo $K^t := (x+y : x\in K,\ y\in R^n,\ |y|\le t)$ ein Kompaktum ist, über das f integrabel ist; mit einer von f, K, t abhängigen Konstanten C kann man also weiter abschätzen

$$\le \int\limits_Q \delta_n(q)\cdot C\,dq < \infty\,,$$

---

[1]) Für $n=1$ wird $O_t f(x) = \frac{1}{2}(f(x+t)+f(x-t))$, Q besteht hier nur aus zwei Punkten. Für $n\ge 2$ gilt für das Oberflächenelement $|x_{\varphi_1}\times\cdots\times x_{\varphi_{n-1}}| = \Lambda_n(p)$.

[2]) Daß $O_t f$ als Distribution für alle $t>0$ existiert, folgt aus L. SCHWARTZ [20], Bd. II, S. 11 und 72|73. Für den Spezialfall subharmonischer $f(x)$ vgl. z. B. RADO [18], S. 2–4.

d. h. aber, alle oben auftretenden Integrale sind endlich, für fast alle $x \in R^n$ existiert $O_t f(x)$, diese Funktion ist meßbar und über K integrabel. Ist $f_1(x) = f_2(x)$ f. ü., so zeigt eine analoge Abschätzung wie oben, daß auch $O_t f_1(x) = O_t f_2(x)$ f. ü..

$O_t f$ ist stetig in $t > 0$: Ist K kompakt $\subset R^n$ gegeben, so ist $f(x)$ jedenfalls über K^{t+1} (s. o.) integrabel; da das Maß der Menge $B(t, t', q) := (K + t \cdot \xi(q)) \Delta (K + t' \cdot \xi(q)) \subset K^{t+1}$ für $t' \to t$ gegen Null geht[3]), und zwar gleichgradig in $q \in Q$ (vgl. HALMOS [7], § 61, th. A, S. 266), gilt dasselbe von $\int\limits_{B(t,t',q)} |f(z)|\, dz$, also

$$\int\limits_K |O_t f(x) - O_{t'} f(x)|\, dx \leq \int\limits_Q \delta_n(q) \int\limits_K |f(x + t \cdot \xi(q)) - f(x + t' \cdot \xi(q))|\, dx\, dq$$

$$\leq \int\limits_Q \delta_n(q) \int\limits_{B(t,t',q)} 2\, |f(z)|\, dz\, dq \to 0 \quad \text{für} \quad t' \to t\,.$$

Was die Behauptung $\lim\limits_{t \to 0} O_t f = f$ betrifft, so gilt sie jedenfalls für stetige $f(x)$. Wählt man zu allgemeinem $f \in L^1_{\text{lok}}(R^n)$ und gegebenem kompaktem $K \subset R^n$ überall stetige $f_\varepsilon(x)$ so, daß $\int\limits_{K^1} |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, dx < \varepsilon$, so gilt für hinreichend kleine t

$$\int\limits_K |O_t f(x) - f(x)|\, dx \leq \int\limits_K |O_t f(x) - O_t f_\varepsilon(x)|\, dx + \int\limits_K |O_t f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x)|\, dx +$$

$$+ \int\limits_K |f_\varepsilon(x) - f(x)|\, dx \leq$$

$$\leq \int\limits_Q \delta_n(q) \int\limits_{K^1} |f(z) - f_\varepsilon(z)|\, dz\, dq + \varepsilon + \varepsilon \leq (\omega_n + 2) \cdot \varepsilon\,.$$

Die (x, t)-Meßbarkeit und lokale Integrierbarkeit von $O_t f(x)$ auf $R^n \times (0, +\infty)$ schließlich beweist man ganz analog, wie es oben bei festem t geschehen ist. (Die lokale Integrierbarkeit von $O_t f(x)$ folgt übrigens, wenn man schon die (x, t)-Meßbarkeit hat, auch aus der t-Stetigkeit von $O_t f$.)

B e i s p i e l: $f(x) := |x|^\beta$, $\beta > -n$; $O_t f(x)$ existiert hier jedenfalls bis auf die Nullmenge $|x| = t$. Speziell für $n = 3$, $\beta = -1$ erhält man

$$O_t f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{t} & \text{für} \quad |x| \leq t \\[2mm] \dfrac{1}{|x|} & \phantom{\text{für}} \quad |x| > t \end{cases}.$$

Satz 2. *Ist $f \in L^1_{\text{lok}}(R^n)$, $1 \leq n$, so genügt $F(x, t) := O_t f(x)$ im Distributionssinn der Euler-Poisson-Darboux-Gleichung* $\left(\Delta_x := \sum\limits_{i=1}^n \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)$

(1) $$\Delta_x F - F_{tt} = \frac{n-1}{t} F_t \quad \text{auf } R^n \times (0, \infty)\,.$$

Es genügt $G(x, t) := V_t f(x)$ auf $R^n \times (0, \infty)$ im Distributionssinn der Gleichung

(2) $$\Delta_x G - G_{tt} = \frac{n+1}{t} G_t\,.$$

---

[3]) $A \triangle B := A \cup B - A \cap B$.

Beweis: Nach Satz 1 ist $F \in L^1_{\text{lok}}(R^n \times (0, \infty))$, so daß F also im Sinne von L. SCHWARTZ [20] als Distribution definiert ist. Ist nun $f(x)$ überall zweimal stetig differenzierbar, so gilt dasselbe von $F(x, t)$ auf $R^n \times (0, \infty)$ und F genügt dort der Gleichung (1) im üblichen Sinne (vgl. COURANT-HILBERT [1], S. 411 bis 412), also erst recht im Distributionssinn (für $n = 1$ prüft man die Behauptung leicht direkt nach). Approximiert man nun ein beliebiges $f \in L^1_{\text{lok}}(R^n)$ lokal im Mittel durch zweimal stetig differenzierbare Funktionen, so erhält man durch ähnliche Abschätzungen wie am Ende des Beweises von Satz 1 die behauptete Gleichung (1). (Für $t > 0$ ist $\frac{1}{t} \cdot G_t$ als Distribution wohldefiniert).

Was $G = V_t f$ betrifft, so erhält man durch (hier zulässige) Einführung von Polarkoordinaten — wegen der Bezeichnungsweise vgl. den Anfang dieses Abschnitts — und Anwendung des Satzes von FUBINI: $f(x + r \cdot \xi(q))$ ist meßbar und lokal integrabel als Funktion der n Variablen p und es gilt bei festem x

$$(3)\quad V_t f(x) = \frac{1}{v_n t^n} \int_{|y| \le t} f(x + y)\, dy = \frac{n}{\omega_n t^n} \int_{Q \times (0,t)} f(x + r \cdot \xi(q))\, \Lambda_n(q, r)\, d(q, r)$$
$$= \frac{n}{t^n} \int_0^t r^{n-1} O_r f(x)\, dr$$

(nebenbei folgt also auch: $O_t f(x)$ ist für jedes feste $x \in R^n$ für fast alle $t > 0$ erklärt und lokal integrabel in t).

Daraus folgt aber unter Verwendung von (1), zunächst wieder nur für zweimal stetig differenzierbare $f(x)$

$$(4)\qquad \Delta_x G = \frac{n}{t^n} \int_0^t r^{n-1} \Delta_x F\, dr = \frac{n}{t^n} \int_0^t \frac{\partial}{\partial r} (r^{n-1} F_t(x, r))\, dr = \frac{n}{t} F_t(x, t)\,,$$

denn für zweimal stetig differenzierbare $f(x)$ gilt $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\partial}{\partial t} [O_t f(x)] = 0$ für jedes x.

Durch Differentiation von (3) nach t erhält man weiter für $t > 0$ und $x \in R^n$ die Beziehung

$$(5)\qquad nG + tG_t = nF\,.$$

Drückt man hiermit F_t in (4) durch G aus, so erhält man die behauptete Gleichung (2). Die Gültigkeit dieser Gleichung und auch der Gleichungen (4) und (5) für beliebige $f \in L^1_{\text{lok}}(R^n)$ im Distributionssinne sieht man dann wieder wie oben ein. (All dies gilt auch für $n = 1$.)

Beispiel: Gilt überall $\Delta f = \lambda = \text{const.}$, z. B. $f(x) = x^2$, so wird (vgl. COURANT-HILBERT [1], S. 251)

$$V_t f(x) = f(x) + \frac{\lambda}{2(n+2)}\, t^2,$$

(2) ist also offenbar erfüllt.

§ 2. Mittelwerte mit Häufungspunkten im t-Unendlichen

Definition 1. Ist $F(x, t) \in L^1_{\text{lok}}(R^n \times (a, +\infty))$, a und $\delta > 0$ fest reell, so heißt eine Funktion $G(x, t) \in L^1_{\text{lok}}(R^n \times (0, \delta))$ ein *δ-Häufungspunkt von $F(x, t)$ im Unendlichen*, falls G im Sinne der Topologie von $L^1_{\text{lok}}(R^n \times (0, \delta))$ Häufungs-

punkt von $\tau_{-s}F := F(x, t + s)$ für $s \to \infty$ ist, d. h. falls zu jedem Kompaktum $K \subset R^n \times (0, \delta)$, $\varepsilon > 0$ und $N > 0$ ein $s > Max(N, a)$ existiert, so daß

$$\int_K |\tau_{-s}F - G| \, dx \, dt < \varepsilon .$$

Anschaulich gesprochen heißt dies, die Funktion $F(x, t)$ hat für $t \to \infty$ immer wieder Streifen der Form $R^n \times (s_\nu, s_\nu + \delta)$, auf denen sie sich näherungsweise wie G verhält, und zwar um so genauer, je weiter man ins Unendliche kommt.

Hilfssatz. *Ist $F(x, t) \in L^1_{\text{lok}}(R^n \times (a, \infty))$ im Distributionssinn Lösung der Euler-Poisson-Darboux-Gleichung*

$$\Delta_x F - F_{tt} = \frac{c}{t} F_t \quad \text{auf} \quad R^n \times (a, \infty) \tag{6}$$

(c fest komplex, $1 \leq n$), und besitzt $F(x, t)$ im Unendlichen die Funktion $G(x, t)$ als δ-Häufungspunkt, so genügt G im Distributionssinn der Gleichung

$$\Delta_x G - G_{tt} = 0 \quad \textit{auf} \quad R^n \times (0, \delta) . \tag{7}$$

Ist $c \neq 0$ und G von der Form $\tau_{-s_1}F$, s_1 fest $\geq a$, so ist G konstant in t und harmonisch in x, d. h. es existiert eine überall im R^n unendlich oft differenzierbare Funktion $g(x)$ mit

$$G(x, t) = g(x) \ \textit{f. ü. auf}\ R^n \times (0, \delta) \ \textit{und}\ \Delta_x g = 0 \ \textit{überall im}\ R^n.\text{[4]}$$

B e w e i s : Sei $\varphi(x, t)$ eine feste, unendliche oft differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger $K \subset R^n \times (0, \delta)$. Nach Voraussetzung gibt es zu diesem K eine Folge reeller Zahlen $s_\nu \to \infty$, so daß $\int_K |F(x, t + s_\nu) - G(x, t)| \, dx \, dt \to 0$.
Damit gilt dann aber an der Stelle φ (die Distribution $\tau_{-s}T$ ist dort definiert als $(\tau_{-s}T)(\varphi) := T(\tau_s\varphi) = T(\varphi(x, t - s)))$ für $\nu \to \infty$

$$\begin{aligned}
\tau_{-s_\nu}(\Delta_x F) &= \Delta_x(\tau_{-s_\nu}F) \to \Delta_x G \\
\tau_{-s_\nu}(F_{tt}) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\tau_{-s_\nu}F) \to \frac{\partial^2}{\partial t^2} G \\
\tau_{-s_\nu}\left(\frac{c}{t} F_t\right) &= \tau_{-s_\nu}\left(\frac{c}{t}\right) \cdot \tau_{-s_\nu}(F_t) = \frac{c}{t + s_\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\tau_{-s_\nu}F) \\
&= \int_K F(x, t + s_\nu) \cdot \left[-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c}{t + s_\nu}\varphi(x, t)\right)\right] dx \, dt \\
&= c \int_K F(x, t + s_\nu) \cdot \left[\frac{\varphi}{(t + s_\nu)^2} - \frac{\varphi_t}{t + s_\nu}\right] dx \, dt \to 0 .
\end{aligned}$$

Da (6) jedenfalls auch für $\tau_{s_\nu}\varphi$ als Argument gilt, wenn nur ν hinreichend groß ist, erhält man für $\nu \to \infty$

$$\Delta_x G - G_{tt} = 0 \ \text{an der Stelle}\ \varphi .$$

Da φ beliebig war mit kompaktem Träger $\subset R^n \times (0, \delta)$, folgt der erste Teil der Behauptung des Hilfssatzes.

Ist nun $s_1 \geq a$ und $G = \tau_{-s_1}F$, so ist G Lösung von

$$\Delta_x G - G_{tt} = \frac{c}{t + s_1} G_t \quad \text{auf} \quad R^n \times (a - s_1, \infty)$$

---

[4]) Im Falle $n = 1$ ist also g linear.

also sicher auf $R^n \times (0, \delta)$; dort gilt aber auch $\Delta_x G - G_{tt} = 0$, ist also $c \neq 0$, so hat man wegen $\frac{1}{t + s_1} \neq 0$ jedenfalls $G_t = 0$, also erst recht $G_{tt} = 0$ und damit $\Delta_x G = 0$ auf $R^n \times (0, \delta)$ im Distributionssinn.

Aus $G_t = 0$ folgt nun die Existenz einer Funktion $g(x) \in L^1_{\text{lok}}(R^n)$, so daß $G = g$ f. ü. auf $R^n \times (0, \delta)$: Diese nicht ganz triviale Aussage ist natürlich bekannt, doch möge es erlaubt sein, hierfür einen Beweis zu geben (in der mir bekannten Literatur (z. B. L. Schwartz [20]) konnte ich dafür keinen finden — der bei Garnir [5], S. 89 unten, gegebene scheint mir unvollständig zu sein).

Zunächst folgt (L. Schwartz [20], I, S. 56/58) aus $G_t = 0$ auf $R^n \times (0, \delta)$ im Distributionssinne die Beziehung $\tau_s G = G$ auf $R^n \times (\beta, \delta)$ für alle s mit $0 \leqq s \leqq \beta$ (wo $0 < \beta < \delta$, sonst β bel., aber fest), d. h. zu jedem $s \in [0, \beta]$ gibt es eine Nullmenge $N = N(s) \subset R^n \times (\beta, \delta)$, so daß für $(x, t) \notin N$ gilt $G(x, t - s) = G(x, t)$.

Analog wie beim Beweis von Satz 1 sieht man nun, daß die Funktion $H(x, t, s) := G(x, t - s)$ auf $\Omega := R^n \times (\beta, \delta) \times [0, \beta]$ meßbar ist in den $n + 2$ Variablen (x, t, s), so daß man mit Fubini erhält

$$\int_\Omega |H(x, t, s) - G(x, t)|\, d(x, t, s) = \int_0^\beta \int_{\Omega \cap (s = \text{const.})} |\tau_s G - G|\, d(x, t)\, ds = \int_0^\beta 0\, ds = 0 .$$

Daraus folgte: Es gibt eine Menge von $M = M_\beta \subset (\beta, \delta)$, die sich von dem offenen Intervall (β, δ) nur durch eine Menge vom Maß Null unterscheidet, so daß für $r \in M$ gilt

$$G(x, r - s) = G(x, r) \qquad \text{f. ü. auf } R^n \times [0, \beta]$$

oder

$$G(x, t) \quad = G(x, r) \qquad \text{f. ü. auf } R^n \times [r - \beta, r] .$$

Damit ist G schon lokal als konstant erkannt, durch schrittweises Ausschöpfen von $(0, \delta)$ erhält man daraus die Behauptung: Sei $0 < \beta < \frac{\delta}{2}$, β fest; sei weiter die ganze Zahl k so bestimmt, daß $k\beta < \delta \leqq (k + 1)\beta$, außerdem $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß $(k - 1)\varepsilon < \beta$ und $\varepsilon < \delta - 2\beta$. Wählt man dann ein $r_1 = r(\varepsilon, \beta) \in M$ so, daß $\delta - \varepsilon < r_1 < \delta$ und außerdem dafür $G(x, r_1) \in L^1_{\text{lok}}(R^n)$, was stets möglich ist, so gilt jedenfalls

$$(8) \qquad G(x, t) = G(x, r_1) \qquad \text{f. ü. auf } R^n \times [\delta - \beta, \delta - \varepsilon] .$$

Wegen $k > 1$ ist dabei $\varepsilon < \beta$, es gibt daher ein $r_2 \in M \cap (\delta - \beta, \delta - \beta + \varepsilon)$, so daß

$$G(x, r_2) = G(x, r_1) \quad \text{f. ü. auf } R^n$$

und daher

$$G(x, t) = G(x, r_2) = G(x, r_1) \quad \text{f. ü. auf } R^n \times [r_2 - \beta, r_2] ,$$

also sicher auf $R^n \times [\delta - 2\beta + \varepsilon, \delta - \beta]$. Durch Zusammenfassung mit (8) erhält man so

$$G(x, t) = G(x, r_1) \text{ f. ü. auf } R^n \times [\delta - 2\beta + \varepsilon, \delta - \varepsilon] ,$$

nach insgesamt k derartigen Schritten also

$$G(x, t) = G(x, r_k) = G(x, r_1)$$
$$\text{f. ü. auf } R^n \times [\delta - k\beta + (k - 1)\varepsilon, \delta - \varepsilon] .$$

Wegen der oben gemachten Einschränkungen über ε gilt diese Beziehung somit mindestens auf $R^n \times [2\beta, \delta - \varepsilon]$.

Nun ist $r_1 = r(\varepsilon, \beta)$, und nach dem soeben Gezeigten gilt für beliebige zulässige Paare ε, β und ε', β'

$$G(x, r(\varepsilon, \beta)) = G(x, r(\varepsilon', \beta')) \text{ f. ü. auf } R^n,$$

d. h. durch $G(x, r(\varepsilon, \beta))$ ist in eindeutiger Weise ein Element $h(x) \in L^1_{\text{lok}}(R^n)$ bestimmt, und es gilt

$$G(x, t) = h(x) \quad \text{f. ü. auf } R^n \times (0, \delta).$$

Nunmehr läßt sich der Beweis des Hilfssatzes rasch zu Ende führen: Wegen $\Delta_x G = 0$ auf $R^n \times (0, \delta)$ und $G(x, t) = h(x)$ f. ü. folgt jedenfalls $\Delta_x h = 0$ im Distributionssinn auf R^n, daraus folgt aber die Behauptung (vgl. z. B. WEYL [22], S. 415, Lemma 2 oder NIRENBERG [23] für lokal quadratisch integrable f, oder für den allgemeinen Fall L. SCHWARTZ [20], I, S. 136, th. XII und S. 139 oder 140, für $n \geqq 2$, S. 52 für $n = 1$).

Definition 2. Existiert $\lim\limits_{t\to\infty} O_t f$ im Sinne der Topologie von $L^1_{\text{lok}}(R^n)$ oder existiert $\lim\limits_{s\to\infty} \tau_{-s}(O_t f(x))$ im Sinne der Topologie von $L^1_{\text{lok}}(R^n \times (a, a + \delta))$, $a, \delta > 0$ fest reell, so wollen wir sagen, daß $O_\infty f$ existiert; $O_\infty f$ ist dann eine Funktion $g(x) \in L^1_{\text{lok}}(R^n)$ bzw. $G(x, t) \in L^1_{\text{lok}}(R^n \times (a, a + \delta))$. Entsprechend ist $V_\infty f$ definiert, falls es existiert.

Aus dem soeben bewiesenen Hilfssatz erhält man nun die

Folgerung. *Ist $f \in L^1_{\text{lok}}(R^n)$, $1 \leqq n$, und existiert $O_\infty f$ oder $V_\infty f$, so sind diese Grenzwerte unabhängig von t und überall im R^n harmonisch*[4a]).

Konvergiert also z. B. $O_t f(x)$ mit $t \to \infty$ für fast alle x des R^n und ist $O_t f(x)$ in x lokal beschränkt, gleichgradig in t[5]), so stimmt die Grenzfunktion f. ü. mit einer im ganzen R^n harmonischen Funktion überein.

B e w e i s: Da aus der Existenz von $\lim\limits_{t\to\infty} O_t f = g(x)$ im Sinne von $L^1_{\text{lok}}(R^n)$ die von $\lim\limits_{s\to\infty} \tau_{-s}(O_t f(x)) = g(x)$ im Sinne von $L^1_{\text{lok}}(R^n \times (a, a + \delta))$ folgt (für bel. a und positives δ), kann man sich auf letzteren Fall beschränken. Sei also

$$\lim_{s\to\infty} \tau_{-s}(O_t f(x)) = G(x, t) \quad \text{in } L^1_{\text{lok}}(R^n \times (a, a + \delta));$$

dann gilt auch

$$G(x, t + a) = \tau_{-a} G = \lim_{s\to\infty} \tau_{-s}(\tau_{-a} O_t f(x)) = \lim_{s\to\infty} \tau_{-(s+a)}(O_t f(x))$$
$$= \lim_{s\to\infty} \tau_{-s}(O_t f(x)) \text{ im Sinne der Topologie von } L^1_{\text{lok}}(R^n \times (0, \delta)),$$

$G(x, t + a)$ ist also jedenfalls δ-Häufungspunkt von $O_t f(x)$ im Unendlichen gemäß Definition 1; aus Satz 2 und dem Hilfssatz folgt also mit $H(x, t) := G(x, t + a)$

$$\Delta_x H = H_{tt} \quad \text{auf } R^n \times (0, \delta). \tag{9}$$

Wir zeigen nun, daß H unabhängig von t ist (im Falle $O_\infty f = \lim\limits_{t\to\infty} O_t f$ wäre dies überflüssig):

[4a]) *Zusatz bei der Korrektur:* Für $V_\infty f$ ist diese Aussage unter etwas stärkeren Voraussetzungen auch schon von PLANCHEREL und PÓLYA [24] bewiesen worden.

[5]) Möglicherweise ist diese Voraussetzung überflüssig.

Sei $0 < \eta < \alpha < \beta < \delta$, dann gilt für alle $h \in [0, \eta]$ und beliebige kompakte $K \subset R^n$

$$\int_\alpha^\beta \int_K |H - \tau_h H| \, dx \, dt \leq \int_\alpha^\beta \int_K |H - \tau_{-s}(O_t f)| \, dx \, dt + \int_\alpha^\beta \int_K |\tau_h H - O_{t+s} f(x)| \, dx \, dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_K |H - \tau_{-s}(O_t f)| \, dx \, dt + \int_{\alpha-h}^{\beta-h} \int_K |H(x, t) - O_{t+s+h} f(x)| \, dx \, dt .$$

Wählt man nun s_0 so, daß für $s > s_0$ stets

$$\int_{\alpha-\eta}^{\beta} \int_K |\tau_{-s} O_t f - H| \, dx \, dt < \varepsilon ,$$

so folgt für $s > s_0$

$$\int_\alpha^\beta \int_K |H - \tau_h H| \, dx \, dt < 2\varepsilon, \text{ d. h. } H = \tau_h H \text{ f. ü. auf } R^n \times (\eta, \delta) ,$$

und zwar für jedes $h \in [0, \eta]$. Daraus folgt aber nach dem Beweise des Hilfssatzes in § 2

$$H(x, t) = k(x) \quad \text{f. ü.} \quad \text{auf } R^n \times (0, \delta) ,$$

also $H_t = H_{tt} = 0$ und somit wegen (9)

$$\Delta_x H = \Delta_x k = 0 \quad \text{auf } R^n \times (0, \delta) \text{ bzw. } R^n ;$$

dies liefert die Behauptung.

Im Falle der Existenz von $V_\infty f$ verläuft der Beweis wortwörtlich genauso. —

Beispielsweise existieren $O_\infty f$ und $V_\infty f$ im Sinne von Definition 2 sicher dann, wenn f kompakten Träger hat, sie sind dann $= 0$. Aber auch für $f(x) = \frac{1}{|x|}$, $n = 3$ existiert nach den Bemerkungen vor Satz 2 der Grenzwert $O_\infty f$ (sogar gleichmäßig auf dem ganzen R^3) und ist identisch 0. (Für $n = 2$, $f(x) = \log \frac{1}{|x|}$ gilt $O_t f(x) \Rightarrow -\infty$.)

Spezialisiert auf $n = 1$ und $V_t f$ besagt die gerade bewiesene Folgerung: Existiert der Bohrsche Mittelwert $\lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(x + t) \, dt$, so ist er konstant oder linear in x.

Im Falle $n = 3$ läßt sich übrigens durch Betrachtungen, die denen von John [11], S. 114 analog sind, zeigen, daß für überall stetige $f(x)$, für die ein $s_1 > 0$ existiert, so daß $O_{s_1} f$ harmonisch $= g(x)$ ist, $\lim\limits_{t \to \infty} O_t f(x)$ für jedes x existiert und $= g(x)$ ist. Ist für stetige f also $O_{s_1} f$ und $O_{s_2} f$ harmonisch, so gilt $O_{s_1} f = O_{s_2} f$. Diese Bemerkung gestattet eine geringfügige Verallgemeinerung eines Resultats von Delsarte und Lions [4], S. 69: *Ist $f(x)$ überall im R^3 unendlich oft differenzierbar und gibt es zwei Zahlen s_1, s_2 mit $0 < s_1 < s_2 < \infty$, $\frac{s_1}{s_2}$ irrational, so daß $O_{s_1} f$ und $O_{s_2} f$ jeweils überall harmonische Funktionen darstellen, so ist $f = O_{s_1} f = O_{s_2} f$ harmonisch im ganzen R^3.*

§ 3. Charakterisierung harmonischer Funktionen durch das Verhalten ihrer Mittelwerte im Endlichen

Im allgemeinen kann man aus der Tatsache, daß $O_t f$ im Unendlichen einen δ-Häufungspunkt G besitzt, noch nicht schließen, daß f selbst harmonisch ist — dies zeigen die vorangehenden Beispiele. Es ist noch eine gewisse Verknüpfung von G und f erforderlich, die es gestattet, von $\Delta G = 0$ auf $\Delta f = 0$ zu schließen. Die Möglichkeit eines solchen Schlusses in unserem Falle, wo (vgl. Satz 4) G von der Form $\tau_{-s} O_t f$ ist, wird durch den folgenden Satz sichergestellt:

Satz 3. *Sei $f \in L^1_{\text{lok}}(R^n)$, $1 \leqq n$, sowie $0 \leqq a < b$*[6]*. Ist dann $O_t f$ unabhängig von t für $a < t < b$, d. h. gilt $O_t f(x) = g(x)$ f. ü. auf $R^n \times (a, b)$*[7] *mit nur von x abhängigem $g(x)$*[8]*, so ist f harmonisch auf dem ganzen R^n*[9], [10].

Beweis: Da g von t unabhängig ist, gilt $g_t = g_{tt} = 0$, also nach Satz 2 $\Delta_x g = 0$, zunächst auf $R^n \times (a, b)$, dann aber auch im klassischen Sinne auf R^n.

Ist nun $n = 1$, so gilt $2O_t f(x) = f(x + t) + f(x - t) = 2g(x)$ oder, wenn $T_\pm$ die zu $f(x \pm t)$ gehörigen Distributionen auf $R^1 \times (a, b)$ sind

$$T_+ + T_- = 2g\,; \tag{10}$$

nun ist, wie man sofort nachrechnet, $\frac{\partial}{\partial t} T_\pm = \pm \frac{\partial}{\partial x} T_\pm$, durch Differentiation nach x und t und nachfolgende Addition erhält man daher aus (10)

$$2\frac{\partial}{\partial x} T_+ = 2\left(\frac{\partial}{\partial x} g + \frac{\partial}{\partial t} g\right) = 2\frac{\partial}{\partial x} g = 2 \cdot c \quad \text{auf } R^1 \times (a, b)$$

(g ist linear!). Daraus folgt für unendlich oft differenzierbares $\varphi(x)$ mit kompaktem Träger

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x + t)\,(-\varphi'(x))\,dx = c \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx\,,$$

und zwar bei festem φ für fast alle $t \in (a, b)$; da beide Seiten stetig in t sind, gilt diese Gleichung für alle $t \in (a, b)$ und damit bei festem t für alle φ, d. h. (vgl. L. Schwartz [20], I, S. 52, th. I)

$$f(x + t) = cx + d(t) \qquad \text{f. ü. auf } R^1\,,$$

und zwar für jedes t; irgend ein $t_0 \in (a, b)$ liefert dann die Behauptung.

Sei also ab jetzt $n \geqq 2$, $O_t f = g$ f. ü. auf $R^n \times (a, b)$ und g harmonisch. Wir zeigen zunächst, daß man das t-Intervall, in dem $O_t f = g$ gilt, stets etwas nach unten vergrößern kann und damit $a = 0$ erreichen kann (unter Heranziehung

[6]) Für $a = b$, wo man dann g harmonisch vorauszusetzen hätte, wird Satz 3 falsch; vgl. die Bemerkungen im Anschluß an Satz 4 weiter unten.

[7]) Ist $a = 0$, und weiß man schon, daß g harmonisch ist, so kann man nach den Ergebnissen von John [10] mit erheblich weniger Punkten x, in denen $O_t f(x) = g(x)$ vorausgesetzt wird, auskommen.

[8]) Nach Satz 1 ist g dann automatisch aus $L^1_{\text{lok}}(R^n)$; wegen der (x, t)-Meßbarkeit von $O_t f(x)$ ist äquivalent: $O_t f = g$ für fast alle t, wobei die Gleichheit jeweils f. ü. in x gilt, oder entsprechend bei Vertauschung von x und t.

[9]) Satz und Beweis gelten mit gewissen Modifikationen auch dann noch, wenn f nur auf einem beschränkten Gebiet des R^n definiert ist.

[10]) Für unendlich oft differenzierbare f vgl. zu Satz 3 auch die Anmerkung 6.1 von Delsarte und Lions [4], S. 69.

von Eindeutigkeitssätzen für Distributionslösungen hyperbolischer Differentialgleichungen ließe sich dies ebenfalls einsehen):

Ist $f(x)$ stetig auf dem ganzen R^n, und setzt man bei festem x

$$
(11) \qquad \begin{aligned} k(s) &:= s^{n-2} O_{\sqrt{b^2-s^2}} f(x)\,, \\ h(t) &:= 2^{2-n} t^{n-2} O_{\frac{1}{2}(b-\sqrt{b^2-t^2})} [O_{\frac{1}{2}(b+\sqrt{b^2-t^2})} f](x)\,, \end{aligned}
$$

so besteht nach einer Formel von John [11], S. 83, (4.16), folgende Beziehung zwischen $k(s)$ und $h(t)$ (man erhält sie, wenn man den iterierten Mittelwert $O_s O_t f$ ausdrückt durch ein eindimensionales Integral über $O_t f$):

$$
(12) \qquad k(s) = \frac{2^{n-1} s}{(n-2)!} \left(\frac{d}{ds^2}\right)^{n-1} \int_0^s t^{n-1} (s^2 - t^2)^{(n-3)/2} h(t)\, dt\,,
$$

und zwar gilt diese Gleichung für jedes x, dann für alle s mit $0 < s < b$, und $\frac{d}{ds^2}$ bedeutet $\frac{1}{2s} \frac{d}{ds}$ (die obigen $n - 1$ Differentiationen sind bei stetigem f stets durchführbar). Setzt man zur Abkürzung

$$
c := 2^{n-1}/(n-2)!, \quad \varkappa(s,t) := t^{n-1} (s^2 - t^2)^{(n-3)/2}, \quad I(s) := \int_0^s \varkappa(s,t)\, h(t)\, dt\,,
$$

so gilt dann jedenfalls auch im Distributionssinn

$$
(13) \qquad k = c \cdot s \cdot \left(\frac{d}{ds^2}\right)^{n-1} I \quad \text{auf} \quad R^n \times (0, b)\,.
$$

Dabei sind k, I die Distributionen, die den auf $R^n \times (0, b)$ stetigen Funktionen $k = k(s) = k(x, s)$, $I = I(s) = I(x, s)$ zugeordnet sind.

Ist nun $f(x)$ nur lokal integrabel, so ist nach Satz 1 jedenfalls $O_t f(x) \in \in L^1_{\text{lok}}(R^n \times (0, b))$, damit ist aber auch, wie man sich leicht überlegt, $k(x, s)$ (x, s)-meßbar und aus $L^1_{\text{lok}}(R^n \times (0, b))$. Was die rechte Seite von (12) bzw. (13) betrifft, so gilt, wenn wir $\delta > 0$ durch

$$
(14) \qquad b + \sqrt{b^2 - \delta^2} = \operatorname{Max}(2a, b)
$$

bestimmen, nach Voraussetzung $O_t f = g$ f. ü. auf $R^n x (a, b)$, also auch für fast alle $t \in (0, \delta)$ (vgl. [8]))

$$
O_{\frac{1}{2}(b+\sqrt{b^2-t^2})} f = g \quad \text{f. ü. im } R^n;
$$

da g harmonisch ist, existiert dann der iterierte Mittelwert $O_s O_{\frac{1}{2}(b+\sqrt{b^2-t^2})} f$ für jedes $s > 0$ und ist f. ü. $= g$, insbesondere gilt also für fast alle $t \in (0, \delta)$

$$
(15) \qquad O_{\frac{1}{2}(b-\sqrt{b^2-t^2})} [O_{\frac{1}{2}(b+\sqrt{b^2-t^2})} f](x) = g(x)\,,
$$

jeweils f. ü. in $x \in R^n$. Wir setzen daher

$$
h(x,t) := 2^{2-n} t^{n-2} g(x) \quad \text{auf} \quad R^n \times (0, \delta);
$$

damit wird

$$
I(x, s) = 2^{2-n} \int_0^s \varkappa(s, t)\, t^{n-2} g(x)\, dt
$$

für alle $(x, s) \in R^n \times (0, \delta)$ und es gilt

$$
(16) \qquad I(x, s) = g(x) \cdot J(s)\,.
$$

Dabei ist $J(s) := 2^{2-n} \int_0^s \varkappa(s, t)\, t^{n-2} dt$ stetig auf $(0, \delta)$, (wendet man (12) auf die Funktion $f = 1$ an, so erkennt man, daß $J(s)$ auf $(0, \delta)$ sogar differenzierbar ist,

auch für $n = 2$ ($J(s)$ ist i. w. eine Potenz von s)) — die Funktion $I(x, s)$ ist also sicher aus $L^1_{\text{lok}}(R^n \times (0, \delta)$, die linken und rechten Seiten von (13) existieren daher im Distributionssinne.

Sei nun f_ν eine Folge stetiger Funktionen mit $f_\nu \to f$ im Sinne der Topologie von $L^1_{\text{lok}}(R^n)$. Dann gilt bei festem Argument φ mit kompakten Träger $\subset R^n \times (0, \delta)$ für die zugehörigen Distributionen (vgl. (11) und (13))

$$k_\nu(\varphi) \to k(\varphi)$$

(17) $$k_\nu(\varphi) = \left(c \cdot s \cdot \left(\frac{d}{ds^2}\right)^{n-1} I_\nu\right)(\varphi) \,;$$

Es gilt nämlich (vgl. den Beweis von Satz 1) für die Funktionen $k_\nu(x, s)$ bei festem Kompaktum $K \subset R^n$ und für hinreichend große ν

$$\int_K |k_\nu(x, s) - k(x, s)| \cdot |\varphi| \, dx \leq C \cdot s^{n-2} \int_Q \delta_n(q) \int_{K^{\sqrt{b^2 - s^2}}} |f_\nu(z) - f(z)| \, dz < \varepsilon \,,$$

und zwar gleichgradig in s, solange s beschränkt bleibt; daraus folgt dann durch Integration nach s die erste der beiden Beziehungen (17).

Daß die rechte Seite der zweiten Beziehung (17) gegen $\left(c \cdot s \cdot \left(\frac{d}{ds^2}\right)^{n-1} I\right)(\varphi)$ konvergiert für $\nu \to \infty$, kann man folgendermaßen einsehen:

Es gilt für die Differenz

$$D_\nu := \left(s\left(\frac{d}{ds^2}\right)^{n-1} I_\nu\right)(\varphi) - \left(s\left(\frac{d}{ds^2}\right)^{n-1} I\right)(\varphi)$$

(18) $$= \int I_\nu \cdot \left(\left[\frac{d}{ds^2}\right]^*\right)^{n-1} (s\varphi) \, d(x, s) - \int I \cdot \left(\left[\frac{d}{ds^2}\right]^*\right)^{n-1} (s\varphi) \, d(x, s)$$

$$= \int I_\nu \cdot \mu \, d(x, s) - \int I \cdot \mu \, d(x, s) \,,$$

wo $\mu = \mu(x, s) := \left(-\frac{d}{ds} \cdot \frac{1}{2s}\right)^{n-1} (s\varphi)$ gesetzt wurde, eine jedenfalls stetige und beschränkte Funktion mit kompaktem Träger aus $R^n \times (0, \delta)$; nun erhält man für I (und erst recht für die I_ν) durch mehrfache Anwendung des Satzes von Fubini die Gleichungen

$$\int_0^\delta \left(\int_{R^n} I \mu \, dx\right) ds = \int_0^\delta \int_0^s \varkappa(s, t) \int_{R^n} h(x, t) \, \mu(x, s) \, dx \, dt \, ds$$

$$= \int_0^\delta \int_0^s \varkappa(s, t) \cdot C \cdot t^{n-2} \int_{R^n} \int_{Q_1} \int_{Q_2} f(x + A(t) \cdot \xi(q_1) + B(t) \cdot \xi(q_2)) \, \delta_n(q_1) \, \delta_n(q_2) \times$$
$$\times \mu(x, s) \, dq_1 dq_2 dx \, dt \, ds$$

(wo wir der Abkürzung halber $A(t) := \frac{1}{2}(b - \sqrt{b^2 - t^2})$, $B(t) := \frac{1}{2}(b + \sqrt{b^2 - t^2})$, $C := 2^{2-n}/\omega_n^2$ gesetzt haben (vgl. (11)); q, Q, δ_n sind zu Beginn des Abschnittes 1 erklärt worden)

$$= \int_0^\delta \int_0^s \varkappa \cdot C \cdot t^{n-2} \int_{Q_1} \int_{R^n} \int_{Q_2} f \delta_n \delta_n \mu \, dq_2 dx \, dq_1 dt \, ds$$

$$= \int_0^\delta \int_0^s \cdots \int_{Q_1} \int_{Q_2} \int_{R^n} \cdots dx \, dq_2 dq_1 dt \, ds \,.$$

Dabei sind alle Integrale lediglich als iterierte Integrale aufzufassen, die Zulässigkeit der letzten Umformung $\int\limits_{R^n}\int\limits_{Q_2}\cdots dq_2\,dx = \int\limits_{Q_2}\int\limits_{R^n}\cdots dx\,dq_2$ ist beim Beweise von Satz 1 gezeigt worden, die vorangehende Umformung ist wegen $O_B f \in L^1_{\text{lok}}(R^n)$ aus denselben Gründen erlaubt, wegen (15) darf man, da die Integration über x innen erfolgt, $O_{A(t)}\,O_{B(t)}\,f(x)$ durch $g(x)$ ersetzen, bei der Vertauschung von $\int\limits_{R^n}\cdots dx$ mit $\int\limits_0^s\cdots dt$ kommen nur stetige Funktionen vor (vgl. (15)), entsprechend ist wegen (16)

$$\int I\,\mu\,d(x,s) = \int\limits_0^\delta\int\limits_{R^n}\cdots dx\,ds^{11)}\,.$$

Da die f_ν lokal im Mittel gegen f konvergieren, gilt für $\nu\to\infty$

$$\int\limits_{R^n} f_\nu(x + A(t)\cdot\xi(q_1) + B(t)\cdot\xi(q_2))\,\delta_n(q_1)\,\delta_n(q_2)\,\mu(x,s)\,dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int\limits_{R^n} f(x + A\cdot\xi(q_1) + B\cdot\xi(q_2))\,\delta_n(q_1)\,\delta_n(q_2)\,\mu(x,s)\,dx\,,$$

und zwar gleichgradig in $q_1\in Q_1$, $q_2\in Q_2$, $s,t\in[0,\delta]$ denn die $A(t)$, $B(t)$ bleiben ja beschränkt. Daraus folgt dann aber für die Differenz (18) $D_\nu\to 0$, d. h. wegen (17): Erfüllt f die Voraussetzungen von Satz 3, so gilt für f im Distributionssinne die Gleichung (13)

(13′) $$k = c\cdot s\cdot\left(\frac{d}{ds^2}\right)^{n-1} I \qquad \text{auf } R^n\times(0,\delta)\,.$$

Die rechte Seite kann man aber einfach bestimmen: Nach (16) war

$$I(x,s) = g(x)\cdot J(s)\;;$$

setzt man in (12) wieder $f = 1$ ein, so erhält man, und zwar im klassischen Sinne

$$\left(\frac{d}{ds^2}\right)^{n-1} J(s) = \frac{(n-2)!}{2^{n-1}s}\,s^{n-2} = \frac{1}{c}\,s^{n-3}$$

für $0 < s < b$.

Also gilt im Distributionssinn

$$k = c\cdot s\cdot g(x)\cdot\frac{1}{c}\,s^{n-3} \qquad \text{auf } R^n\times(0,\delta)$$

oder unter Beachtung der Definition von k, Gl. (11), nunmehr im üblichen Sinn

(19) $$O_{\sqrt{b^2-s^2}}\,f(x) = g(x)$$

für fast alle $(x,s)\in R^n\times(0,\delta)$.

Daraus kann man folgern

(20) $$O_t f(x) = g(x)$$

für fast alle $(x,t)\in R^n\times\left(\sqrt{b^2-\delta^2},\,b\right)$.

---

[11]) Wenn man, was nicht schwierig ist, gezeigt hätte, daß der Integrand als Funktion der $3n-1$ Variablen x, q_1, q_2, s meßbar ist, so bräuchte man diese Umformungen nicht schrittweise vorzunehmen, sondern könnte mit Fubini $\int\limits_{R^n}\cdots dx$ sofort nach innen ziehen. Weiter kann man dann schließen, daß $O_{A(t)}O_{B(t)}f(x)\in L^1_{\text{lok}}(R^n\times[0,\delta))$, so daß also bei bel. $f\in L^1_{\text{lok}}(R^n)$ die Gleichung (13) im Distributionssinne gilt, wobei nun $I(x,s)$ wie im Falle stetiger f erklärt ist und $\in L^1_{\text{lok}}(R^n\times(0,\delta))$.

Nun war gemäß (14) δ bestimmt durch $b + \sqrt{b^2 - \delta^2} = \mathrm{Max}(2a, b)$, also

$$\sqrt{b^2 - \delta^2} = \mathrm{Max}(2a, b) - b = \begin{cases} 0 & \text{für } 2a \leq b \\ a - (b - a) & \phantom{\text{für }} 2a > b \end{cases}.$$

Gleichung (20) gilt also entweder bis zu $t = 0$ herab oder wenigstens bis zu $a_1 := a - (b - a) < a$.

Durch erneute Anwendung des soeben Bewiesenen erhält man dann, daß Gleichung (20) entweder bis zu $t = 0$ herab oder mindestens bis zu $a_2 := a_1 - (b - a_1) = a - 3(b - a)$ gilt; nach endlich vielen Schritten erhält man so

$$O_t f(x) = g(x)$$

f. ü. auf $R^n \times (0, b)$.

Wählt man nun eine Folge positiver Zahlen t_ν mit $t_\nu \to 0$ so, daß für jedes einzelne t_ν die obige Gleichung f. ü. in $x \in R^n$ gilt, so gilt wegen Satz 1 im Sinne von $L^1_{\mathrm{lok}}(R^n)$

$$\lim_{\nu \to \infty} O_{t_\nu} f = f,$$

d. h. $f(x) = g(x)$ f. ü. auf R^n.

Folgerung I. *Ist $f \in L^1_{\mathrm{lok}}(R^n)$, $1 \leq n$, $0 \leq a < b$ und $V_t f$ für $t \in (a, b)$ unabhängig von t, so ist f überall im R^n harmonisch.*

Beweis: Aufgrund der bei Satz 2 bewiesenen Gleichung (5) gilt

$$n \cdot O_t f = n \cdot V_t f + t \cdot \frac{\partial}{\partial t}(V_t f) = n \cdot V_t f = \text{unabhängig von } t \text{ auf } R^n \times (a, b).$$

Folgerung II. *Ist $f \in L^1_{\mathrm{lok}}(R^n)$, $1 \leq n$, $0 \leq a < b$, und gilt $V_t f = O_t f$ f. ü. auf $R^n \times (a, b)$, so ist f überall harmonisch.*

(Für $a = 0$ und $n = 2$ ist dies ein Satz von Beckenbach und Rado, vgl. Rado [18], S. 19, 3.25, sowie Tashiro [21].)

Beweis: Nach Satz 2 gilt auf $R^n \times (a, b)$ im Falle $V_t f = O_t f$

$$\frac{n+1}{t} \frac{\partial}{\partial t} V_t f = \frac{n-1}{t} \frac{\partial}{\partial t} O_t f = \frac{n-1}{t} \frac{\partial}{\partial t} V_t f \text{ oder } \frac{\partial}{\partial t} V_t f = 0.$$

Daher ist (vgl. den Beweis des Hilfssatzes in Abschnitt 2) $V_t f$ auf (a, b) unabhängig von t, Folgerung I ergibt dann die Behauptung.

§ 4. Charakterisierungen harmonischer Funktionen durch das Verhalten ihrer Mittelwerte im Unendlichen

Satz 3 liefert nun in Verbindung mit dem früher bewiesenen Hilfssatz ohne Schwierigkeiten die in der Einleitung erwähnte Charakterisierung harmonischer Funktionen f durch das Verhalten von $O_t f$ im Unendlichen. Die nötige Verknüpfung zwischen f und den Werten $O_t f$ bei ∞ (vgl. die Bemerkung vor Satz 3) geschieht dabei vermittels einer translatierten Funktion $\tau_{-s_1}(O_t f) = O_{t+s_1} f$, sie besagt anschaulich, daß $F(x, t) := O_t f(x)$ für $t \to \infty$ immer wieder Streifen der Form $R^n \times (s_\nu, s_\nu + \delta)$ besitzt, auf denen F näherungsweise mit seinen Werten im Streifen $R^n \times (s_1, s_1 + \delta)$ übereinstimmt, und zwar mit wachsendem ν immer besser.

Satz 4. *Ist $f \in L^1_{\mathrm{lok}}(R^n)$, $2 \leq n$, und besitzt $O_t f$ ein $\tau_{-s_1} O_t f$ als δ-Häufungspunkt im Unendlichen, so ist f harmonisch, d. h. genauer gibt es ein $\delta > 0$ und ein $s_1 \geqq 0$, so daß im Sinne der Definition 1 die Funktion $G(x, t) := O_{t+s_1} f(x)$ ein δ-Häufungspunkt von $O_t f(x)$ im Unendlichen ist, so existiert eine überall im R^n unendlich oft differenzierbare, im klassischen Sinne überall harmonische Funktion $g(x)$, so daß $f(x) = g(x)$ f. ü. auf R^n.*

Sind die Voraussetzungen statt für $O_t f$ für $V_t f$ erfüllt, so ist f ebenfalls harmonisch, und zwar auch im Falle $n = 1$.

Beweis: Wegen Satz 2 ist der Hilfssatz aus Abschnitt 2 anwendbar und liefert, da $c = n - 1$ für $O_t f$ bzw. $c = n + 1$ für $V_t f$, unter der Voraussetzung $n > 1$ bzw. $n \geqq 1$: $O_{t+s_1} f$ bzw. $V_{t+s_1} f$ ist unabhängig von $t \in (0, \delta)$; Satz 3 bzw. die Folgerung daraus liefert daher die Behauptung.—

Für „$\delta = 0$" wird Satz 4 übrigens falsch, jedenfalls solange $s_1 > 0$: Sei z. B. für $n = 3$ die reellwertige Funktion $\varphi(u)$ der reellen Variablen u überall definiert, stetig und mit der Periode 2, sowie $\int_{-1}^{+1} \varphi(u)\, du = 0$. Setzt man dann $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) := \varphi(x_1)$, so gilt $O_m f(x) = 0$ für alle $x \in R^3$ und $m = 1, 2, \ldots$, also $O_m f \to O_1 f$ (vgl. hierzu JOHN [11], S. 114 et sequ., sowie COURANT-HILBERT [1], S. 254).

Folgerung I. *Ist $f \in L^1_{\mathrm{lok}}(R^n)$, $2 \leq n$ und $O_t f$ schließlich fastperiodisch, so ist f überall harmonisch. Insbesondere gilt also überall $\Delta f = 0$, falls $O_t f$ schließlich periodisch oder schließlich konstant ist.*

Eine Funktion $F(t)$, definiert z. B. für $t > 0$ und mit Werten aus $E = L^1_{\mathrm{lok}}(R^n)$, möge dabei *schließlich fastperiodisch* genannt werden, falls ein a, $0 \leqq a < \infty$, existiert, so daß F fastperiodische Funktion auf der additiven Halbgruppe $(a, +\infty)$ mit Werten in E ist (vgl. den weiter unten folgenden Anhang)[12]). Zu beachten ist hierbei, daß das ‚schließlich' bezüglich x gleichgradig vorausgesetzt wird, z. B. ist für Funktionen $f(x)$ mit kompaktem Träger der Mittelwert $O_t f$, solange man nur x aus einer beschränkten Punktmenge des R^n betrachtet, stets schließlich konstant $= 0$, ohne daß $O_t f$, aufgefaßt als abstrakte Funktion mit Werten in $L^1_{\mathrm{lok}}(R^n)$, schließlich $= 0$ wäre.

Beweis: Fastperiodische Funktionen besitzen zu jedem ‚ε' beliebig große ε-Translationszahlen, d. h. in unserem Falle: Zu jeder Umgebung U des Nullelements θ von E und zu jedem $N > 0$ gibt es ein $s = s(N, U) > \mathrm{Max}(N, a)$, so daß $O_t f - \tau_{-s} O_t f \in U$ für alle $t > a$ (vgl. den Schluß des folgenden Anhangs). Daraus folgt aber jedenfalls, daß $\tau_{-a}(O_t f)$ ein δ-Häufungspunkt von $O_t f$ im Unendlichen im Sinne von Definition 1 ist — sogar für $\delta = \infty$ — nach Satz 4 ist also f überall harmonisch. Weiter ist nach Satz 1 der Mittelwert $O_t f$ stetig für $t > 0$, periodische und stetige $F(t)$ auf einer additiven Halbgruppe H reeller Zahlen sind aber nach den üblichen Überlegungen auf H fastperiodisch im Sinne der Definition des Anhangs. (Für schließlich konstante $O_t f$ genügt im übrigen auch schon Satz 3.)

[12]) Es würde für Folgerung I genügen, wenn man von der Funktion $O_t f$ „Stepanoff-Fastperiodizität" fordert, d. h. die Funktion $\tau_{-s}(O_t f(x)) : (0, \infty)_s \to L^1_{\mathrm{lok}}(R^n_x \times (a, \infty)_t)$ ist fastperiodisch in s.

Was $n = 1$ betrifft, so wird dafür Folgerung I und damit auch Satz 4 falsch: Jede Bohr-fastperiodische Funktion $f(x)$ liefert in unserem Sinne fastperiodische $O_t f$, denn $O_t f(x) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t))$ ist sogar gleichgradig in $x \in R^1$ fastperiodisch in t. Umgekehrt gilt, wenn man für den Werteraum $E = C(R^1)$ nimmt, d. i. der Banach-Raum aller stetigen und beschränkten komplexwertigen Funktionen auf R^1, versehen mit der Supremum-Norm, daß ein $f \in E$, für das $O_t f$ fastperiodisch ist, notwendig Bohr-fastperiodisch sein muß (vgl. [6], § 5, Beispiel 1). Für den hier vorliegenden Fall $E = L^1_{\text{lok}}(R^1)$ ist eine derartige Aussage jedoch nicht mehr richtig, und auch eine Zerlegung der Form $f(x) = l(x) + p(x)$ mit linearem $l(x)$ und (Stepanoff-) fastperiodischem $p(x)$, wie sie vom periodischen Fall her vielleicht zu vermuten wäre, ist i. a. nicht möglich. (Beispiele hierzu sollen in einer demnächst erscheinenden Arbeit über „Eigenfunktionentwicklungen und allgemeine Fastperiodizität" gebracht werden.)

Analog zu Folgerung I beweist man

Folgerung I'. *Ist $f \in L^1_{\text{lok}}(R^n)$, $1 \leq n$, und $V_t f$ schließlich fastperiodisch, so ist f überall harmonisch.*

Für $n = 1$ besagt dies z. B., daß sich der Bohrsche Mittelwert $\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{+T} f(x+t)\,dt$ in T nur dann fastperiodisch (periodisch, konstant) verhalten kann, wenn $f(x) = Ax + B$ linear ist; dabei sind keinerlei Beschränktheitsvoraussetzungen über $f(x)$ im Unendlichen nötig.

Weiter folgt aus Satz 4 (bzw. aus der Folgerung in Abschnitt 2 zusammen mit Satz 3) das folgende Analogon zu dem Ergebnis von Delsarte [3]:

Folgerung II. *Ist $f \in L^1_{\text{lok}}(R^n)$, $1 \leq n$, und gilt im Sinne unserer Definition 2 $\lim\limits_{t\to\infty} O_t f = f$ (oder allgemeiner für $2 \leq n$: $\lim\limits_{t\to\infty} \tau_{-s}(O_t f(x)) = \tau_{-s_1}(O_t f(x))$ in $L^1_{\text{lok}}(R^n \times (0, \delta))$), so ist f überall harmonisch. Entsprechendes gilt für $V_t f$, $1 \leq n$.*

Abschließend wollen wir noch kurz die Beziehungen der obigen Ergebnisse zu denen von Delsarte [3], vgl. auch [4], erläutern: In [3] wurde gezeigt: Ist $f(x)$ überall im R^n unendlich oft differenzierbar (vgl. [4], S. 59), und gibt es zwei Zahlen a, b mit $0 < a < b$, so daß $f = O_a f = O_b f$, so ist f harmonisch (dabei sind gewisse endlich viele Ausnahmewerte des Verhältnisses b/a, die nur von n abhängen, auszuschließen). Nach Delsarte genügt es also für die Harmonizität von f, wenn der Mittelwert $O_t f$ an nur zwei Stellen t mit f übereinstimmt, während wir unendlich viele Stellen benötigen. Dafür können hier beliebige lokal integrable statt unendlich oft differenzierbarer Funktionen zugelassen werden (zunächst also auch mit Singularitäten), außerdem wird bei uns, grob gesprochen, die Gleichheit zwischen f und $O_t f$ jeweils nur näherungsweise vorausgesetzt, während sie bei Delsarte exakt gelten muß. Schließlich ist, in der Form der Folgerung I zu Satz 4, bei uns überhaupt keine Beziehung zwischen $O_t f$ und f selbst erforderlich. Im übrigen scheint selbst im Falle unendlich oft differenzierbarer $f(x)$ z. B. Folgerung I nicht ohne weiteres aus den Ergebnissen von Delsarte zu folgen, auch dann nicht, wenn man die Fastperiodizität

schon ab $a = 0$ voraussetzt: Schon auf der reellen Zahlengeraden gibt es Bohr-fastperiodische Funktionen $f(x)$ mit $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ für alle $x \neq 0$.

Anhang: Vektorwertige fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen

Ist H eine Halbgruppe, d. h. eine Menge von Elementen $a, b, \ldots$, für die ein Produkt $a \cdot b \in H$ definiert ist, daß assoziativ ist, so ist für den Fall, daß H eine Einheit e besitzt, der Begriff fastperiodische komplexwertige Funktion auf H von MAAK in [15] eingeführt worden. Durch geringfügige Modifikationen läßt sich dieser Begriff ausdehnen auf den Fall, daß H eine beliebige Halbgruppe ist, d. h. nicht notwendig eine Einheit besitzt, und die Werte der betrachteten Funktion in einem lokal-konvexen topologischen Vektorraum liegen:

Sei zu diesem Zweck E ein reeller oder komplexer, lokal-konvexer topologischer linearer Raum (vgl. DAY [2], S. 11, Def. 1), sowie $f(x)$ eine auf einer Halbgruppe H definierte Funktion, die ihre Werte in E hat. Lediglich um uns etwas kürzer ausdrücken zu können, führen wir noch H_e, die durch formale Adjunktion einer Einheit e aus H entstehende Halbgruppe, ein; für $e \in H$ sei $H_e = H$. Damit setzen wir fest

Definition. Eine Funktion $f(x): H \to E$ heißt *fastperiodisch*, wenn es zu jeder Umgebung U des Nullelements θ von E endlich viele Mengen $A_1, \ldots, A_n \subset H$ gibt, so daß $\bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu = H$, und für die folgendes gilt: Sind x, y irgend zwei Elemente $\in H_e$, zu denen es Elemente $c', d' \in H_e$ gibt sowie ein $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $c'xd' \in A_i$, $c'yd' \in A_i$, so gilt für beliebige $c, d \in H_e$, für die cxd und $cyd \in H$ sind, die Beziehung

$$f(cxd) - f(cyd) \in U .$$

Für $e \in H$ fällt diese Definition mit der von MAAK [15], S. 35, zusammen, stellt also für Gruppen die übliche dar. Daß es sich auch in unserem allgemeineren Falle um die „richtige" handelt, zeigt der weiter unten folgende Approximationssatz.

Um ihn formulieren zu können, benötigen wir den Begriff des *Rechtsmoduls*: Sei $F(H, E)$ der Raum aller fastperiodischen Funktionen $f: H \to E$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf H[13]). Ist E topologisch vollständig [vollständig] (vgl. DAY [2], S. 44, Def. 1), so ist auch $F(H, E)$ ein reeller oder komplexer, lokal-konvexer topologischer linearer Raum, der topologisch vollständig [vollständig] ist, und der invariant ist, d. h. mit $f(x)$ ist auch $f(cxd) \in F(H, E)$, wo c, d beliebig $\in H_e$ sein können. Ein lineare Teilmannigfaltigkeit $M \subset F(H, E)$ heiße ein Rechtsmodul, falls M abgeschlossen im Sinne der Topologie von $F(H, E)$ ist und falls M rechtsinvariant ist, d. h. mit $f(x)$ auch $f(xd)$ enthält für jedes $d \in H$.

Damit gilt nun der

---

[13]) Das heißt, eine Umgebungsbasis der 0 in F wird gegeben durch $(f: f \in F, f(x) \in U$ für alle $x \in H)$ bei bel. Umgebungen U von θ in E. Dabei ist zu bemerken, daß für f. p. f die Menge $f(H)$ stets totalbeschränkt in E ist; ist E normiert, so kann man auch F normiert annehmen.

Approximationssatz. *Ist H eine Halbgruppe und E ein reeller oder komplexer, lokal-konvexer topologischer linearer Raum, der topologisch vollständig ist, sowie M ein Rechtsmodul fastperiodischer Funktionen $f: H \to E$, so ist M gleich der abgeschlossenen Hülle im Sinne der Topologie von $F(H, E)$ des von allen endlichdimensionalen Rechtsmoduln $M_i \subset M$ aufgespannten linearen Raumes. Kurz ausgedrückt*

$$M = \sum{}^{\oplus} M_i \qquad M_i \subset M .$$

(Dabei kann man die M_i noch irreduzibel annehmen.)

Für $e \in H$ und $E = C$ (komplexer Zahlkörper) ist dies i. w.[14]) der von MAAK in [15] bewiesene Approximationssatz, ist also H eine Gruppe, so handelt es sich um den gewöhnlichen Approximationssatz für fastperiodische Funktionen. Ist speziell H eine topologische Halbgruppe, so kann man für M die Menge aller stetigen fastperiodischen Funktionen $f: H \to E$ nehmen, die M_i enthalten dann ebenfalls nur stetige fastperiodische Funktionen.

Der Beweis ergibt sich durch Kombination der Ideen aus MAAK [13], [14], [15], [16] (Ansätze hierzu finden sich für $e \in H$, $E =$ vollständiger reeller (F)-Raum, z. B. bei ISEKI [8]). Im übrigen läßt sich der Fall einer allgemeinen Halbgruppe H direkt auf den Fall $e \in H$ zurückführen, indem man, bei gegebenem f.p. $f: H \to E$, unter Verwendung der Funktion $\Phi(x, y)$ von MAAK [15] zunächst die Existenz und eindeutige Bestimmtheit eines Funktionswertes $f(e)$ zeigt, so daß die so auf H_e erweiterte Funktion f_e nun auf H_e fastperiodisch ist.

Aus dieser letzten Bemerkung folgt dann, daß auch in unserem Falle die Sätze 2 und 5, § 2, aus MAAK [15] gelten. Aus diesen erschließt man aber sofort die Existenz beliebig großer Translationszahlen:

Ist eine Umgebung U von 0 in E vorgegeben sowie $a, b \in H_e$, so gibt es zu fastperiodischem f stets ein $c \in aHb$, so daß

$$f(xy) - f(xcy) \in U \quad \textit{für alle } x, y \in H_e .$$

Literatur

[1] COURANT, R., u. D. HILBERT: Methoden der mathematischen Physik. Zweiter Band. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1937.

[2] DAY, M. M.: Normed linear spaces. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1958.

[3] DELSARTE, J.: Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques. C. R. Acad. Sci. (Paris) **246**, 1358–1360 (1958).

[4] DELSARTE, J., et J. L. LIONS: Moyennes généralisées. Comment. math. Helv. **33**, 59–69 (1959).

[5] GARNIR, H. G.: Les problèmes aux limites de la physique mathématique. Basel-Stuttgart: Birkhäuser 1958.

[6] GÜNZLER, H.: Fastperiodische Lösungen linearer hyperbolischer Differentialgleichungen. Math. Z. **71**, 223–250 (1959).

[14]) Für $E = C$ (und bel. H) wird nämlich jeder endlich-dimensionale Rechtsmodul *fastperiodischer* Funktionen aufgespannt von gewissen endlich vielen Linearkombinationen der Form $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i D_{ik}(x)$, wo die $D_{ik}(x)$ die Komponenten einer unitären Darstellung $D(x) = (D_{ik}(x))$ der gegebenen Halbgruppe H und die λ_i komplex sind. Entsprechendes gilt auch für lokalkonvexe, topologisch vollständige E.

[7] HALMOS, P. R.: Measure theory. Van Nostrand 1958.
[8] ISEKI, K.: Vector-space valued functions on semi-groups. I. II. III. Proc. Japan Acad. **31**, 16–19, 152–155, 699–701 (1955).
[9] ISHIKAWA, O.: On the characterisation of the harmonic functions. Proc. Japan Acad. **30**, 686–690 (1954). [Vgl. hierzu auch Math. Rev. **17**, 145 (1956).]
[10] JOHN, F.: Abhängigkeiten zwischen den Flächenintegralen einer stetigen Funktion. Math. Ann. **111**, 541–559 (1935).
[11] JOHN, F.: Plane waves and spherical means. Interscience publ. 1955.
[12] KELLOG, O. D.: Foundations of potential theory. Dover publ. 1953.
[13] MAAK, W.: Abstrakte fastperiodische Funktionen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **11**, 365–380 (1936).
[14] MAAK, W.: Fastperiodische invariante Vektormoduln in einem metrischen Vektorraum. Math. Ann. **122**, 157–166 (1950).
[15] MAAK, W.: Fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen. Acta math. **87**, 33–58 (1952).
[16] MAAK, W.: Integralmittelwerte von Funktionen auf Gruppen und Halbgruppen. J. reine angew. Math. **190**, 34–48 (1952).
[17] PRIVALOFF, I. I.: Sur la définition d'une fonction harmonique. C. R. Acad. Sci. URSS, N. S. **31**, 102–103 (1941).
[18] RADO, T.: Subharmonic functions. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1937.
[19] SAKS, S.: Note on defining properties of harmonic functions. Bull. Amer. math. Soc. **38**, 380–382 (1932).
[20] SCHWARTZ, L.: Théorie des distributions. I. II. Hermann u. Cie. 1950|51.
[21] TASHIRO, S.: On almost subharmonic functions. Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ., Ser. A, **9**, 55–59 (1955).
[22] WEYL, H.: The method of orthogonal projection in potential theory. Duke math. J. **7**, 411–444 (1940).
[23] NIRENBERG, L.: Remarks on strongly elliptic partial differential equations. Commun. pure appl. Math. **8**, 648–674 (1955).
[24] PLANCHEREL, M. u. G. POLYA: Sur les valeurs moyennes des fonctions réelles definies pour toutes les valeurs de la variable. Comment. math. Helv. **3**, 114–121 (1931).

(Eingegangen am 5. Februar 1960)

Chalkley, R.
Math. Annalen 141, 87—98 (1960)

On the Second Order Homogeneous Quadratic Differential Equation

By

Roger Chalkley in Cincinnati (Ohio)

Summary

Let the elements a, b, c, d, e, f belong to a differential field $\mathfrak{F}$ of characteristic zero. This paper[1]) is concerned with the solutions belonging to $\mathfrak{F}$ of the second order homogeneous quadratic differential equation

(i) $$Q(y) \equiv a y'' y'' + b y'' y' + c y'' y + d y' y' + e y' y + f y y = 0 .$$

If $Q(y)$ were multiplicatively reducible, then the problem of solving equation (i) becomes the easier problem of solving at worst second order homogeneous linear differential equations. We make the following assumptions:

(A) $Q(y)$ is multiplicatively irreducible; $y^2 + 1 = 0$ has a solution in $\mathfrak{F}$.

(B) When m_1 and m_0 are elements of $\mathfrak{F}$ with $m_1 \neq 0$, the differential equation $m_1 y' + m_0 y = 0$ possesses a non-zero solution in $\mathfrak{F}$.

(C) Elements p, q, r, s of $\mathfrak{F}$ exist so that equation (i) may be written in the form

(ii) $$Q(y) \equiv a y'' y'' + b y'' y' + c y'' y + (p y' + q y)(r y' + s y) = 0 .$$

Here, the naming of the elements p, q and r, s could be interchanged. We agree, whenever possible, to choose a naming not giving validity to both of the conditions

(I) $$A_8 \equiv p q' - p' q - q^2 = 0 ,$$

(II) $$A_5 \equiv c p - b q = 0 .$$

Let y_0 denote a non-zero solution of a homogeneous differential equation. Then all constant multiples of y_0 are also solutions of the same equation and form a set $\{y_0\}$ called a solution ray. A solution ray is uniquely determined by any one of its non-zero members. Different solution rays can have only the zero element in common. When y_0 is a non-zero singular solution of equation (ii), all the elements of $\{y_0\}$ are also singular solutions. In such a case $\{y_0\}$ is called a singular solution ray.

When the condition (I) is satisfied (and so $p \neq 0$) the solution ray of the equation $p y' + q y = 0$ is also a solution ray of equation (ii) and will be called fragmentary. A fragmentary solution ray is singular if and only if the con-

[1]) The present investigation is essentially part of a doctoral dissertation done at the University of Cincinnati under the supervision of Prof. Arno Jaeger during the school year 1957—1958.

dition (II) is also satisfied. A new indeterminate t (acting effectively as a parameter) will be introduced by algebraic considerations. Equation (ii) then determines a "correlation equation"

(iii) $$M(t, y) \equiv (pt^2 - bt + ar)\,y' + (qt^2 - ct + as)\,y = 0$$

and an "allocation equation"

(iv) $$A(t) \equiv (A_5 t^2 + A_3 t + A_1)\,t' + (A_8 t^4 + A_6 t^3 + A_4 t^2 + A_2 t + A_0) = 0\,.$$

Here, the elements A_i will appear as explicit polynomial expressions in the coefficients of equation (ii). All non-fragmentary solution rays of equation (ii) are then given by the parameterized solution rays $\{y_{t_0}\}$ of the equation $M(t_0, y) = 0$ corresponding to each solution t_0 belonging to $\mathfrak{F}$ of the allocation equation (iv). Only non-zero solutions t_0 of the allocation equation are permitted when the coefficient a is zero.

We shall find that equation (ii) possesses singular solution rays if and only if its corresponding allocation polynomial $A(t)$ is multiplicatively reducible with $a \neq 0$. In such a case one of the factors of $A(t)$ must be an ordinary algebraic polynomial in t of the first or second degree. The zeros of this polynomial are precisely those solutions of the allocation equation which give rise to singular parameterized solution rays. There can be no more than two singular solution rays (one of which may be fragmentary).

Equation (i) has been investigated by P. APPELL [5][2]) when there exists an element λ for which $Q'(y) + \lambda Q(y)$ is expressible as the product of two linear homogeneous differential polynomials. In such a case, assuming that $Q(y)$ is multiplicatively irreducible with $a \neq 0$, he has shown that equation (i) possesses two singular solution rays as well as a solution of the form $h^2 u_1 + hk u_2 + k^2 u_3$ where h and k are arbitrary constant elements. In our procedure this means that the allocation polynomial $A(t)$ must be multiplicatively reducible. Later we will exhibit a homogeneous quadratic differential equation not satisfying the Appell condition and yet having one singular solution ray (and a multiplicatively reducible allocation polynomial). From a computational standpoint it is much easier to check the factorability of the differential polynomial $A(t)$ than it is to check the Appell condition directly. In fact, even when the procedure of P. APPELL is applicable, it is easier to obtain the solutions by the method presented here.

In the last section we will see examples of homogeneous quadratic differential equations having zero, one, or two singular solution rays. For any integer $n \geqq 3$ there is an equation of type (i) having precisely n as the maximum number of linearly independent solutions. Also, an equation of type (i) can have infinitely many linearly independent solutions.

§ 1. Preliminary Considerations

A differential polynomial with coefficients from $\mathfrak{F}$ is said to be *multiplicatively reducible* when it is expressible as the product of two differential

[2]) Numbers in square brackets refer to the bibliography.

polynomials neither of which is an element of $\mathfrak{F}$. Otherwise, the differential polynomial is said to be *multiplicatively irreducible*. The same terminology is also applied to the differential equation corresponding to the given differential polynomial.

Let $H(y)$ denote a homogeneous differential polynomial (or system of homogeneous differential polynomials) in the indeterminate y. If an element y_0 of $\mathfrak{F}$ is a non-zero solution of $H(y) = 0$, then by the homogeneity property each constant multiple of y_0 will also be a solution of $H(y) = 0$. The collection of constant multiples of y_0 will be denoted by $\{y_0\}$ and will be called the *solution ray* determined by the element y_0. The solution ray $\{y_0\}$ will be said to *belong to* $H(y) = 0$, and $H(y) = 0$ will be said to *possess the solution ray* $\{y_0\}$. Although the zero element belongs to every solution ray, the zero element alone does not form a solution ray. If y_1 denotes any non-zero element belonging to the solution ray $\{y_0\}$, then we have $\{y_1\} = \{y_0\}$ (i.e. a solution ray is uniquely determined by any one of its non-zero members).

In the following sections we will make repeated use of the

Lemma: *Let* $L(y) \equiv l_2 y'' + l_1 y' + l_0 y$ *and* $M(y) \equiv m_1 y' + m_0 y$ *with* $m_1 \neq 0$ *denote two homogeneous linear differential polynomials with coefficients from* $\mathfrak{F}$. *The differential equations* $L(y) = 0$ *and* $M(y) = 0$ *possess a non-zero common solution belonging to* $\mathfrak{F}$ *if and only if the condition*

$$(*) \qquad l_0 m_1^2 - l_1 m_1 m_0 + l_2 m_0^2 = l_2 (m_1 m_0' - m_1' m_0)$$

is satisfied.

Proof: (A) Let $y_0 \neq 0$ be a common zero of $L(y)$ and $M(y)$. Then we have

$$\text{(i)} \qquad l_2 \left(\frac{y_0''}{y_0}\right) + l_1 \left(\frac{y_0'}{y_0}\right) + l_0 = 0\,, \quad \text{(ii)}\ \frac{y_0'}{y_0} = -\frac{m_0}{m_1}\,.$$

From (ii) by differentiation and substitution we obtain

$$\text{(iii)} \qquad \frac{y_0''}{y_0} = \frac{m_0^2 + m_0 m_1' - m_0' m_1}{m_1^2}\,.$$

Substitution of (ii) and (iii) in (i) yields the condition (*).

(B) Let the condition (*) be satisfied. Then, with $m_1 \neq 0$, the equation $M(y) = 0$ possesses a non-zero solution y_0 belonging to $\mathfrak{F}$. Thus, y_0 satisfies the conditions (ii) and (iii) above. Starting from condition (*) we see that y_0 satisfies condition (i) and consequently is also a non-zero solution of $L(y) = 0$.

Q. E. D.

As an interesting side issue, a short proof can be given to establish that condition (*) is equivalent to the "right-divisibility" of $L(y)$ by $M(y)$ in the sense of Ö. Ore [13]. In our case $L(y)$ is "right-divisible" by $M(y)$ when there exists a differential polynomial $P(y) \equiv p_1 y' + p_0 y$ with coefficients from $\mathfrak{F}$ such that $L(y)$ has the representation

$$L(y) = P(y) \times M(y) \equiv p_1 M'(y) + p_0 M(y)\,.$$

§ 2. Case: $a \neq 0$

In the present section we will investigate the solution rays of the multiplicatively irreducible homogeneous quadratic differential equation

(1) $$Q(y) \equiv a y'' y'' + b y'' y' + c y'' y + d y' y' + e y' y + f y y = 0$$

under the special assumption that the coefficient a is non-zero.

Following the plan of the summary we may immediately suppose that elements p, q, r, s of $\mathfrak{F}$ have been determined so that equation (1) assumes the form

(2) $$Q(y) \equiv y''(a y'' + b y' + c y) + (p y' + q y)(r y' + s y) = 0 .$$

As a preliminary consideration we will first prove that the polynomials

$$m_1(t) \equiv p t^2 - b t + a r \quad \text{and} \quad m_0(t) \equiv q t^2 - c t + a s$$

in the indeterminate t possess no common zeros. From the multiplicative irreducibility of $Q(y)$ we have

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a & b/2 & c/2 \\ b/2 & pr & (ps+qr)/2 \\ c/2 & (ps+qr)/2 & qs \end{vmatrix} \neq 0 .$$

The resultant R of $m_1(t)$ and $m_0(t)$ is given by

$$R = \begin{vmatrix} p & -b & ar & 0 \\ 0 & p & -b & ar \\ q & -c & as & 0 \\ 0 & q & -c & as \end{vmatrix} = a(-4 \cdot \Delta) \neq 0 .$$

The non-vanishing of the resultant proves that the polynomials $m_1(t)$ and $m_0(t)$ have no common zeros.

When the differential equations

(3) $$y'' = 0$$

and

(4) $$p y' + q y = 0$$

possess a common non-zero solution y_*, then equation (2) has the solution ray $\{y_*\}$. A solution ray $\{y_*\}$ which arises from a common non-zero solution y_* of equations (3) and (4) is called a *fragmentary solution ray* of equation (2). Since not both of the coefficients p and q can vanish, we see by § 1 that equation (2) possesses a fragmentary solution ray if and only if the condition

(5) $$p q' - p' q - q^2 = 0$$

is satisfied. Condition (5) is satisfied if and only if one of the two conditions $q = 0$, $(p/q)' = -1$ is satisfied.

Let $\{y_0\}$ denote any non-fragmentary solution ray of equation (2). Then we have either $y_0'' \neq 0$ or $p y_0' + q y_0 \neq 0$ and an element t_0 belonging to $\mathfrak{F}$ is uniquely specified by

(6) $$\frac{a y_0'' + b y_0' + c y_0}{p y_0' + q y_0} = - \frac{r y_0' + s y_0}{y_0''} = t_0 .$$

One of these two ratios might conceivably be of the form 0/0, but in such a case the other ratio would define t_0. The element t_0 is uniquely determined by the solution ray $\{y_0\}$ (i.e. independently of the choice of representative $y_0 \neq 0$ of the solution ray $\{y_0\}$). For this value of t_0 we readily find that (t_0, y_0) is a common solution of the equations

$$ay'' + (b - pt)y' + (c - qt)y = 0\,, \tag{7}$$

$$ty'' + ry' + sy = 0\,, \tag{8}$$

$$(pt^2 - bt + ar)y' + (qt^2 - ct + as)y = 0\,, \tag{9}$$

where (9) is obtained from (7) and (8) by elimination of y''.

Conversely, let t_0 denote an element of $\mathfrak{F}$ for which the equations (7) and (8) possess a common solution (t_0, y_0) with $y_0 \neq 0$. Then $(t_0, C \cdot y_0)$ is also a common solution of equations (7), (8), and (9) for each constant element C. Thus, the element t_0 specifies a solution ray $\{y_0\}$. For each of the two possible cases $t_0 = 0$ and $t_0 \neq 0$ we readily see that $\{y_0\}$ is a solution ray of equation (2). In order to show that a fragmentary solution ray can not arise from some element t_0 in this way, we will assume that equation (2) possesses a fragmentary solution ray $\{y_*\}$ and that (t_0, y_*) is a common solution of equations (7) and (8). This hypothesis yields

$$\begin{gathered} ay_*'' + (b - pt_0)y_*' + (c - qt_0)y_* = 0\,, \\ t_0 y_*'' + ry_*' + sy_* = 0\,, \\ y_*'' = 0\,, \\ py_*' + qy_* = 0 \end{gathered}$$

from which follows

$$py_*' + qy_* = 0\,, \quad by_*' + cy_* = 0\,, \quad ry_*' + sy_* = 0\,.$$

The last three relations yield

$$cp - bq = 0\,, \quad ps - qr = 0\,, \quad cr - bs = 0$$

and the contradiction $\Delta = 0$.

Thus, there is a one-to-one correspondence between non-fragmentary solution rays $\{y_0\}$ of equation (2) and elements t_0 for which equations (7) and (8) possess common solutions of the type (t_0, y_0) with $y_0 \neq 0$. A solution ray $\{y_0\}$ of equation (2) which arises from the value t_0 in this way is called a *parameterized solution ray* and is denoted by $\{y_{t_0}\}$.

Equations (7) and (8) possess the common solution (t_0, y_0) if and only if (t_0, y_0) is a common solution of equations (7) and (9). Let us now introduce the notation

$$\begin{gathered} L(t, y) \equiv l_2(t)\,y'' + l_1(t)\,y' + l_0(t)\,y \\ M(t, y) \equiv m_1(t)\,y' + m_0(t)\,y \end{gathered}$$

where

$$\begin{gathered} l_2(t) \equiv a\,, \\ l_1(t) \equiv b - pt\,, \quad m_1(t) \equiv pt^2 - bt + ar \\ l_0(t) \equiv c - qt\,, \quad m_0(t) \equiv qt^2 - ct + as\,. \end{gathered}$$

We see that the problem of finding the common solutions (t_0, y_0) (with $y_0 \neq 0$) of equations (7) and (8) reduces to the problem of finding the elements t_0 belonging to $\mathfrak{F}$ for which $L(t_0, y)$ and $M(t_0, y)$ satisfy the condition (*) of the Lemma in § 1 with $m_1(t_0) \neq 0$. This requires that t_0 be a solution of the equation

$$(10) \qquad \begin{aligned} l_0(t)\, m_1^2(t) - l_1(t)\, m_1(t)\, m_0(t) + l_2(t)\, m_0^2(t) = \\ = l_2(t)\, [m_1(t)\, m_0'(t) - m_1'(t)\, m_0(t)] \end{aligned}$$

with $m_1(t_0) \neq 0$. If there were a solution t_0 of equation (10) for which $m_1(t_0) = 0$, then (with $l_2(t_0) = a \neq 0$) we would also have $m_0(t_0) = 0$. Since (as seen at the beginning of the present section) $m_1(t)$ and $m_0(t)$ possess no common zeros, the condition $m_1(t_0) \neq 0$ automatically follows whenever t_0 is a solution of equation (10). Thus, the parameterized solution rays of equation (2) are given by the solution rays $\{y_{t_0}\}$ of the equation

$$(11) \qquad M(t_0, y) \equiv (pt_0^2 - bt_0 + ar)\, y' + (qt_0^2 - ct_0 + as)\, y = 0$$

corresponding to each solution t_0 belonging to $\mathfrak{F}$ of equation (10). Equation (2) is said to have equation (10) as its *allocation equation* and the equation $M(t, y) = 0$ as its *correlation equation*.

By direct computation the allocation equation (10) assumes the form

$$(12) \qquad \begin{aligned} A(t) \equiv\ & t^2 t'(cp - bq) \\ &+ tt'(2aqr - 2aps) \\ &+ t'(abs - acr) \\ &+ t^4(pq' - p'q - q^2) \\ &+ t^3(cp' - c'p + b'q - bq' + 2cq + pqr - p^2 s) \\ &+ t^2(bc' - b'c + aps' - ap's + aq'r - aqr' + a'ps - a'qr - \\ &\qquad - cpr - bqr + 2bps - 2aqs - c^2) \\ &+ t(ab's - abs' + acr' - ac'r + a'cr - a'bs + \\ &\qquad + 2acs + bcr - b^2 s + aqr^2 - aprs) \\ &+ (a^2 rs' - a^2 r's - a^2 s^2 + abrs - acr^2) = 0\,. \end{aligned}$$

It will be convenient to write the allocation equation of equation (2) in the abbreviated form

$$(13) \qquad \begin{aligned} A(t) \equiv (A_5 t^2 + A_3 t + A_1)t' \\ + A_8 t^4 + A_6 t^3 + A_4 t^2 + A_2 t + A_0 = 0 \end{aligned}$$

where the coefficients A_i are given by the corresponding coefficients of equation (12).

The results of the present section are summarized in

Theorem I: *Equation* (2) *possesses a fragmentary solution ray if and only if the condition* $A_8 \equiv pq' - p'q - q^2 = 0$ *is satisfied. All other solution rays of equation* (2) *are given by the parameterized solution rays* $\{y_{t_0}\}$ *of the equation*

$$(11) \qquad M(t_0, y) \equiv (pt_0^2 - bt_0 + ar)\, y' + (qt_0^2 - ct_0 + as)\, y = 0$$

corresponding to each solution t_0 of the allocation equation $A(t) = 0$. *A fragmentary solution ray (if one exists) can not be expressed as a parameterized*

solution ray. There is a one-to-one correspondence between parameterized solution rays $\{y_{t_0}\}$ *and solutions* t_0 *of the allocation equation.*

§ 3. Singular Solution Rays for the Case: $a \neq 0$

The singular solutions of equation (2) are those solutions of $Q(y) = 0$ which are also solutions of the equation

(14) $$S(y) \equiv 2ay'' + by' + cy = 0$$

where the differential polynomial $S(y)$ is the *separant* [15] of the differential polynomial $Q(y)$. A solution ray of equation (2) is called a *singular solution ray* when each of its members is a singular solution of equation (2). The solution ray $\{y_0\}$ is a singular solution ray if and only if y_0 is a singular solution. This section is concerned with obtaining all singular solution rays of equation (2).

Equation (2) possesses a fragmentary solution ray which is also a singular solution ray if and only if the equations

$$y'' = 0\,, \quad py' + qy = 0\,, \quad 2ay'' + by' + cy = 0$$

or equivalently the equations

$$y'' = 0\,, \quad py' + qy = 0\,, \quad by' + cy = 0$$

possess a non-zero common solution. This occurs precisely when the conditions $A_8 \equiv pq' - p'q - q^2 = 0$ and $A_5 \equiv cp - bq = 0$ are both satisfied.

The remaining solution rays of equation (2) must be parameterized solution rays of the form $\{y_{t_0}\}$. Here, each y_{t_0} denotes a non-zero solution of equation (11) $M(t_0, y) = 0$ corresponding to a solution t_0 of the allocation equation (10). The parameterized solution ray $\{y_{t_0}\}$ will be a singular solution ray precisely when the separant and the differential polynomial $M(t_0, y)$ satisfy the condition (*) of the Lemma in § 1. This requires that t_0 also be a solution of the equation

(15) $$\bar{l}_0 m_1^2(t) - \bar{l}_1 m_1(t)\, m_0(t) + \bar{l}_2 m_0^2(t) = \bar{l}_2 [m_1(t)\, m_0'(t) - m_1'(t)\, m_0(t)]$$

where

$$\bar{l}_2 \equiv 2a\,,$$
$$m_1(t) \equiv pt^2 - bt + ar\,, \quad \bar{l}_1 \equiv b\,,$$
$$m_0(t) \equiv qt^2 - ct + as\,, \quad \bar{l}_0 \equiv c\,.$$

A brief computation shows that the equations (10) and (15) possess the same common solutions as the equations (10) and

(16) $$m_1(t)\,[(cp - bq)t^2 + (2aqr - 2aps)t + (abs - acr)] = 0\,.$$

With the notation of § 2, the allocation equation (10) becomes

(13) $$A(t) \equiv (A_5 t^2 + A_3 t + A_1)t' + (A_8 t^4 + A_6 t^3 + A_4 t^2 + A_2 t + A_0) = 0$$

and equation (16) becomes

(17) $$m_1(t)\,(A_5 t^2 + A_3 t + A_1) = 0\,.$$

From § 2, the equations $A(t) = 0$ and $m_1(t) = 0$ possess no common solutions.

Hence, $\{y_{t_0}\}$ is a singular solution ray of equation (2) if and only if t_0 is a common solution of the equations (13) and

(18) $$A_5 t^2 + A_3 t + A_1 = 0 .$$

Thus, equation (2) *possesses parameterized singular solution rays if and only if its allocation equation* $A(t) = 0$ *is multiplicatively reducible. When parameterized singular solution rays* $\{y_{t_0}\}$ *occur, they correspond to the zeros* t_0 *of the polynomial factor in* t *which splits from* $A(t)$. *Equation* (2) *can have no more than two parameterized singular solution rays.*

In order to bring the preceding results concerning fragmentary and parameterized singular solution rays into proper focus, we will consider two cases according to whether or not all four of the conditions

(19) $A_8 \equiv pq' - p'q - q^2 = 0$, (19a) $rs' - r's - s^2 = 0$,

(20) $A_5 \equiv cp - bq = 0$, (20a) $cr - bs = 0$

are satisfied. The examples of § 5 will show that both of these cases can occur in practice. *If not all of the conditions* (19), (20), (19a), (20a) *are satisfied, let us agree to choose the notation for* p, q *and* r, s *in equation* (2) *so that conditions* (19) *and* (20) *are not both satisfied.*

Case I: $A_8 = 0$ and $A_5 = 0$.

Here, the conditions (19), (20), (19a), (20a) are all fulfilled. We have $A_5 = A_1 = A_8 = A_0 = 0$. With $A_8 = 0$ and $A_5 = 0$, $Q(y) = 0$ possesses a fragmentary solution ray which is also singular. Furthermore, the allocation equation

$$A(t) \equiv t(A_3 t' + A_6 t^2 + A_4 t + A_2) = 0$$

is multiplicatively reducible. The zero $t_0 = 0$ of the factor t of $A(t)$ specifies a parameterized singular solution ray of $Q(y) = 0$. Thus, $A(t)$ is multiplicatively reducible and $Q(y) = 0$ possesses two (necessarily distinct) singular solution rays (one fragmentary and one parameterized). An interchange of the letters p, q with r, s would merely interchange the roles of the fragmentary and parameterized singular solution rays. Trivially, $Q(y) = 0$ possesses singular solution rays if and only if $A(t)$ is multiplicatively reducible.

Case II: Not both $A_8 = 0$ and $A_5 = 0$.

There can be no singular fragmentary solution rays. A singular solution ray must necessarily be parameterized and, thus, can occur if and only if $A(t) = 0$ is multiplicatively reducible.

The results of the present section are summarized in

Theorem II: *With the convention made as to choice of* p, q *and* r, s, *equation* (2) *(with* $a \neq 0$*) possesses singular solution rays if and only if its allocation equation* $A(t) = 0$ *is multiplicatively reducible. When* $A(t) = 0$ *is multiplicatively reducible, the zeros* t_0 *of the quadratic or linear polynomial in* t *which splits from* $A(t)$ *give rise to singular parameterized solution rays* $\{y_{t_0}\}$. *When* $A_8 = 0$ *and* $A_5 = 0$, *there exists one singular fragmentary and one singular parameterized solution ray. Otherwise, singular solution rays must be parameterized and can not exceed two in number.*

§ 4. Case: $a = 0$ (outlined)

Here, the multiplicatively irreducible equation (2) becomes

$$(2') \qquad Q(y) \equiv y''(by' + cy) + (py' + qy)(ry' + sy) = 0$$

and the considerations about fragmentary solution rays are exactly the same as before. We first note that the equations $pt - b = 0$ and $qt - c = 0$ possess no common solutions (or the condition of multiplicative irreducibility of $Q(y)$ would be contradicted). Similarly, the differential equations $by' + cy = 0$ and $ry' + sy = 0$ can not possess a common non-zero solution. Now, a non-fragmentary solution ray $\{y_0\}$ by means of the formula

$$(6') \qquad \frac{by_0' + cy_0}{py_0' + qy_0} = -\frac{ry_0' + sy_0}{y_0''} = t_0$$

gives rise to a non-zero field element t_0. We consider the equations

$$(8') \qquad ty'' + ry' + sy = 0\,,$$

$$(9') \qquad (pt - b)y' + (qt - c)y = 0\,.$$

There is a one-to-one correspondence between non-fragmentary solution rays $\{y_0\}$ of equation (2′) and non-zero field elements t_0 for which equations (8′) and (9′) possess common solutions of the form (t_0, y_0) with $y_0 \neq 0$. For such a t_0 we have $pt_0 - b \neq 0$ (otherwise $qt_0 - c$ would also be zero) and the corresponding parameterized solution ray $\{y_{t_0}\}$ is specified by the solutions of

$$(11') \qquad (pt_0 - b)y' + (qt_0 - c)y = 0\,.$$

The last equation has the same solutions as equation (11) of § 2 when we set $a = 0$ and remember $t_0 \neq 0$. The Lemma of § 1 applied to the differential polynomials in (8′) and (9′) shows that the elements t_0 are given precisely as the non-zero solutions of the allocation equation (12) of § 2 (in which we set $a = 0$).

Due to the multiplicative irreducibility of $Q(y)$, the equation $S(y) \equiv by' + cy = 0$ can not possess a common non-zero solution with either of the equations $py' + qy = 0$, $ry' + sy = 0$.

The results of the present section are summarized in

Theorem III: *For the case $a = 0$ there can be no singular solution rays. The solution procedure given in Theorem I is applicable here also provided that we set $a = 0$ in both the correlation and allocation equations and consider only non-zero solutions t_0 of the latter.*

§ 5. Examples

In *Example* 0 we have the case $a \neq 0$ and no singular solution rays. *Example I* is particularly interesting because it possesses one singular solution ray and the Appell condition [5] is not satisfied. *Example II* has two singular solution rays, one of which is fragmentary. In *Examples III* and *IV* there are two singular solution rays, both of which are parameterized. *Example IV* is rather involved and affords a good check on the computations of § 2. For an

integer n greater than 2, *Example V* has precisely n as the maximum number of linearly independent solutions. *Example VI* possesses infinitely many linearly independent solutions.

The symbol x will denote a solution of the differential equation $y' - 1 = 0$. Arbitrary constant elements will be denoted by C, C_1, C_2, K.

Example 0: $Q(y) \equiv a y'' y'' + y'' y + (y')(-y') = 0$.

Here, a denotes a non-zero constant element. We have $\Delta = 1/4 \neq 0$,

$$M(t, y) \equiv (t^2 - a) y' + (-t) y = 0 ,$$
$$A(t) \equiv (t^2 + a) t' - a = 0 .$$

With $A_8 = 0$ and $A_5 = 1 \neq 0$, the solution ray $\{1\}$ of $py' + qy \equiv y' = 0$ is a non-singular fragmentary solution ray of $Q(y) = 0$. The remaining solution rays of $Q(y) = 0$ are given by the solution rays of $M(t_0, y) = 0$ corresponding to each solution t_0 of the equation $(1/3)t^3 + at - ax + C = 0$.

Example I: $Q(y) \equiv (b^2/pr) y'' y'' + b y'' y' - pr y'' y + (py')(ry') = 0$.

Here, b, p, r denote non-zero constant elements. We have $\Delta = -p^3 r^3/4 \neq 0$,

$$M(t, y) \equiv (pt^2 - bt + b^2/p) y' + (prt) y = 0 ,$$
$$A(t) \equiv (-p^2 r t^2 + b^2 r) t' - bpr^2 t + b^2 r^2 = 0 ,$$
$$A(t) \equiv (b - pt)\,[(b + pt) r t' + b r^2] = 0 .$$

With $A_8 = 0$ and $A_5 = -p^2 r \neq 0$ the solution ray $\{1\}$ of $py' + qy \equiv py' = 0$ is a non-singular fragmentary solution ray of $Q(y) = 0$. The zero $t_0 = b/p$ of the factor $(b - pt)$ of $A(t)$ specifies one singular solution ray of $Q(y) = 0$ as the solution ray of $by' + (pr)y = 0$. The remaining solution rays of $Q(y) = 0$ are given by the solution rays of the equation $M(t_0, y) = 0$ corresponding to the solutions t_0 of $(p/2)t^2 + bt + brx + C = 0$.

Example II: $Q(y) \equiv (-x^3/2) y'' y'' + (y')(xy' - y) = 0$.

Here, it is assumed that the equation $y^2 - x = 0$ has a solution in $\mathfrak{F}$ denoted by $x^{(1/2)}$. We have $\Delta = x^3/8 \neq 0$,

$$M(t, y) \equiv (t^2 - x^4/2) y' + (x^3/2) y = 0 ,$$
$$A(t) \equiv -x^3 t t' + t^3 + (3x^2/2) t^2 - (1/2) x^4 t = 0 ,$$
$$A(t) \equiv (-x^3 t)\,[t' - (1/x^3) t^2 - (3/2x) t + x/2] = 0 .$$

All four of the conditions (19) $A_8 = 0$, (20) $A_5 = 0$, (19a), (20a) of § 3 are satisfied. The equation $py' + qy \equiv y' = 0$ specifies the fragmentary solution ray $\{1\}$ as one of the singular solution rays of $Q(y) = 0$. The equation $M(0, y) \equiv$ $\equiv (-x^3/2)(xy' - y) = 0$, corresponding to the zero $t_0 = 0$ of the factor $(-x^3 t)$ of $A(t)$, specifies the remaining singular solution ray $\{x\}$ of $Q(y) = 0$. The remaining solutions of $A(t) = 0$ are expressible in the form

$$t_0 = \frac{3C_1 x^4 + C_2 x^{(11/2)}}{3C_1 x^3 - 2C_2 x^{(7/2)}} .$$

Here C_1 and C_2 denote arbitrary constant elements not both zero and the powers of x appear as integral powers of $x^{(1/2)}$. For these values of t_0 the equation $M(t_0, y) = 0$ becomes

$$y' - \frac{-9C_1^2/x^2 + 12C_1C_2/x^{(1/2)} - 4C_2^2 x}{+9C_1^2/x + 24C_1C_2x^{(1/2)} - 2C_2^2x^2}\, y = 0$$

and gives the remaining solution rays $\{9C_1^2(1/x) + 24C_1C_2x^{(1/2)} - 2C_2^2x^2\}$ of $Q(y) = 0$.

Example III: $\quad Q(y) \equiv a y'' y'' - 2pry''y + (py')(ry') = 0.$

Let a, p, r denote non-zero constant elements. We have $\Delta = -p^3r^3 \neq 0$,

$$M(t, y) \equiv (pt^2 + ar)y' + (2prt)y = 0\,,$$

$$A(t) \equiv (-2p^2rt^2 + 2apr^2)t' + (-2p^2r^2t^2 + 2apr^3) = 0\,,$$

$$A(t) \equiv -2pr(pt^2 - ar)(t' + r) = 0\,.$$

With $A_6 = 0$ and $A_5 = -2p^2r \neq 0$ the solution ray $\{1\}$ of $py' + qy = py' = 0$ is a non-singular fragmentary solution ray of $Q(y) = 0$. The two zeros of the factor $(pt^2 - ar)$ of $A(t)$ give rise to two singular solution rays of $Q(y) = 0$. For the other solutions of $A(t) = 0$ given by $t_0 = -rx + C$ the equation $M(t_0, y) = 0$ becomes

$$(pr^2x^2 - 2Cprx + C^2p + ar)y' + (-2pr^2x + 2Cpr)y = 0$$

and gives the remaining solution rays $\{pr^2x^2 - 2Cprx + C^2p + ar\}$ of $Q(y) = 0$.

Example IV:

$$Q(y) \equiv 3x^4y''y'' - 18x^3y''y' + 16x^2y''y + (4xy' - 4y)(7xy' - 6y) = 0.$$

With the discriminant $\Delta = -4x^6 \neq 0$ we have

$$M(t, y) \equiv (4xt^2 + 18x^3t + 21x^5)y' + (-4t^2 - 16x^2t - 18x^4)y = 0\,,$$

$$A(t) \equiv (-8x^3t^2 - 24x^5t - 12x^7)t' + (8x^2t^3 + 4x^4t^2 - 48x^6t - 30x^8) = 0\,,$$

$$A(t) \equiv (2xt^2 + 6x^3t + 3x^5)(-4x^2t' + 4xt - 10x^3) = 0\,.$$

The conditions $A_6 = 0$ and $A_5 \neq 0$ indicate that the solution ray $\{x\}$ of $py' + qy \equiv 4xy' - 4y = 0$ is a non-singular fragmentary solution ray of $Q(y) = 0$. The two zeros of the factor $(2t^2 + 6x^2t + 3x^4)$ of $A(t)$ give rise to two singular solution rays of $Q(y) = 0$. The other solutions of $A(t) = 0$ are given by $t_0 = -(5/2)x^2 - (C/2)x$. The equation $M(t_0, y) = 0$ becomes $(x^5 + Cx^4 + C^2x^3)y' + (-3x^4 - 2Cx^3 - C^2x^2)y = 0$ and gives the remaining solution rays $\{x^3 + Cx^2 + C^2x\}$ of $Q(y) = 0$.

Example V: $Q(y) \equiv (n-1)y''y + (2-n)y'y' = 0.$

Here, n denotes a positive integer greater than 2 and we have

$$\Delta = (n-1)^2(n-2)/4 \neq 0\,,$$

$$M(t, y) \equiv (2-n)t^2y' + (1-n)ty = 0\,,$$

$$A(t) \equiv (n-1)(2-n)t^2t' + (1-n)t^2 = 0\,.$$

The condition $A_8 = 0$ is satisfied and the solution ray $\{1\}$ of $py' + qy \equiv (2-n)y' = 0$ is a fragmentary solution ray of $Q(y) = 0$. The non-zero solutions of $A(t) = 0$ are given by $t_0 = x/(2-n) + K$. The corresponding solution rays of $M(t_0, y) = 0$ are given by $\{[x + K(2-n)]^{n-1}\}$. By taking the fragmentary solution ray into account, we see that the complete solution of $Q(y) = 0$ is given by $y_0 = [C_1 x + C_2]^{n-1}$. Thus, the equation $Q(y) = 0$ has precisely n as the maximum number of linearly independent solutions.

Example VI: It can be shown that any equation of the form

$$Q(y) \equiv cy''y - cy'y' + ey'y + fyy = 0 \quad \text{with} \quad c \neq 0$$

possesses an infinite number of linearly independent solutions. In particular, the elements $\ldots x^{-3}, x^{-2}, x^{-1}, 1, x, x^2, x^3, \ldots$ are solutions of the equation $Q(y) \equiv xy''y - xy'y' + y'y = 0$.

Bibliography

[1] Appell, P.: Sur les équations différentielles algébriques et homogènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées. C. R. Acad. Sci. (Paris) **104**, 1776—1779 (1887). — [2] Appell, P.: Sur les invariants des équations différentielles. C. R. Acad. Sci. (Paris) **105**, 55—58 (1887). — [3] Appell, P.: Sur une classe d'équations différentielles réductibles aux équations linéaires. C. R. Acad. Sci. (Paris) **107**, 776—778 (1888). — [4] Appell, P.: Sur les équations différentielles homogènes du second ordre à coefficients constants. Toulouse Ann. **3**, K 1—K 12 (1889). — [5] Appell, P.: Sur les invariants de quelques équations différentielles. J. Math. (4), **5**, 361—423 (1889). — [6] Bôcher, M.: Introduction to Higher Algebra. New York 1907. — [7] Caligo, D.: Sopra una classe di equazioni differenziali non lineari. Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3), **1**, 1—24 (1952). — [8] Curtiss, D. R.: On the invariants of a homogeneous quadratic differential equation of the second order. Amer. J. Math. **25**, 365—382 (1903). — [9] Kamke, E.: Differentialgleichungen — Lösungsmethoden und Lösungen. (Third edition) New York 1948. — [10] Kolchin, E. R.: Galois theory of differential fields. Amer. J. Math. **75**, 753—824 (1953). — [11] Liouville, R.: Sur une classe d'équations différentielles non linéaires. C. R. Acad. Sci. (Paris) **103**, 520—523 (1886). — [12] Mitrinovitch, D. S.: Transformation et intégration d'une équation différentielle du premier ordre. Pub. Math. Univ. Belgrade **5**, 10—22 (1936). — [13] Ore, Ö.: Formale Theorie der linearen Differentialgleichungen (I). J. reine angew. Math. **167**, 221—234 (1932). — [14] Ore, Ö.: Theory of non-commutative polynomials. Ann. Math. **34**, 480—508 (1933). — [15] Ritt, J. F.: Differential Algebra. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. Vol. XXXIII. New York 1950. — [16] van der Waerden, B. L.: Modern Algebra, vol. I (second edition). New York 1949.

(Received January 2, 1960)

OTHMER, F.-E.
Math. Annalen 141, 99—106 (1960)

Elementarer Beweis des Hauptsatzes über meromorphe Funktionenkörper

Von
FRIEDRICH-ERNST OTHMER in Göttingen

Einleitung

$\mathfrak{P}$ sei eine n-dimensionale kompakte komplexe Mannigfaltigkeit. K sei der Körper der eindeutigen meromorphen Funktionen auf $\mathfrak{P}$.

Definition 1: Die Funktionen $f_1, \ldots, f_r \in K$ heißen algebraisch abhängig auf $\mathfrak{P}$, falls es ein nicht identisch verschwindendes Polynom $F(x_1, \ldots, x_r)$ mit komplexen Koeffizienten gibt, so daß die meromorphe Funktion $F(f_1, \ldots, f_r)$ auf ganz $\mathfrak{P}$ identisch verschwindet.

$f_1, \ldots, f_r$ seien beliebig $\in K$. Die Menge $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}'(f_1, \ldots, f_r)$ aller Punkte a von $\mathfrak{P}$, in denen jede der Funktionen $f_1, \ldots, f_r$ regulär ist, ist eine offene und dichte Menge in $\mathfrak{P}$. Ist a beliebig $\in \mathfrak{P}'$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ irgendein lokales Koordinatensystem in der Umgebung von a, so werde der von der speziellen Koordinatenwahl offenbar unabhängige Rang der Funktionalmatrix $(f_{i z_k})$ im Punkte a mit $\varrho_a(f_1, \ldots, f_r)$ bezeichnet. Das Maximum aller Werte $\varrho_a(f_1, \ldots, f_r)$ werde mit $\varrho(f_1, \ldots, f_r)$ bezeichnet.

Definition 2: Die Funktionen $f_1, \ldots, f_r \in K$ heißen analytisch abhängig auf $\mathfrak{P}$, falls $\varrho(f_1, \ldots, f_r) < r$ ist.

Ersichtlich sind mehr als n Funktionen aus K stets analytisch abhängig. In der vorliegenden Arbeit wird ein einfacher Beweis für die beiden folgenden Sätze gegeben.

Satz 1: *$f_1, \ldots, f_r$ seien beliebige Funktionen $\in K$. Diese sind dann und nur dann analytisch abhängig, falls sie algebraisch abhängig sind.*

Satz 2: *Ist m die Maximalzahl algebraisch unabhängiger Funktionen in K, so ist K für jedes System $f_1, \ldots, f_m$ algebraisch unabhängiger Funktionen eine endliche algebraische Erweiterung des Körpers der rationalen Funktionen von $f_1, \ldots, f_m$ in bezug auf den Körper der komplexen Zahlen.*

Die Sätze 1 und 2 sind in der Literatur bereits für kompakte komplexe Räume auf schwierigerem Wege bewiesen (vgl. [1], [2]). In einer Arbeit von C. L. SIEGEL (vgl. [3]) wird ein kurzer und elementarer Beweis der folgenden Sätze gegeben.

Satz 1': *Je $n+1$ Funktionen aus K sind algebraisch abhängig.*

Satz 2': *Gibt es n algebraisch unabhängige Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ aus K, so ist K eine endliche algebraische Erweiterung des Körpers der rationalen Funktionen von $f_1, \ldots, f_n$.*

Die zum Beweise dieser Sätze von C. L. SIEGEL entwickelten Methoden werden zum Beweise der Sätze 1, 2 in der vorliegenden Arbeit in naheliegender Weise modifiziert. In § 1 werden einige zum Beweise nötige Hilfssätze formuliert und bewiesen. In § 2 folgt der Beweis der Sätze 1, 2.

§ 1. Hilfssätze

Hilfssatz 1: Sind die Funktionen $f_1, \ldots, f_r \in K$ algebraisch abhängig, so sind sie auch analytisch abhängig.

Der Beweis erfolgt in bekannter Weise durch Auswahl eines nicht identisch verschwindenden Polynoms $F(x_1, \ldots, x_r)$ kleinsten Grades mit der Eigenschaft $F(f_1, \ldots, f_r) \equiv 0$ auf $\mathfrak{P}$ und Bildung der partiellen Ableitungen dieser Gleichung.

Hilfssatz 2: Sind $f_1, \ldots, f_r$ beliebig $\in K$ mit $\varrho(f_1, \ldots, f_r) = s$, so ist die Menge $\mathfrak{P}_s$ aller Punkte a mit $\varrho_a(f_1, \ldots, f_r) = s$ eine offene und dichte Menge in $\mathfrak{P}$.

Beweis: $\mathfrak{P}$ werde durch die endlich vielen (offenen) Umgebungen $\mathfrak{R}_a(a = a_1, \ldots, a_p)$ überdeckt. z_a sei ein lokales Koordinatensystem auf $\mathfrak{R}_a$. Die Reihenfolge der Punkte a_i sei so gewählt, daß $\mathfrak{R}_{a_1} \cap \mathfrak{P}_s$ und $\mathfrak{R}_{a_i} \cap \mathfrak{V}_i$ $(i = 2, \ldots, p)$ nicht leer sind, worin $\mathfrak{V}_i$ die Vereinigungsmenge der Umgebungen $\mathfrak{R}_{a_1}, \ldots, \mathfrak{R}_{a_{i-1}}$ ist. Jede s-reihige Unterdeterminante der Funktionalmatrix $(f_{i z_k})$ ist auf $\mathfrak{R}_a$ eine meromorphe Funktion, deren reguläre Nichtnullstellen somit entweder eine leere oder eine offene und dichte Menge auf $\mathfrak{R}_a$ bilden. Daher ist auch $\mathfrak{R}_a \cap \mathfrak{P}_s$ entweder leer oder eine offene und dichte Menge auf $\mathfrak{R}_a$. Durch vollständige Induktion folgt nun unmittelbar die Behauptung des Hilfssatzes.

Hilfssatz 3: Ist f analytisch abhängig von $f_1, \ldots, f_r$ und $F(x, x_1, \ldots, x_r)$ ein beliebiges Polynom mit komplexen Koeffizienten, so ist auch $F(f, f_1, \ldots, f_r)$ analytisch abhängig von $f_1, \ldots, f_r$. (f heißt analytisch abhängig von $f_1, \ldots, f_r$, falls $f, f_1, \ldots, f_r$ analytisch abhängig und $f_1, \ldots, f_r$ analytisch unabhängig sind.)

Beweis: Σ sei die Menge aller von $f_1, \ldots, f_r$ analytisch abhängigen Funktionen. Es seien g, h beliebig $\in \Sigma$. $\mathfrak{R}_{a_0}$ sei eine Umgebung eines Punktes a_0, in welcher $g, h, f_1, \ldots, f_r$ regulär sind, z ein lokales Koordinatensystem in $\mathfrak{R}_{a_0}$. Durch Betrachtung der entsprechenden Funktionalmatrizen erkennt man unmittelbar, daß $\varrho_a(g \pm h, f_1, \ldots, f_r) < r + 1$ und $\varrho_a(gh, f_1, \ldots, f_r) < r + 1$ für alle $a \in \mathfrak{R}_{a_0}$ ist. Nach Hilfssatz 2 muß daher auch $\varrho(g \pm h, f_1, \ldots, f_r) < r + 1$ und $\varrho(gh, f_1, \ldots, f_r) < r + 1$ sein. Also ist $g \pm h$ und $gh \in \Sigma$. Σ ist daher ein Ring. Die Behauptung des Hilfssatzes ergibt sich nun sofort, wenn man beachtet, daß die Konstanten und die Funktionen $f, f_1, \ldots, f_r$ in Σ enthalten sind.

Hilfssatz 4: f sei eine von $f_1, \ldots, f_r$ analytisch abhängige Funktion. Für jeden Punkt einer gewissen Umgebung $\mathfrak{R}_a$ von a mit den lokalen Koordinaten z seien die Funktionen $f, f_1, \ldots, f_r$ regulär und die Determinante $D = |f_{i z_k}|$ $(i, k = 1, \ldots, r)$ von 0 verschieden. Für die partiellen Ableitungen von $f, f_1, \ldots, f_r$ gelten dann in $\mathfrak{R}_a$ die Beziehungen:

$$f_{z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}} = \sum B^{k_1 \cdots k_n}_{\nu_1 \cdots \nu_r} f_{z_1^{\nu_1} \cdots z_r^{\nu_r}},$$

wobei die Summe über alle Kombinationen nicht-negativer ganzer Zahlen $(\nu_1, \ldots, \nu_r)$ mit $1 \leqq \nu_1 + \cdots + \nu_r \leqq k_1 + \cdots + k_n$ zu erstrecken ist und die $B^{k_1 \cdots k_n}_{\nu_1 \cdots \nu_r}$ in $\mathfrak{K}_a$ reguläre Funktionen sind.

Beweis: Der Beweis werde durch Induktion nach $k = k_1 + \cdots + k_n$ geführt. Für $k = 1$ werde die in $\mathfrak{K}_a$ identisch verschwindende Determinante

$$\begin{vmatrix} f_{1z_1} \cdots f_{1z_r} & f_{1z_i} \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \\ f_{rz_1} \cdots f_{rz_r} & f_{rz_i} \\ f_{z_1} \;\cdots f_{z_r} & f_{z_i} \end{vmatrix}$$

nach der letzten Zeile entwickelt und durch D dividiert. Es folgt

$$f_{z_i} = \sum_{\nu=1}^{r} A^i_\nu \cdot f_{z_\nu} \qquad (i = 1, \ldots, n)\,,$$

worin die A^i_ν in $\mathfrak{K}_a$ reguläre Funktionen sind. Der Hilfssatz ist daher für $k = 1$ richtig. Unter der Annahme seiner Richtigkeit für $k \leqq k^*$ ergibt sich seine Gültigkeit für $k = k^* + 1$ unmittelbar durch Anwendung der elementaren Differentiationsregeln und Benutzung der Gleichung für $k = 1$.

Als spezielle Folgerung aus Hilfssatz 4 werde angemerkt: Sind sämtliche partiellen Ableitungen $f_{z_1^{\nu_1} \cdots z_r^{\nu_r}}$ $(0 \leqq \nu_1 + \cdots + \nu_r \leqq h - 1)$ im Punkte a gleich 0, so sind im Punkte a sämtliche Ableitungen $f_{z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}}$ $(0 \leqq k_1 + \cdots + k_n \leqq h - 1)$ gleich 0.

Es sei $z = (z_1, \ldots, z_n)$ ein Punkt des n-dimensionalen Zahlenraumes C^n. Unter $|z|$ werde das Maximum der n absoluten Beträge $|z_k|$ verstanden. Für eine beliebige komplexe Zahl λ gilt dann offenbar

$$|\lambda z| = |\lambda|\,|z|\,.$$

Hilfssatz 5 (Verallgemeinerung des Schwarzschen Lemmas, vgl. [3]):

Es sei $\varphi(z)$ eine für $|z| \leqq r$ konvergente Potenzreihe der Variablen $z_1, \ldots, z_n$, welche dort absolut $\leqq M$ ist. Treten in der Reihe keine Glieder der Ordnung $0, 1, \ldots, h - 1$ auf, so gilt

$$|\varphi(z)| \leqq M \left(\frac{|z|}{r}\right)^h \qquad (|z| \leqq r)\,.$$

Der Beweis (vgl. [3]) ist sehr kurz und sei daher an dieser Stelle noch einmal angeführt: Für $z = 0$ ist die Behauptung trivial. Bei festem z mit $0 < |z| \leqq r$ ist die Funktion $\varphi(\lambda z)$ eine für $|\lambda| \leqq \frac{r}{|z|}$ reguläre Funktion der komplexen Variablen λ, welche für $\lambda = 0$ mindestens von h-ter Ordnung verschwindet. Daher ist die Funktion $\lambda^{-h}\varphi(\lambda z)$ für $|\lambda| \leqq \frac{r}{|z|}$ ebenfalls eine reguläre Funktion von λ, für welche auf dem Kreisrande $|\lambda| = \frac{r}{|z|}$ die Abschätzung

$$|\lambda^{-h}\varphi(\lambda z)| \leqq M \left(\frac{|z|}{r}\right)^h$$

gilt. Für $\lambda = 1$ liefert das Maximumprinzip

$$|\varphi(z)| \leqq M\left(\frac{|z|}{r}\right)^{h},$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

§ 2. Beweis der Sätze 1, 2

I. Beweis von Satz 1

Der eine Teil von Satz 1 ist durch Hilfssatz 1 bewiesen. Der noch zu beweisende Teil des Satzes kann offenbar so formuliert werden:

Sind $f_1, \ldots, f_m$ analytisch unabhängige Funktionen $\in K$ und ist f eine von $f_1, \ldots, f_m$ analytisch abhängige Funktion, so sind $f, f_1, \ldots, f_m$ algebraisch abhängig.

$\mathfrak{a}$ sei ein beliebiger Punkt auf $\mathfrak{P}$, $z_\mathfrak{a}$ ein lokales Koordinatensystem in der Umgebung von $\mathfrak{a}$, in welchem der Punkt $\mathfrak{a}$ die Koordinaten $z_\mathfrak{a} = 0$ besitzt. Ist f eine meromorphe Funktion auf $\mathfrak{P}$, so läßt sich eine abgeschlossene Umgebung $\mathfrak{K}_\mathfrak{a}(|z_\mathfrak{a}| \leqq r_\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$ so wählen, daß f in $\mathfrak{K}_\mathfrak{a}$ eine Quotientendarstellung

$$(1) \qquad f(\mathfrak{z}) = \frac{p_\mathfrak{a}(z_\mathfrak{a})}{q_\mathfrak{a}(z_\mathfrak{a})} \qquad (\mathfrak{z} \in \mathfrak{K}_\mathfrak{a})$$

besitzt. Hierin sind $p_\mathfrak{a}, q_\mathfrak{a}$ teilerfremde Potenzreihen, welche für $|z_\mathfrak{a}| \leqq r_\mathfrak{a}$ konvergieren; $q_\mathfrak{a}$ verschwindet nicht identisch. Nach den Teilbarkeitssätzen über Potenzreihen sind dann bei hinreichend kleinem $r_\mathfrak{a}$ die regulären Funktionen $p_\mathfrak{a}, q_\mathfrak{a}$ überall auf $|z_\mathfrak{a}| \leqq r_\mathfrak{a}$ lokal teilerfremd, und es besteht in einem nichtleeren Durchschnitt $\mathfrak{K}_\mathfrak{a} \cap \mathfrak{K}_{\mathfrak{a}^*}$ die Beziehung

$$(2) \qquad q_{\mathfrak{a}^*}(z_{\mathfrak{a}^*}) = \mathfrak{j}_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}^*}(\mathfrak{z})\, q_\mathfrak{a}(z_\mathfrak{a}) \qquad (\mathfrak{z} \in \mathfrak{K}_\mathfrak{a} \cap \mathfrak{K}_{\mathfrak{a}^*})$$

mit $\mathfrak{j}_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}^*}(\mathfrak{z})$ als lokaler Einheit in $\mathfrak{K}_\mathfrak{a} \cap \mathfrak{K}_{\mathfrak{a}^*}$. $f_1, \ldots, f_m$ seien analytisch unabhängige Funktionen. f sei von $f_1, \ldots, f_m$ analytisch abhängig. $r_\mathfrak{a}$ werde so klein gewählt, daß $f, f_1, \ldots, f_m$ in $\mathfrak{K}_\mathfrak{a}$ die Quotientendarstellungen

$$f(\mathfrak{z}) = \frac{p_\mathfrak{a}(z_\mathfrak{a})}{q_\mathfrak{a}(z_\mathfrak{a})}\,; \quad f_i(\mathfrak{z}) = \frac{p_{i\mathfrak{a}}(z_\mathfrak{a})}{q_{i\mathfrak{a}}(z_\mathfrak{a})} \qquad (\mathfrak{z} \in \mathfrak{K}_\mathfrak{a}; i = 1, \ldots, m)$$

besitzen, für welche in einem nichtleeren Durchschnitt $\mathfrak{K}_\mathfrak{a} \cap \mathfrak{K}_{\mathfrak{a}^*}$ die Beziehungen

$$q_{\mathfrak{a}^*}(z_{\mathfrak{a}^*}) = \mathfrak{j}_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}^*}(\mathfrak{z})\, q_\mathfrak{a}(z_\mathfrak{a})\,; \; q_{i\mathfrak{a}^*}(z_{\mathfrak{a}^*}) = \mathfrak{j}_{i\mathfrak{a}\mathfrak{a}^*}(\mathfrak{z})\, q_{i\mathfrak{a}}(z_\mathfrak{a}) \qquad (\mathfrak{z} \in \mathfrak{K}_\mathfrak{a} \cap \mathfrak{K}_{\mathfrak{a}^*}\,; i = 1, \ldots, m)$$

gelten. $\mathfrak{L}_\mathfrak{a}$ sei die durch $|z_\mathfrak{a}| \leqq \frac{1}{3} e^{-1} r_\mathfrak{a}$ definierte Umgebung von $\mathfrak{a}$. Nach dem Überdeckungssatz können dann endlich viele Punkte $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_p$ so gewählt werden, daß die zugehörigen Umgebungen $\mathfrak{L}_\mathfrak{a}$ eine Überdeckung von $\mathfrak{P}$ bilden. Ferner können zwei Zahlen ω, μ so gewählt werden, daß die Abschätzungen

$$(3) \qquad |\mathfrak{j}_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}^*}(\mathfrak{z})| < e^{\mu}\,; \; \left|\prod_{i=1}^{m} \mathfrak{j}_{i\mathfrak{a}\mathfrak{a}^*}(\mathfrak{z})\right| < e^{\omega} \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_p; \mathfrak{z} \in \mathfrak{K}_\mathfrak{a} \cap \mathfrak{K}_{\mathfrak{a}^*})$$

gültig sind.

Wegen $\varrho(f_1, \ldots, f_m) = m$ bilden nach Hilfssatz 2 die Punkte $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{P}$ mit $\varrho_\mathfrak{b}(f_1, \ldots, f_m) = m$ eine offene und dichte Menge in $\mathfrak{P}$. Daher kann jedem

Punkt $\mathfrak{a}$ ein Punkt $\mathfrak{b} \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{a}}$ mit $\varrho_{\mathfrak{b}}(f_1, \ldots, f_m) = m$ zugeordnet werden. $\mathfrak{b}$ werde außerdem so gewählt, daß neben $f_1, \ldots, f_m$ auch f in $\mathfrak{b}$ regulär ist. Die Koordinaten von $\mathfrak{b}$ seien $z_{\mathfrak{a}} = b$. Definiert man $\mathfrak{R}_{\mathfrak{b}}$ durch $|z_{\mathfrak{a}} - b| \leqq r = \frac{r_{\mathfrak{a}}}{3} + e \cdot |b|$ und $\mathfrak{L}_{\mathfrak{b}}$ durch $|z_{\mathfrak{a}} - b| \leqq e^{-1} r_{\mathfrak{b}}$, so ist $\mathfrak{L}_{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{L}_{\mathfrak{b}}$ und $\mathfrak{R}_{\mathfrak{b}} \subset \mathfrak{R}_{\mathfrak{a}}$. Denn: Aus $|z_{\mathfrak{a}}| \leqq r_{\mathfrak{a}} \cdot \frac{e^{-1}}{3}$ folgt $|z_{\mathfrak{a}} - b| \leqq |z_{\mathfrak{a}}| + |b| \leqq \frac{e^{-1}}{3} \cdot r_{\mathfrak{a}} + |b| = e^{-1} r$, also $\mathfrak{L}_{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{L}_{\mathfrak{b}}$; aus $|z_{\mathfrak{a}} - b| \leqq r_{\mathfrak{b}} = \frac{r_{\mathfrak{a}}}{3} + e \cdot |b|$ folgt $|z_{\mathfrak{a}}| \leqq |b| + |z_{\mathfrak{a}} - b| \leqq |b| + \frac{r_{\mathfrak{a}}}{3} + e \cdot |b| \leqq$ $\leqq \frac{e^{-1}}{3} r_{\mathfrak{a}} + \frac{r_{\mathfrak{a}}}{3} + \frac{r_{\mathfrak{a}}}{3} < r_{\mathfrak{a}}$, also $\mathfrak{R}_{\mathfrak{b}} \subset \mathfrak{R}_{\mathfrak{a}}$. Die Umgebungen $\mathfrak{L}_{\mathfrak{b}}$ von $\mathfrak{b}(\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_p)$ bilden wegen $\mathfrak{L}_{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{L}_{\mathfrak{b}}$ eine Überdeckung von $\mathfrak{P}$. Durch die analytische Transformation $z_{\mathfrak{a}} = z_{\mathfrak{b}} + b$ sind in $\mathfrak{R}_{\mathfrak{b}}$ lokale Parameter $z_{\mathfrak{b}}$ gegeben. Durch Umordnen der Potenzreihen $p_{\mathfrak{a}}, q_{\mathfrak{a}}, p_{k\mathfrak{a}}, q_{k\mathfrak{a}}$ nach Potenzen von z erhält man in

$$f(\mathfrak{z}) = \frac{p_{\mathfrak{b}}(z_{\mathfrak{b}})}{q_{\mathfrak{b}}(z_{\mathfrak{b}})}\ ;\ f_k(\mathfrak{z}) = \frac{p_{k\mathfrak{b}}(z_{\mathfrak{b}})}{q_{k\mathfrak{b}}(z_{\mathfrak{b}})} \quad (\mathfrak{z} \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{b}};\ k = 1, \ldots, m)$$

die Quotientendarstellungen von $f, f_1, \ldots, f_m$ in $\mathfrak{R}_{\mathfrak{b}}$. Wegen $\mathfrak{R}_{\mathfrak{b}} \subset \mathfrak{R}_{\mathfrak{a}}$ ist in einem nichtleeren Durchschnitt $\mathfrak{R}_{\mathfrak{b}} \cap \mathfrak{R}_{\mathfrak{b}^*}$

$$\mathfrak{j}_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}}(\mathfrak{z}) = \mathfrak{j}_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}^*}(\mathfrak{z});\ \mathfrak{j}_{k\mathfrak{b}\mathfrak{b}^*}(\mathfrak{z}) = \mathfrak{j}_{k\mathfrak{a}\mathfrak{a}^*}(\mathfrak{z}) \quad (\mathfrak{z} \in \mathfrak{R}\ \cap \mathfrak{R}_{\mathfrak{b}^*};\ k = 1, \ldots, m)'.$$

Die Abschätzungen (3) bleiben daher unverändert gültig. Es werde die Zahl

$$s = [\omega^m p] + 1 \tag{4}$$

eingeführt. Für $h = 1, 2, \ldots$ sei $t_h = t$ die größte nichtnegative ganze Zahl mit

$$s t^m < p h^m. \tag{5}$$

Aus (5) folgt

$$p h^m \leqq s(t+1)^m < (s+1)(t+1)^m. \tag{6}$$

Aus (6) folgt, daß mit $h \to \infty$ auch $t_h \to \infty$. Wegen $s > \omega^m \cdot p$ kann daher h so groß gewählt werden, daß

$$s > \left(\frac{\mu s}{t} + \omega\right)^m \cdot p$$

gilt. Zusammen mit (5) folgt hieraus

$$\mu s + \omega t < h. \tag{7}$$

Es werde nun mit unbestimmten komplexen Koeffizienten das allgemeine Polynom $F(x, x_1, \ldots, x_m)$ gebildet, welches in x den Grad s und in jedem x_k $(k = 1, \ldots, m)$ den Grad t besitzt. Die Anzahl der Koeffizienten ist

$$A = (s+1)(t+1)^m. \tag{8}$$

Da in den Punkten $\mathfrak{b}_i$ $(i = 1, \ldots, p)$ die Funktionen $f, f_1, \ldots, f_m$ regulär sind und $\varrho_{\mathfrak{b}_i}(f_1, \ldots, f_m) = m$ ist, ist in diesen Punkten auch $F(f, f_1, \ldots, f_m)$ regulär, und es kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, daß in den Punkten $\mathfrak{b}_i$ $(i = 1, \ldots, p)$ die Determinante $D = |f_{j z_k}| \neq 0$ ist $(j, k = 1, \ldots, m;\ z_{\mathfrak{b}} = z = (z_1, \ldots, z_n))$.

Die Koeffizienten von F können in nichttrivialer Weise ($F \not\equiv 0$) so gewählt werden, daß in sämtlichen Punkten $\mathfrak{b}_i$ die partiellen Ableitungen $F_{z_1^{k_1}\cdots z_m^{k_m}}$ ($0 \leq k_1 + \cdots + k_m \leq h - 1$) verschwinden. Denn für jeden Punkt $\mathfrak{b}_i$ ist die Anzahl der zu annullierenden Ableitungen

$$\beta = \binom{m+h-1}{m} = \prod_{k=1}^{m}\left(1 + \frac{h-1}{k}\right) \leq h^m,$$

und es sind daher insgesamt

$$B = p\,\beta \leq p h^m$$

homogene lineare Gleichungen mit A Unbekannten zu erfüllen. Wegen (6) ist aber

$$B \leq p h^m < (s+1)\,(t+1)^m = A\,,$$

so daß eine nichttriviale Lösung existiert.

Da in den Punkten $\mathfrak{b}_i$ die Ableitungen $F_{z_1^{k_1}\cdots z_m^{k_m}} = 0$ ($0 \leq k_1 + \cdots + k_m \leq h - 1$) sind, gilt nach Hilfssatz 4 in diesen Punkten sogar

$$F_{z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n}} = 0 \qquad (0 \leq k_1 + \cdots + k_n \leq h - 1)\,. \tag{9}$$

Setzt man

$$Q_{\mathfrak{b}} = q_{\mathfrak{b}}^s \cdot \prod_{k=1}^{m} q_{k\mathfrak{b}}^t\,; \quad P_{\mathfrak{b}} = Q_{\mathfrak{b}} F(f, f_1, \ldots, f_m)\,, \tag{10}$$

so ist die Funktion $P_{\mathfrak{b}}$ auf $\mathfrak{R}_{\mathfrak{b}}$ regulär, und wegen (9) gilt in den Punkten $\mathfrak{b}_i$

$$P_{\mathfrak{b}\, z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n}} = 0 \qquad (0 \leq k_1 + \cdots + k_n \leq h - 1)\,.$$

Es sei M das Maximum aller absoluten Beträge $|P_{\mathfrak{b}}(z_{\mathfrak{b}})|$ für $|z_{\mathfrak{b}}| \leq r_{\mathfrak{b}}$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_p$. Wird dieses Maximum bei $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ und $z_{\mathfrak{c}} = z^*$ erreicht, so gilt also

$$|P_{\mathfrak{b}}(z_{\mathfrak{b}})| \leq M \quad (|z_{\mathfrak{b}}| \leq r_{\mathfrak{b}};\ \mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_p),\ |P_{\mathfrak{c}}(z^*)| = M \geq 0\,.$$

Der durch z^* bestimmte Punkt $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{R}_{\mathfrak{c}}$ liegt aber auch in einer Umgebung $\mathfrak{L}_{\mathfrak{b}}$, so daß dort nach Hilfssatz 5 sogar die Ungleichung

$$|P_{\mathfrak{b}}(z_{\mathfrak{b}})| \leq M\left(\frac{|z|}{r_{\mathfrak{b}}}\right)^h \leq M e^{-h}$$

gilt. Mit

$$\mathfrak{Z}_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \mathfrak{j}_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}^s \cdot \prod_{k=1}^{m} \mathfrak{j}_{k\mathfrak{b}\mathfrak{c}}^t$$

ergibt sich nach (2), (10) die Beziehung

$$P_{\mathfrak{c}}(z_{\mathfrak{c}}) = \mathfrak{Z}_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}(\mathfrak{z})\, P_{\mathfrak{b}}(z_{\mathfrak{b}}) \qquad (\mathfrak{z} \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{b}} \cap \mathfrak{R}_{\mathfrak{c}})\,.$$

Nach (3) ist

$$|\mathfrak{Z}_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}(\mathfrak{z})| < e^{\mu s + \omega t} \qquad (\mathfrak{z} \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{b}} \cap \mathfrak{R}_{\mathfrak{c}})\,.$$

Es folgt

$$M = |P_{\mathfrak{c}}(z^*)| \leq M e^{\mu s + \omega t - h}.$$

Nach (7) ist $\mu s + \omega t - h < 0$, also $M = 0$. Daher verschwinden die Funktionen $P_{\mathfrak{b}}$ und $F(f, f_1, \ldots, f_m)$ identisch. Damit ist Satz 1 bewiesen.

II. Beweis von Satz 2

Es seien jetzt die analytisch unabhängigen Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ so gewählt, daß jede Funktion $f \in K$ von $f_1, \ldots, f_m$ analytisch abhängig ist. Nach Satz 1 ist K eine algebraische Erweiterung des Körpers der rationalen Funktionen von $f_1, \ldots, f_m$. Ist f beliebig $\in K$, so gibt es also eine irreduzible Gleichung

$$G_0 f^\nu + G_1 f^{\nu-1} + \cdots + G_\nu = 0\,, \tag{11}$$

worin $G_0, \ldots, G_\nu$ Polynome in $f_1, \ldots, f_m$ sind und G_0 nicht identisch auf $\mathfrak{P}$ verschwindet.

Es wird bewiesen, daß $\nu \leq s$ ist, worin s eine von f unabhängige ganze Zahl ist.

Dazu werden die in I. konstruierten Umgebungen $\mathfrak{R}_a$, $\mathfrak{L}_a$ ($a = a_1, \ldots, a_\mu$) ohne Rücksicht auf f festgelegt und die Zahl ω bestimmt.

Die Gleichung (11) besitze in bezug auf jede der Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ einen Grad $\leq g$. Mit den Abkürzungen

$$R_a(z_a) = \prod_{k=1}^{m} q_{ka}^{g} \tag{12}$$

$$H_{al}(z_a) = R_a^l G_0^{l-1} G_l \qquad (l = 1, \ldots, \nu), \tag{13}$$

$$S_a(z_a) = R_a G_0 f \tag{14}$$

erhält man aus (11) durch Multiplikation mit $R_a^\nu G_0^{\nu-1}$ auf $\mathfrak{R}_a$ die Gleichung

$$S_a^\nu + \sum_{l=1}^{\nu} H_{al} S_a^{\nu-l} = 0\,. \tag{15}$$

Nach (12) sind die Funktionen $R_a G_l$ ($l = 0, \ldots, \nu$) und damit die Funktionen $R_a G_l (R_a G_0)^{l-1} = H_{al}$ ($l = 1, \ldots, \nu$) auf $\mathfrak{R}_a$ regulär, insbesondere dort also beschränkt. S_a ist auf $\mathfrak{R}_a$ eine meromorphe Funktion, welche jedoch wegen der Beschränktheit der H_{al} und wegen des Bestehens der Gleichung (15) beschränkt und also regulär auf $\mathfrak{R}_a$ ist. Mit

$$p_a = S_a \quad \text{und} \quad q_a = R_a G_0 \tag{16}$$

wird daher

$$f(\mathfrak{z}) = \frac{p_a(z_a)}{q_a(z_a)} \quad (\mathfrak{z} \in \mathfrak{R}_a)\,,$$

worin p_a, q_a für $|z_a| \leq r_a$ konvergente Potenzreihen sind. In einem nichtleeren Durchschnitt $\mathfrak{R}_a \cap \mathfrak{R}_{a^*}$ gilt wegen (12), (16)

$$q_{a^*}(z_{a^*}) = \mathfrak{j}_{aa^*}(\mathfrak{z})\, q_a(z_a) \qquad (\mathfrak{z} \in \mathfrak{R}_a \cap \mathfrak{R}_{a^*})\,,$$

worin

$$\mathfrak{j}_{aa^*}(\mathfrak{z}) = \prod_{k=1}^{m} \mathfrak{j}_{kaa^*}^{g}(\mathfrak{z})$$

ist. Genau wie unter I. ergibt sich nun eine algebraische Gleichung

$$F(f, f_1, \ldots, f_m) = 0\,,$$

welche in f von einem Grade $\leqq s = [\omega^m p] + 1$ ist. Wegen der Irreduzibilität der Gleichung (11) ist $\nu \leqq s$, worin s von f unabhängig ist.

Damit ist bewiesen, daß K eine endliche algebraische Erweiterung des Körpers der rationalen Funktionen von $f_1, \ldots, f_m$ ist. Das ist aber die Behauptung von Satz 2.

Literatur

[1] THIMM, W.: Meromorphe Abbildungen von Riemannschen Bereichen. Math. Z. 60, 435–457 (1954).

[2] REMMERT, R.: Meromorphe Funktionen in kompakten komplexen Räumen. Math. Ann. 132, 277–288 (1956).

[3] SIEGEL, C. L.: Meromorphe Funktionen auf kompakten analytischen Mannigfaltigkeiten. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-physik. Kl., math.-physik.-chem. Abt., 1955, 71–77.

(Eingegangen am 8. März 1960)

AMIR-MOÉZ, A. R. and CH. DAVIS
Math. Annalen 141, 107—112 (1960)

Generalized Frobenius inner products*)

By

ALI R. AMIR-MOÉZ and CHANDLER DAVIS in New York and Rhode Island

1. Introduction

The (normalized) Frobenius inner product

$$(1) \qquad \langle A, B\rangle = n^{-1} \quad \text{trace} \quad (A B^*)$$

is a natural quantity to associate with the two $n \times n$ matrices A and B. The set of all such matrices is a finite-dimensional linear space on which (1) has the usual properties of an inner product, and special properties as well, related to the multiplication of matrices. These properties have been much studied, e. g. [6].

There are many functions sharing with (1) some of the formal properties of the inner product but lacking some or all of the special properties; lacking also, in general, the property that their values are numbers. The purpose of this note is to prove, for such systems, analogues of the simplest geometrical properties of inner product spaces — so far as the analogues are true.

In § 2 we state our hypotheses. The space is not assumed to be an algebra because such an assumption is irrelevant to our proofs. However, the examples which motivate the problem (§ 3) are algebras. In §§ 4—9 we prove several theorems; the presentation is intended to indicate how others of the same sort may be proved with no more difficulty.

2. Hypotheses

Let $\mathfrak{R}$ be a finite-dimensional complex [or real] *-algebra. That is, $\mathfrak{R}$ can be represented as an algebra of finite complex [real] matrices; and $\mathfrak{R}$ has an operation * which in this representation corresponds to taking Hermitian conjugate [transpose]. Elements of $\mathfrak{R}$ (Scalars) will be denoted by $\alpha, \beta, \ldots$. In case α is positive (semi-) definite we write $\alpha \geqq 0$.

Finite-dimensionality of $\mathfrak{R}$ is used in Theorem 5.1. However, it is easy to supply weakened forms of that and subsequent results, which remain valid without any hypothesis on the dimensionality of $\mathfrak{R}$.

Let $\mathfrak{A}$ be a left $\mathfrak{R}$-module. That is, sums of elements of $\mathfrak{A}$ are in $\mathfrak{A}$; product αA, with $\alpha \in \mathfrak{R}$ and $A \in \mathfrak{A}$, are in $\mathfrak{A}$; and the same formal assumptions are made as for $\mathfrak{A}$ to be a vector space over $\mathfrak{R}$ in the special case that $\mathfrak{R}$ is a field. Elements of $\mathfrak{A}$ (vectors) will be denoted by $A, B, \ldots$.

*) Presented to the American Mathematical Society September 3, 1959.

Furthermore, let there be a function $\langle , \rangle$ of pairs of vectors, with scalar values, having the formal properties of an inner product:

(I) $$\langle B, A\rangle = \langle A, B\rangle^* ;$$

(II) $$\langle \alpha A + \beta B, C\rangle = \alpha\langle A, C\rangle + \beta\langle B, C\rangle ;$$

(III) $$\langle A, A\rangle \geqq 0 ;\ \langle A, A\rangle = 0 \quad \text{if and only if} \quad A = 0 .$$

It follows from (I) and (II) that $\langle A, \beta B\rangle = \langle A, B\rangle \beta^*$. It follows from (II) alone that $\langle 0, C\rangle = 0$.

We define $\|A\| = \langle A, A\rangle^{1/2}$, a uniquely determined element, with $\|A\| \geqq 0$ of $\mathfrak{R}$, because of (III).

3. Examples

In all the examples, $\mathfrak{A}$ is a sub-*-algebra of the *-algebra of all $n \times n$ complex matrices.

Example 1. $\mathfrak{R}$ is the complex numbers. The inner product is that of Frobenius (1).

Example 2. $\mathfrak{R}$ is the real numbers. The inner product is given by

(2) $$\langle A, B\rangle = n^{-1} R \ \text{trace} \ (A B^*) .$$

This inner product is also convenient for many applications. The Hermitian and skew-Hermitian members of $\mathfrak{A}$ are orthogonal subspaces of the same dimensionality and span $\mathfrak{A}$. A corollary is Theorem 5 of [2].

Example 3. $\mathfrak{R}$ is $\mathfrak{A}$. The inner product is given by $\langle A, B\rangle = A B^*$.

Example 4. $\mathfrak{R}$ is all the members of $\mathfrak{A}$ having all entries real. RA means the matrix whose entries are the real parts of the corresponding entries of A. The inner product in $\mathfrak{A}$ is given by $\langle A, B\rangle = R(A B^*)$.

Example 5. C is any averaging operation of $\mathfrak{A}$ onto the subalgebra $\mathfrak{R}$ of $\mathfrak{A}$. The inner product is given by $\langle A, B\rangle = C(A B^*)$. Examples 1 and 3 are the extreme cases of this.

Example 6. The last example can be generalized a little farther still, as follows. For fixed positive definite C_0 and R_0, with $C_0 \in \mathfrak{A}$ and R_0 in the center of $\mathfrak{R}$, the inner product is given by

$$\langle A, B\rangle = R_0 C(A C_0 B^*) .$$

In Examples 1–5, for $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$, the equation $\langle \alpha, \beta\rangle = \alpha\beta^*$ is meaningful (because $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{A}$) and identically true. In Example 6 it is meaningful but in general fails to hold.

4. Bessel's inequality

This theorem sets the pattern for much of the rest: we merely reformulate the standard result in such a way that the standard proof goes through without using commutativity.

Theorem 4.1: *If $A_i \in \mathfrak{A}$, $i = 1, \ldots, k$ satisfy*

$$\langle A_i, A_j\rangle = \delta_{ij}\, \alpha_i \leqq 1 ,$$

then for all B

$$\langle B, B\rangle \geqq \Sigma_i \langle B, A_i\rangle \langle A_i, B\rangle .$$

Proof: Expand the inequality

$$0 \leq \langle B - \Sigma_i \langle B, A_i \rangle A_i, B - \Sigma_j \langle B, A_j \rangle A_j \rangle ,$$

observe that

$$\langle \Sigma_i \langle B, A_i \rangle A_i, \Sigma_j \langle B, A_j \rangle A_j \rangle = \Sigma_{ij} \langle B, A_i \rangle \langle A_i, A_j \rangle \langle A_j, B \rangle$$
$$= \Sigma_i \langle B, A_i \rangle \alpha_i \langle A_i, B \rangle \leq \Sigma_i \langle B, A_i \rangle \langle A_i, B \rangle .$$

Similar (simpler) transformations of the other terms complete the proof.

5. Normalized vectors

Here the departure from the situation for ordinary inner products is mostly due to the presence of zero-divisors in $\mathfrak{R}$.

Theorem 5.1: *Let A be any non-zero vector. There is a unique vector A_1 with the properties:*

(i) $\|A\| A_1 = A$;

(ii) $\gamma A_1 = 0$, *where γ is the projection onto the nullspace of $\|A\|$. This A_1 has the further properties*

(iii) *A and A_1 are scalar multiples of each other;*

(iv) *$\|A_1\|$ is a projection.*

Proof: $\langle \gamma A, \gamma A \rangle = \gamma \langle A, A \rangle \gamma = 0$. Hence, by hypothesis (III), $\gamma A = 0$. Now $\tilde{\gamma} = 1 - \gamma$ is the projection onto the range of $\|A\|$. Let $\|A\|^{-1}$ denote the *generalized inverse* of $\|A\|$, so that

$$\|A\| \, \|A\|^{-1} = \|A\|^{-1} \|A\| = \tilde{\gamma}, \|A\|^{-1} \gamma = 0 .$$

Set $A_1 = \|A\|^{-1} A$. Then $\|A\| A_1 = \tilde{\gamma} A = A - \gamma A = A$. This verifies (i) and (iii). (ii) is clear. As to (iv),

$$\|A_1\|^2 = \langle A_1, A_1 \rangle = \|A\|^{-1} \langle A, A \rangle \|A\|^{-1} = \tilde{\gamma} ,$$

so $\|A_1\| = \tilde{\gamma}^{1/2} = \tilde{\gamma}$, a projection. Everything except uniqueness has been proved.

Accordingly, assume (i) and (ii). Then

$$A_1 = \tilde{\gamma} A_1 = \|A\|^{-1} \|A\| A_1 = \|A\|^{-1} A ,$$

the same as before.

In view of this theorem, it is natural to call a vector A *normalized* in case $\|A\|$ is a projection; and for arbitrary non-zero A, to call the A_1 described in theorem the *normalization of* A. Thus a vector is normalized if and only if it is its own normalization.

Conditions (iii) and (iv) of the theorem fall far short of characterizing the normalization. Thus in Example 3 above take for A any projection on a k-subspace, $1 \leq k < n$; it is its own normalization, but any UA (U unitary) satisfies (iii) and (iv). Detailed consideration of this question would lead to a topic we would rather defer to § 8.

6. The Cauchy-Schwarz inequality

Here are two formulations of the inequality.

Theorem 6.1: $\langle B, B \rangle \geq \langle B, A \rangle \langle A, A \rangle^{-1} \langle A, B \rangle$. *If we set*

$$\beta = \|B\|^{-1} \langle B, A \rangle \|A\|^{-1},$$

then $\beta \beta^* \leq 1$, $\beta^* \beta \leq 1$.

Proof: In theorem 4.1, take for A_i the single element A_1, the normalization of A. The hypothesis of the theorem is simply $\langle A_1, A_1\rangle \leqq 1$, and this is fulfilled, by Theorem 5.1. Theorem 4.1 now asserts that

$$\langle B, B\rangle \geqq \langle B, A_1\rangle \langle A_1, B\rangle = \langle B, A\rangle \|A\|^{-2}\langle A, B\rangle$$
$$= \langle B, A\rangle \langle A, A\rangle^{-1}\langle A, B\rangle,$$

again by Theorem 5.1. Furthermore we see that both sides may be multiplied on left and right by $\|B\|^{-1}$; the inequality remains satisfied; this proves $\beta\beta^* \leqq 1$. Interchanging A and B gives $\beta^*\beta \leqq 1$.

7. Fourier expansion

To replace the Bessel's inequality of § 4 by a parseval equality, the orthogonal set must be normalized, in the sense of § 5.

Theorem 7.1: *Let $A_i \in \mathfrak{A}$, $i = 1, \ldots, k$ satisfy*

$$\langle A_i, A_j\rangle = \delta_{ij}\,\alpha_i\,,$$

with α_i a projection. The following are equivalent:

(i) *for any non-zero $B \in \mathfrak{A}$, some $\langle B, A_i\rangle$ is non-zero;*
(ii) *for any $B \in \mathfrak{A}$, $B = \Sigma_i \langle B, A_i\rangle A_i$;*
(iii) *for any $B, C \in \mathfrak{A}$, $\langle B, C\rangle = \Sigma_i \langle B, A_i\rangle \langle A_i, C\rangle$;*
(iv) *for any $B \in \mathfrak{A}$, $\langle B, B\rangle = \Sigma_i \langle B, A_i\rangle \langle A_i, B\rangle$.*

Proof: Assuming (i), to prove

$$B = \Sigma_i \langle B, A_i\rangle A_i:$$

letting $C = B - \Sigma_i \langle B, A_i\rangle A_i$, it is enough to prove that each $\langle C, A_j\rangle$ is zero.

$$\langle C, A_j\rangle = \langle B, A_j\rangle - \langle B, A_j\rangle\,\alpha_j\,.$$

That this is zero follows by a simple argument already mentioned at the end of § 5.

This same argument enters in deducing (iii) from (ii) by substitution:

$$\langle B, C\rangle = \langle \Sigma_i \langle B, A_i\rangle A_i, \Sigma_j \langle C, A_j\rangle A_j\rangle$$
$$= \Sigma_{ij} \langle B, A_i\rangle \langle A_i, A_j\rangle \langle A_j, C\rangle$$
$$= \Sigma_i \langle B, A_i\rangle\,\alpha_i \langle A_i, C\rangle = \Sigma_i \langle B, A_i\rangle \langle A_i, C\rangle\,.$$

(iv) is a special case of (iii).

Finally, assume (iv), and let $\langle B, A_i\rangle = 0$ for all i. Since $\langle B, B\rangle = 0$, $B = 0$: (i) holds. The theorem is proved.

8. Gram-Schmidt process

Of the senses in which linear dependence can be understood in $\mathfrak{A}$ the appropriate one for present purposes is this: $A_1, \ldots, A_k$ are linearly dependent provided $\Sigma \alpha_i A_i = 0$ for some $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ such that not all of $\alpha_1 A_1, \ldots, \alpha_k A_k$ are zero. In this case α_i may be decomposed as $\alpha_i \gamma_i + \alpha_i \bar{\gamma}_i$, where γ_i is the projection onto the nullspace of $\|A_i\|$ and $\bar{\gamma}_i = 1 - \gamma_i$; also $\alpha_i \gamma_i A_i = 0$; therefore there exists a linear dependence relation $\Sigma \alpha_i' A_i = 0$, not all $\alpha_i' A_i = 0$,

with the additional property that α_i' annihilates the nullspace of $\|A_i\|$ — namely, take $\alpha_i' = \alpha_i \bar{\gamma}_i$. Call a linear combination of vectors which has this additional property a ***non-redundant*** linear combination.

Linear dependence and bases may be treated now much as for vector spaces, with the following anomalies: A linear relation may obtain between $A_1, \ldots, A_k$ without any of them being a linear combination of the others (even for $k = 2$); and two bases for the same linear set need not have the same cardinality.

Now what form will the Gram-Schmidt process take? Starting with any sequence $B_1, B_2, \ldots$ of vectors, it should produce an orthonormal sequence $A_1, A_2, \ldots$ (diluted perhaps with some zeroes); at each stage, we will have $A_1, \ldots, A_k$ orthonormal and take up next B_{k+1}. Subtract from $B = B_{k+1}$ its Fourier expansion with respect to $A_1, \ldots, A_k$, getting $C = B - \Sigma\langle B, A_i\rangle A_i$. This is non-zero if and only if B is not a linear combination of $A_1, \ldots, A_k$. (For if $B = \Sigma \beta_i A_i$, then suppose without loss of generality that the linear combination is non-redundant. Then $\langle B, A_j\rangle = \Sigma \beta_i \langle A_i, A_j\rangle = \beta_j \langle A_j, A_j\rangle = \beta_j$, $B = \Sigma\langle B, A_i\rangle A_i$.) If C is not zero normalize it, getting A_{k+1}. In light of Theorem 5.1 (iii) and other observations above, it is clear that $A_1, \ldots, A_{k+1}$ span the same linear set as $A_1, \ldots, A_k, B_{k+1}$, or as $B_1, \ldots, B_{k+1}$. Again there is an anomaly: There may exist sequences $B_1, \ldots, B_k$ and $B_1', \ldots, B_k'$ such that one is a rearrangement of the other and yet applying the Gram-Schmidt process to them gives orthonormal sets of different cardinality.

9. A geometric theorem

In spite of the lack of any analogue for such a fundamental theorem as the triangle inequality, we can prove analogues of theorems of a certain type: those in which distances between points enter quadratically. As a sample, we offer the generalization of the formula for the length of the altitude on the hypotenuse of a right triangle. (Some other generalizations, Theorems 2.2I and 2.3I of [1], are contained in this one.)

Theorem 9.1: *Assume $A_1, \ldots, A_k$ mutually orthogonal, and let $B = \Sigma\alpha_i A_i$, with $\Sigma\alpha_i = 1$. If $\langle B, A_i - A_j\rangle = 0$ for all i, j, then*

$$\|B\|^{-2} = \pi\, \Sigma\, \|A_i\|^{-2} \pi\,;$$

here π is the projection on the range of $\|B\|^2$, and as in §§ 5—6, generalized inverses are meant in case $\|B\|^2$ or $\|A_i\|^2$ is singular.

Proof: $\langle B, A_j\rangle = \Sigma\alpha_i\langle A_i, A_j\rangle = \alpha_j\|A_j\|^2$. By hypothesis this is a "scalar" β independent of j. Now $0 \leq \|B\|^2 = \Sigma\alpha_i\langle A_i, B\rangle = \Sigma\alpha_i\beta^* = \beta^*$. That is, $\|B\|^2 = \alpha_i\|A_i\|^2$ for all i. Let π_i denote the projection on the range of A_i. Now the equation $\|B\|^2 = \alpha_i\|A_i\|^2$, multiplied on the left by $\|B\|^{-2}$ and on the right by $\|A_i\|^{-2}$, gives $\pi\|A_i\|^{-2} = \|B\|^{-2}\alpha_i\pi_i$. But it is easy to see that $\pi \leq \pi_i$; hence multiplying the previous equation on the right by π and summing over i gives $\pi\Sigma\|A_i\|^{-2}\pi = \|B\|^{-2}\pi$, which is the same as the conclusion.

References

[1] Amir-Moéz, A. R.: Some equalities in a unitary space leading to equalities concerning singular values of sets of matrices. Math. Ann. **135**, 388—390 (1958).
[2] Amir-Moéz, A. R., and A. Horn: Singular values of a matrix. Amer. Math. Monthly **65**, 742—748 (1958).
[3] Davis, C.: Various averaging operations onto subalgebras. Illinois J. Math. **3**, 538—553 (1959).
[4] Halmos, P. R.: Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity. New York: Chelsea 1951.
[5] Rado, R.: Note on generalized inverses of matrices. Proc. Cambridge Philos. Soc. **52**, 600—601 (1956).
[6] Schatten, R.: A theory of cross-spaces. Princeton 1950.

(Received February 6, 1960)

SCHAEFER, H.
Math. Annalen 141, 113—142 (1960)

Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume. III*)

Von

HELMUT SCHAEFER in Ann Arbor, Mich., U. S. A.

Einleitung

Das in den Arbeiten [10″] und [11″] (im folgenden mit HV und HV II zitiert) begonnene Studium topologischer, insbesondere lokalkonvexer, halbgeordneter Vektorräume wird in der gegenwärtigen Untersuchung fortgesetzt. Die Arbeit schließt an HV und HV II unmittelbar an und setzt die dort erzielten Ergebnisse in vollem Umfang voraus. Die Abschnitte sind laufend weiternumeriert, und die benutzten Resultate werden unter ihrer Nummer in HV, HV II oder dieser Arbeit zitiert; allgemein ist $(u.v)$ Satz v in Abschnitt u. Aus diesem Grunde ist auch auf eine weitgehende Wiederholung der Literaturverzeichnisse in HV und HV II verzichtet worden[1]). Mit Ausnahme des Abschnitts 12, der dem zweiten Teil der Gesamtarbeit angehört und sich mit Spektraleigenschaften unbeschränkter positiver Operatoren beschäftigt, sind die Untersuchungen dieser Arbeit wieder Fragen „geometrischer" (d.h. die innere Struktur halbgeordneter lokalkonvexer Räume betreffender) Natur gewidmet. Der dritte Teil (Abschnitte 13—15) berücksichtigt insbesondere die Stellung der Verbandsstrukturen innerhalb der allgemeinen Theorie, vor allem bezüglich der Dualität. Es gibt zwar eine ausgedehnte Literatur über Vektorverbände mit topologischer Struktur (besonders Banachverbände, vgl. [1″] und die dort zitierten Quellen); ein großer Teil der hier bekannten Resultate reicht aber in eine Zeit zurück, zu der die (auf ARENS, DIEUDONNÉ, KÖTHE, MACKEY, L. SCHWARTZ und andere zurückgehende) moderne Theorie der Dualität topologischer Vektorräume noch unbekannt oder erst im Entstehen begriffen war, so daß die Theorie hier noch keineswegs abgeschlossen ist. In einem „Ergänzungen" überschriebenen Abschnitt werden u. a. die Abschnitte 1 bis 4 von HV in dieser Richtung ergänzt und die Verbindung zu anderen neueren Untersuchungen hergestellt. Wir geben eine kurze Übersicht über den Inhalt der einzelnen Abschnitte.

Im 12. Abschnitt werden die in HV II erzielten Ergebnisse für unbeschränkte positive Operatoren (Def. 9) nutzbar gemacht. Der Kern der hier verwendeten Methode läßt sich in einen Satz fassen, der eine Verallgemeinerung

---

*) Die Arbeit wurde teilweise unterstützt vom Office of Ordnance Research, U. S. Army.

1) Das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit enthält (mit Ausnahme von [10″]) nur diejenigen im Text benutzten Hinweise, die nicht schon im Verzeichnis von HV oder HV II aufgeführt sind. Solche Hinweise sind mit keinem ′ (für HV) bzw. mit nur einem ′ (für HV II) versehen.

eines klassischen Resultates von PRINGSHEIM über die Singularitäten analytischer Funktionen mit nichtnegativen Taylorkoeffizienten ist, und der vom Begriff des linearen Operators nicht abhängt (vgl. [12″]). Beispiele für die Anwendbarkeit dieser Methode sind vor allem (12.1) und (12.5), in denen Aussagen über die Lage des Spektrums in der komplexen Ebene gemacht werden. Der sehr allgemeine Satz (12.2) ist eine Konsequenz von (10.4) (die Bedingung b) ist der einfachen Formulierung wegen enger als notwendig gewählt). (12.3) und (12.4) betreffen Operatoren, die mitsamt ihrer Inversen stetig und positiv sind.

Die Untersuchungen des 13. Abschnitts sind im wesentlichen algebraischer Natur und dienen der Charakterisierung von Vektorverbänden und ordnungsvollständigen Vektorverbänden in der Klasse halbgeordneter linearer Räume. Es zeigt sich hier, daß die Zerlegungseigenschaft (Z) (p. 121) die wesentliche Eigenschaft der Vektorverbände ist (vgl. Lemma 3): Jeder monoton vollständige (Z)-Raum (Def. 10) ist ein ordnungsvollständiger Vektorverband (13.2); ein endlichdimensionaler halbgeordneter Vektorraum mit abgeschlossenem positivem Kegel ist ein Verband, genau wenn er (Z)-Raum ist (13.3). Auf Grund eines Homomorphiesatzes (13.5), der ebenfalls auf der Eigenschaft (Z) beruht, läßt sich jeder (Z)-Raum (über seinen Ordnungsbidual) in einen kleinsten Vektorverband isomorph einbetten (13.6).

Der Versuch, jeden Vektorverband auf dieselbe Weise in einen kleinsten beschränkt ordnungsvollständigen Verband isomorph einzubetten, stößt auf Schwierigkeiten; es zeigt sich hier, daß in der Klasse ordnungsvollständiger Vektorverbände eine Unterklasse ausgezeichnet ist, deren Elemente wir als minimal bezeichnen (Def. 11). Die Räume dieser Klasse sind dadurch charakterisiert, daß in ihnen die Bildung oberer Grenzen für beliebige majorisierte Teilmengen dual (d. h. mit Hilfe der positiven Linearformen) beschrieben werden kann, sowie dadurch, daß in ihnen jeder ordnungskonvergente Filter (p. 128) für die (lokalkonvexe) Ordnungstopologie konvergiert (14.1). Beispiele solcher Räume sind alle Vektorverbände, die für die Ordnungstopologie reflexiv sind, (14.2) Corollar. Weiter wird untersucht, wann man von der monotonen Vollständigkeit eines halbgeordneten Vektorraumes auf seine topologische Vollständigkeit für eine geeignete Topologie schließen kann. Auf Grund einer verallgemeinerten Fassung (14.3) eines Satzes von AMEMYIA [2′] erhalten wir positive Ergebnisse nur im metrisierbaren Fall, (14.4) und (14.5), die aber trotz ihrer Magerkeit alle klassischen Beispiele einschließen (HV, p. 130).

Die Beziehung zwischen (starken) Ordnungseinheiten eines halbgeordneten lokalkonvexen Raumes und inneren Punkten des positiven Kegels ist leicht zu übersehen (vgl. HV, Abschnitt 4). Weniger leicht zu entscheiden ist die Frage, ob es in den (konkret zahlreichen) Räumen mit positivem Kegel ohne inneren Punkt einen brauchbaren Ersatz für die inneren Punkte gibt. Der 15. Abschnitt studiert die Beziehungen zwischen den schwachen Ordnungseinheiten (FREUDENTHAL) in Vektorverbänden, den nicht unterstützten Punkten (KLEE) des positiven Kegels, und dem vom Verfasser in [13″] eingeführten Begriff des

quasi-inneren Punktes, der sich für Spektralbetrachtungen als nützlich erwiesen hat. Bezüglich der Existenz und der Eigenschaften solcher Punkte sei auf (15.2) und (15.5) hingewiesen. Merkwürdigerweise spielen unter den Räumen, in denen die drei genannten Klassen von Punkten zusammenfallen, die minimalen (s. o.) ordnungsvollständigen Vektorverbände eine bevorzugte Rolle, vgl. (15.4), (15.6) und (15.7).

In den „Ergänzungen" sei besonders auf die Sätze (1.a), (2.b) und (3.a) hingewiesen. Es findet sich hier auch eine Korrektur (4.5)' zu (4.5), wo die Voraussetzung monotoner Folgenvollständigkeit hinzugefügt werden muß, sowie zu (4.2), wo für die Hinlänglichkeit der Bedingung der positive Kegel als abgeschlossen vorauszusetzen ist.

Die benutzten Hilfsmittel sind im wesentlichen dieselben wie in HV beschrieben, mit Ausnahme einer Reihe algebraischer Eigenschaften von Vektorverbänden, wofür auf [9] und [1''] verwiesen sei. Alle benutzten Begriffe aus diesem Gebiet sind im Text erklärt. Wie in HV und HV II verstehen wir unter „Kegel" stets einen konvexen Kegel mit dem Scheitel 0 in einem Vektorraum, und wo immer der Buchstabe K ohne nähere Erklärung benutzt ist, bezeichnet er den positiven Kegel in dem in Rede stehenden halbgeordneten Vektorraum.

12. Positive, nicht notwendig beschränkte Operatoren

Ist E ein halbgeordneter Vektorraum[2]) mit positivem Kegel K, so heißt ein Endomorphismus T des Vektorraumes E positiv, wenn $T(K) \subset K$ gilt (HV, p. 119 und HV II, p. 268). Ist E zugleich ein B-Raum und T abgeschlossen, so ist T bekanntlich beschränkt. Wir erweitern den Begriff „positiver Operator" auf nicht beschränkte Abbildungen wie folgt:

Definition 9. *Ein abgeschlossener, nicht beschränkter linearer Operator T* (mit Definitions- und Wertebereich in einem halbgeordneten B-Raum) *ist positiv, wenn für einen Teilkegel $K_0 \subset K$ der Kegel $T(K_0)$ in K enthalten und dicht ist.*

Beispiel. Es sei Ω ein hinreichend reguläres, kompaktes Gebiet in E^3, für das die Greensche Funktion G des Laplaceschen Differentialausdruckes zur Randbedingung $u = 0$ existiert. Ferner sei $\mathfrak{C}_\alpha(\Omega)$ der in üblicher Weise normierte Banachraum der reellen Funktionen auf Ω, die gleichmäßig in Ω einer H-Bedingung mit dem festen Exponenten α, $0 < \alpha \leqq 1$, genügen. Bezeichnet Δ den Laplaceschen Operator, so sind die Relationen

$$\Delta u + \varphi = 0,\ u(s) = 0 \quad \text{für} \quad s \in \partial\Omega \qquad (\varphi \in \mathfrak{C}_\alpha)$$

und

$$u(s) = \int_\Omega G(s, t)\, \varphi(t)\, dt \qquad (s \in \Omega)$$

äquivalent. Bezeichnen wir mit K den Kegel der nichtnegativen Funktionen in $\mathfrak{C}_\alpha(\Omega)$ und setzen $K_0 = G(K)$, so ist der Differentialoperator $u \to -\Delta u$ positiv für die durch K auf $\mathfrak{C}_\alpha(\Omega)$ erzeugte Ordnungsstruktur. Darüber hinaus ist $u \to -\Delta u$ auch positiv im Raum $\mathfrak{C}(\Omega)$ stetiger reeller Funktionen auf Ω.

[2]) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir E als komplex annehmen.

Es sei daran erinnert, daß man für unbeschränktes T unter $\varrho(T)$, wie im beschränkten Fall, die Menge aller komplexen λ versteht, für die $\lambda - T$ eine auf E definierte stetige Inverse besitzt. Im Gegensatz zu den bei beschränktem T möglichen Fällen kann das Komplement $\sigma(T)$ von $\varrho(T)$ leer oder die ganze Ebene sein. Unter dem erweiterten Spektrum $\sigma_e(T)$ versteht man die Abschließung von $\sigma(T)$ in der durch Hinzunahme des Punktes ∞ kompaktifizierten Ebene[3]).

(12.1) *E sei ein halbgeordneter B-Raum, dessen positiver Kegel K abgeschlossen, normal und strikter BZ-Kegel ist*[4]). *Ist T ein* (nicht notwendig beschränkter) *positiver Operator in E, der einen seinen Definitionsbereich erzeugenden Teilkegel $K_0 \subset K$ eineindeutig auf K abbildet, so gilt:*

1° *$\lambda = 0$ ist in $\varrho(T)$.*

2° *Entweder ist $\sigma(T)$ leer, oder $r = \inf\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_e(T)\}$ ist* (endlich und) *in $\sigma(T)$.*

3° *Ist T^{-1} kompakt mit positivem Spektralradius, so ist r endlich und Eigenwert von T mit* (mindestens) *einem Eigenvektor $x_0 \in K_0$*[5]).

Beweis. 1° Da K strikter BZ-Kegel, also insbesondere $E = K - K$ ist, bildet T den (reellen) Teilraum $E_0 = K_0 - K_0$ von E auf E ab. Diese Abbildung ist eineindeutig, da aus $T(x - y) = T(x_1 - y_1)$ folgt $T(x + y_1) = T(x_1 + y)$ $(x, y, x_1, y_1 \in K)$, was nach Voraussetzung $x + y_1 = x_1 + y$ und daher $x - y = x_1 - y_1$ ergibt. Daher besitzt T eine Inverse, die wir mit R'_0 bezeichnen wollen. Es gilt $R'_0(K) \subset K$, und da K ein normaler und folgenvollständiger strikter BZ-Kegel in einem bornologischen Raum E ist, folgt aus (9.3) die Stetigkeit von R'_0. Folglich ist $0 \in \varrho(T)$.

2° Da die Resolvente R_λ von T lokal-holomorph ist, besitzt R_λ und auch $R' = -R_\lambda$ eine Potenzreihenentwicklung um $\lambda = 0$ mit Werten in $\mathfrak{L}(E)$. Diese Entwicklung lautet ([8'], p. 123)

$$R'_\lambda = R'_0[I + \lambda R'_0 + \lambda^2 R'^2_0 + \cdots]. \tag{1}$$

Es sind nun diese beiden Fälle möglich: Entweder ist $\lambda \to R'_\lambda$ eine ganze Funktion; dann ist $\sigma(T)$ leer und es ist nichts zu beweisen. Andernfalls besitzt (1) einen endlichen Konvergenzradius $r > 0$; es ist dann $r = \inf\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ und wir haben zu zeigen, daß $r \in \sigma(T)$ ist. Zwischen (1) und der Entwicklung der Resolvente $R(\mu)$ von T^{-1} in einer Umgebung von $\mu = \infty$ besteht die Beziehung

$$R(\mu) = \frac{1}{\mu} I + \frac{1}{\mu^2} R'_{1/\mu}. \tag{2}$$

Nun ist nach (8.3) der Kegel $\mathfrak{K}$ stetiger positiver Endomorphismen normal für die Topologie beschränkter Konvergenz auf $\mathfrak{L}(E)$, und nach (11.1), Corollar ist der Spektralradius ϱ von $R'_0 = T^{-1}$ wegen $T^{-1}(K) \subset K$ im Spektrum $\sigma(T^{-1})$,

[3]) Ist $\sigma(T)$ leer, so wird $\sigma_e(T) = \{\infty\}$ gesetzt.

[4]) Def. 1 und 2' (HV, p. 121 und 128); für komplexes E Def. 6 (HV II, p. 262). Die strikte BZ-Eigenschaft kann durch die schwächere Voraussetzung $E = K - K$ ersetzt werden.

[5]) Es genügt, T^{-1} als K-kompakt und den K-Spektralradius von T^{-1} als positiv anzunehmen (Def. 8, HV II, p. 277).

d. h. $\mu \to R(\mu)$ ist für $\mu = \varrho$ singulär. Es folgt, daß $r = \varrho^{-1}$ und r singulärer Punkt von $\lambda \to R'_\lambda$ ist, d. h. r ist im Spektrum von T.

3° Ist T^{-1} kompakt mit positivem Spektralradius ϱ, so gibt es mindestens einen Eigenwert von T^{-1} vom Betrage ϱ. Da aber T^{-1} positiv ist, ist nach (10.5) ϱ Eigenwert von T^{-1} mit einem Eigenvektor $x_0 \in K$. Wie in 2° ergibt sich $\varrho^{-1} = r$, und wegen $T^{-1}(K) = K_0$ ist $x_0 \in K_0$; aus $\varrho x_0 - T^{-1} x_0 = 0$ folgt $r x_0 - T x_0 = 0$ und der Satz ist bewiesen.

Bemerkung. Eine andere (weniger direkte) Beweismethode für den 2. Teil von (12.1) ist die folgende. Nach einem allgemeinen Satz über die Singularitäten analytischer Funktionen mit Werten in einem B-Raum ([12″], th. 1) folgt aus der Normalität von $\mathfrak{R}$ für die Normtopologie auf $\mathfrak{L}(E)$, daß der Konvergenzradius r von (1) singulärer Punkt für $\lambda \to R'_\lambda$, also $r \in \sigma(T)$ ist. Andererseits folgt aus (1) wegen $T^{-1} = R'_0$

$$T^{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{R_\lambda}{\lambda}\, d\lambda\,,$$

wo C eine genügend kleine, positiv orientierte Kreisperipherie um 0 ist. Mit $f(\lambda) = \lambda^{-1}$ ist aber dann $T^{-1} = f(T)$ im Sinne von Taylor [14″], und nach dem spektralen Abbildungssatz ist $\sigma(T^{-1}) = f[\sigma(T)]$. Hieraus folgt unmittelbar $r = \varrho^{-1}$ (ϱ der Spektralradius von T^{-1}).

Wie im Beweis von (12.1), aber unter Ausnutzung des schärferen Eigenwertsatzes (10.4) anstelle von (10.5), erhält man:

(12.2) *E sei ein halbgeordneter normierter Raum mit abgeschlossenem positiven Kegel K, T sei eine in E*) definierte lineare Abbildung, und es gebe eine konvexe, 0 enthaltende relativ kompakte Teilmenge $C \subset K$ sowie eine Nullumgebung U in E mit den Eigenschaften:*

a) *Die Einschränkung T_1 von T auf C besitzt eine auf $U \cap K$ definierte, stetige Inverse.*

b) *T_1 ist in 0 stetig.*

Dann besitzt T einen positiven Eigenwert mit einem Eigenvektor in C.

Beweis. Wie man leicht sieht, läßt sich die Inverse von T_1 eindeutig zu einer K-kompakten Abbildung S auf $K - K$ fortsetzen, und die Behauptung folgt aus (10.4), wenn wir zeigen, daß der K-Spektralradius (Def. 8, HV II) von S positiv ist. Ist $\{x_n\} \subset K$, so folgt wegen b) aus $S x_n \to 0$ die Aussage $x_n \to 0$ im Sinne der gegebenen Topologie auf E. Nach Definition der Topologie $\mathfrak{T}_0$ (HV II, p. 277) gilt diese Implikation auch für $\mathfrak{T}_0$. Ist $x \to \|x\|$ eine $\mathfrak{T}_0$ auf $K - K$ erzeugende Norm, so gilt also $\|Sx\| > \varepsilon > 0$ für alle $x \in K$, $\|x\| = 1$. Dies hat nach (10.2) aber zur Folge, daß der K-Spektralradius von S positiv ist.

Zur Erläuterung von (12.1) betrachten wir das Beispiel:

Es sei A eine lineare Randwertaufgabe, die zu einer linearen Differentialgleichung (oder einem linearen Differentialsystem 1. Ordnung) mit homogenen Randbedingungen gehört. Wir nehmen an, daß A eine numerisch nichtnegative Greensche Funktion (bzw. einen Greenschen Tensor mit nicht-

*) Das heißt, auf einem linearen Teilraum von E, mit Werten in E, definierte lineare Abbildung.

negativen Komponenten) besitzt, und daß der Kegel K der nicht negativen Elemente des dem Problem zugrunde gelegten Funktionenraumes die in (12.1) geforderten Eigenschaften hat. (Dies ist z. B. stets der Fall, wenn der Grundbereich kompakt und E einer der Räume vom Typ a)—e) ist, HV, p. 130.) Dann ist entweder das endliche Spektrum von A leer, oder aber der kleinste Kreis um 0, der keine Punkte von $\sigma(A)$ in seinem Innern enthält, schneidet die positiv-reelle Achse in einem Punkt $r \in \sigma(A)$. Erfüllt die Greensche Funktion (Tensor) eine Kompaktheitsbedingung, so ist r Punkteigenwert von A. Für weitere Eigenschaften von r, siehe z. B. [4″], [13″].

(12.3) *E sei ein halbgeordneter B-Raum, dessen positiver Kegel K abgeschlossen, normal und strikter BZ-Kegel ist. Bildet der Endomorphismus T den Kegel K umkehrbar eindeutig auf sich ab, so ist T stetig und $\sigma(T)$ in einem Ringgebiet*

$$\{\lambda : r \leqq |\lambda| \leqq R\}$$

enthalten, wobei $0 < r \in \sigma(T)$ und $R \in \sigma(T)$ gilt[7].

Beweis. Nach (12.1) gehört $\sigma(T)$ einem Kreisäußeren $|\lambda| \geqq r > 0$ an und es ist $r \in \sigma(T)$. Andererseits ist T nach (9.3) stetig. Bezeichnet R den Spektralradius von T, so gilt $R \in \sigma(T)$ nach dem Corollar zu (11.1).

Besitzt K innere Punkte, so gibt es eine verhältnismäßig große Klasse positiver Endomorphismen von E mit der Eigenschaft (vgl. [17]):

(i) *Jeder Eigenvektor $x \in K$ von T zu einem Eigenwert $\lambda > 0$ ist innerer Punkt von K.*

Für (i) ist es bei stetigem, positivem T z. B. hinreichend, wenn es ein $\lambda \in \varrho(T)$ gibt (λ größer als der Spektralradius von T), so daß $TR(\lambda)x \in \mathring{K}$ ist für jedes x, $0 \neq x \in K$ ([13″], prop. 4; vgl. das auf (12.4) folgende Beispiel). Aus (12.3) erhalten wir

(12.4) *Besitzt unter den Voraussetzungen von* (12.3) *T die Eigenschaft* (i) *und ist $r \neq R$, so können r und R nicht beide ein Pol der Resolvente von T sein.*

Beweis. Wäre dies für ein T doch der Fall, so seien k_1 bzw. k_2 die Ordnungen der Pole r bzw. R. Es gilt dann (im Sinne beschränkter Konvergenz auf E)

$$A_1 = \lim_{\lambda \to r} (\lambda - r)^{k_1} R_\lambda\,, \quad A_2 = \lim_{\lambda \to R} (\lambda - R)^{k_2} R_\lambda$$

für die höchsten Koeffizienten in den zu r bzw. R gehörigen Hauptteilen. Da $R_\lambda \geqq 0$ ist (im Sinne der natürlichen Halbordnung auf $\mathfrak{L}(E)$) für $\lambda > R$, folgt (wegen der Abgeschlossenheit von K, nach (8.1)) $A_2 \geqq 0$. Andererseits ist $R_\lambda \leqq 0$ für $0 \leqq \lambda < r$ (vgl. (1))[8], und daher ist $A_1 \leqq 0$ oder $A_1 \geqq 0$, je nachdem ob k_1 gerade oder ungerade ist. Wegen der BZ-Eigenschaft von K verschwinden A_1 und A_2 beide nicht identisch auf K. Es gibt also Eigenvektoren x_1 (zu r) und x_2 (zu R), die Elemente von K und infolge von (i) innere Punkte von K sind. Daher (HV, p. 133) ist $x_2 \leqq \lambda x_1$ für geeignetes $\lambda > 0$. Aus

---

[7]) Der Satz bleibt gültig, wenn anstelle der strikten BZ-Eigenschaft von K nur $E = K - K$ vorausgesetzt wird.

[8]) Unter unseren Voraussetzungen über K und T gilt: $R_\lambda \geqq 0 \Longleftrightarrow \lambda > R$, und $R_\lambda \leqq 0 \Longleftrightarrow 0 \leqq \lambda < r$ (vgl. [13″], prop. 2).

$r^n x_1 = T^n x_1$ und $R^n x_2 = T^n x_2$ folgt nun $R^n x_2 \leq \lambda T^n x_1 = \lambda r^n x_1$, also

$$\left(\frac{R}{r}\right)^n x_2 \leq \lambda x_1 \qquad (n \in \mathrm{N}).$$

Da nach (1.7) und (1.8) E fastarchimedisch ist, folgt wegen $\frac{R}{r} > 1$ der Widerspruch $x_2 = 0$ und der Satz ist bewiesen.

Ist also T eine den Voraussetzungen von (12.4) genügende Abbildung mit rationaler Resolvente, so liegt das Spektrum von T auf einer Kreisperipherie mit dem Mittelpunkt 0. Speziell gilt das

Corollar. *Es sei E ein Hausdorffscher topologischer Vektorraum endlicher Dimension, halbgeordnet mit abgeschlossenem positivem Kegel. Ist A ein Ordnungs- und linearer Automorphismus von E mit* (i), *so liegt $\sigma(A)$ auf einer Kreislinie $|\lambda| = r > 0$.*

Beispiel. Wir betrachten die durch die Permutationsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dargestellte Abbildung des E^3 auf sich. Da die Elemente von A sowie ihre algebraischen Komplemente $\geqq 0$ sind, sind A und A^{-1} für die natürliche Ordnung des E^3 positiv. A genügt, wie man sich leicht überzeugt, (i); das Spektrum von A sind bekanntlich die dritten Einheitswurzeln. Es sei aber bemerkt, daß der Geltungsbereich des obigen Corollars über die durch Matrizen mit nichtnegativen Elementen darstellbaren linearen Abbildungen hinausreicht, weil ein n-dimensionaler halbgeordneter Vektorraum, auch wenn sein positiver Kegel abgeschlossen ist, dem E^3 (in natürlicher Ordnung) im allgemeinen nicht isomorph ist.

(12.5) *Es sei T ein unbeschränkter, dicht in K definierter positiver Operator*[9]), *und K sei ein abgeschlossener normaler BZ-Kegel. Ist $-\mu_0 \in \varrho(T)$ $(\mu_0 > 0)$ und $\mu_0 + T$ positiv, dann existiert $\eta > 0$, so daß $\sigma(T)$ in der Halbebene $\{\lambda : \Re(\lambda) > -\mu_0 + \eta\}$ liegt. Ist die obere Grenze aller η, für die diese Behauptung zutrifft, endlich* (etwa $= \eta_0$), *so ist $-\mu_0 + \eta_0 \in \sigma(T)$.*

Beweis. Die Resolvente R_λ von T besitzt an der Stelle $-\mu_0$ die Entwicklung

$$R_\lambda = R_0 - (\lambda + \mu_0) R_0^2 + (\lambda + \mu_0)^2 R_0^3 - + \cdots \qquad (R_0 = R_{-\mu_0}). \tag{3}$$

Mit $R_0' = -R_0$, $R'(\mu) = -R_\lambda$, $\mu = -\lambda$ und $\mu - \mu_0 = \varepsilon$ folgt aus (3)

$$R'(\mu) = R_0' - \varepsilon R_0'^2 + \varepsilon^2 R_0'^3 - + \cdots$$

und

$$R'(\mu) = (I - \varepsilon R_0')\,[R_0' + \varepsilon^2 R_0'^3 + \varepsilon^4 R_0'^5 + \cdots]. \tag{4}$$

Da T dicht in K definiert und $R_0' \geqq 0$ ist, ist wegen $\mu_0 R_0' + T R_0' = I$ die Abbildung $T R_0'$ stetig und positiv, daher $\mu_0 R_0' \leqq I$ und folglich $\varepsilon R_0' \leqq I$ für alle ε,

[9]) Hiermit ist gemeint, daß der Def. 9 mit in K dichtem K_0 genügt werden kann. — Der Satz gilt für beschränkte positive Operatoren, wenn außerdem $\mu_0 + T$ den Kegel K auf sich abbildet.

$0 \leqq \varepsilon \leqq \mu_0$. Daher ist für diese ε der erste Faktor in (4) positiv. Aus (4) folgt nun weiter

$$R'(\mu) - R'_0 = -\varepsilon R_0'^2 + \varepsilon^2 R_0'^3 - \varepsilon^3 R_0'^4 + - \cdots \tag{5}$$
$$= -\varepsilon R_0'^2[(I - \varepsilon R'_0) + \varepsilon^2 R_0'^2(I - \varepsilon R'_0) + \cdots] \leqq 0 .$$

(4) und (5) ergeben zusammen

$$0 \leqq R'(\mu) \leqq R'_0 \tag{6}$$

für die durch den Kegel $\mathfrak{K}$ positiver Abbildungen in $\mathfrak{L}(E)$ erzeugte Ordnungsstruktur, solange $0 \leqq \varepsilon \leqq \mu_0$, d. h. aber solange $-2\mu_0 \leqq \lambda \leqq -\mu_0$ ist und λ sich außerdem in dem durch den Konvergenzradius von (3) bestimmten Intervall befindet. Da nun $\mathfrak{K}$ nach (8.3) in $\mathfrak{L}(E)$ für die Normtopologie normal ist, ergibt sich aus (6) und $\|R'(\mu)\| = \|R_\lambda\|$ die Beziehung $\|R_\lambda\| \leqq \|R_0\|$ in einer linken Umgebung von $-\mu_0$. Hieraus folgt durch wiederholte Anwendung des gleichen Verfahrens, daß sich R_λ von $-\mu_0$ aus unbeschränkt längs der negativ-reellen Achse fortsetzen läßt. Es gibt also eine Zahl $\eta > 0$, so daß die Punktmenge $\{\lambda : \lambda < -\mu_0 + \eta\}$ in $\varrho(T)$ enthalten ist. Wir zeigen, daß diese Behauptung sogar für die Halbebene $\{\lambda : \Re(\lambda) < -\mu_0 + \eta\}$ zutrifft. Sei z ein beliebiger Punkt in dieser Halbebene; es gibt ein $\mu_1 < -\mu_0$ mit der Eigenschaft

$$|z - \mu_1| < |-\mu_0 + \eta - \mu_1| .$$

Wie wir gesehen haben, ist $\mu_1 \in \varrho(T)$, und $-R_\lambda$ besitzt an der Stelle μ_1 eine Entwicklung, die in bezug auf die Potenzen von $(\lambda - \mu_1)$ positive Koeffizienten (d. h. Koeffizienten in $\mathfrak{K}$) besitzt. Nach der schon mehrfach in diesem Abschnitt benutzten Schlußweise (am kürzesten nach [12″], th. 1) ist der Konvergenzradius dieser Entwicklung (vgl. (3)) entweder unendlich, oder der Punkt, in dem der Konvergenzkreis die reelle Achse rechts von μ_1 schneidet, ist für R_λ singulär (also in $\sigma(T)$). Wäre nun z singulär für R_λ, so müßte es einen, für R_λ singulären, reellen Punkt $\mu < -\mu_0 + \eta$ geben, was nicht zutrifft; daher ist $z \in \varrho(T)$. Da aus diesen Überlegungen auch die Richtigkeit der zweiten Behauptung hervorgeht, ist der Beweis beendet.

Wir betrachten ein einfaches Beispiel. Sei E der (mit der üblichen sup-Norm versehene) Vektorraum der auf $[0, 1]$ stetigen, komplexwertigen Funktionen f mit $f(0) = 0$. Der Kegel K derjenigen Elemente von E, die einen auf $[0, 1]$ nichtnegativen Real- und Imaginärteil besitzen, ist ein normaler BZ-Kegel in E (HV, p. 130 Beispiel d) und HV II, (6.5)). Es sei E_0 der lineare Teilraum von E der im Punkt 0 rechtsseitig differenzierbaren Funktionen f mit $f'(0) = 0$; E_0 ist offenbar dicht in E, und $K_0 = E_0 \cap K$ ist dicht in K. Die auf E_0 in E definierte lineare Abbildung $T : f \to g$, wo g durch

$$g(t) = \begin{cases} t^{-1} f(t) & (0 < t \leqq 1) \\ 0 & (t = 0) \end{cases}$$

definiert ist, genügt für jedes $\mu_0 > 0$ den Voraussetzungen von (12.5). Das Spektrum $\sigma(T)$ ist hier die Menge aller reellen Zahlen $\geqq 1$.

III. Teil: Monotone und Ordnungsvollständigkeit; quasi-innere Punkte des positiven Kegels

In den folgenden Abschnitten werden der bequemeren Darstellung wegen alle vorkommenden Vektorräume als reell vorausgesetzt.

13. Monotone und Ordnungsvollständigkeit

Ein Vektorverband (Rieszscher Raum, Abschnitt 3) L heißt ordnungsvollständig, wenn jede nichtleere, majorisierte Teilmenge von L eine obere Grenze (supremum) besitzt. Wir führen noch die folgenden schwächeren Eigenschaften ein: Ein halbgeordneter Vektorraum heiße *monoton vollständig* (bzw. *monoton folgenvollständig*), wenn jede majorisierte, aufsteigende transfinite Folge (bzw. jede majorisierte, aufsteigende Folge) ein supremum besitzt.

Hierbei ist eine aufsteigende transfinite Folge in L nichts anderes als eine nichtleere Teilmenge von L, die ein für die Ordnungsrelation „$\leqq$" homomorphes Bild einer Menge von Ordnungszahlen ist. Ist eine solche Folge $\{a_\alpha : \alpha < \beta\}$ (β eine Ordnungszahl) strikt monoton (d. h. $a_\alpha \neq a_{\alpha'}$ für $\alpha \neq \alpha'$), so muß natürlich $\beta < \omega_{\alpha+1}$ sein, wenn der betrachtete Vektorraum L die Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ hat. (ω_α ist, wie üblich, die zur Zahlklasse $Z(\aleph_\alpha)$ gehörige Anfangszahl.) Wir benötigen die beiden folgenden Hilfssätze.

Lemma 1. *Jede total geordnete Menge der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ ist mit einer wohlgeordneten Teilmenge vom Typ $\leqq \omega_\alpha$ konfinal.*

Für einen Beweis siehe [3″], p. 129.

Lemma 2. *Ist L ein halbgeordneter Vektorraum, auf dem eine strikt positive Linearform*[10]) *existiert, so ist jede strikt monotone, transfinite Folge in L abzählbar.*

Beweis. Es sei $\{a_\alpha : \alpha < \beta\}$ eine strikt monotone, transfinite Folge in L. Ist f eine auf L strikt positive Linearform, so ist $\{f(a_\alpha)\}_{\alpha<\beta}$ eine ebensolche Folge reeller Zahlen vom gleichen Ordnungstyp. Da, wie man sich leicht überlegt, $\{f(a_\alpha)\}$ abzählbar sein muß, ist die Behauptung bewiesen.

Wir betrachten die folgende Eigenschaft (HV, p. 136) eines halbgeordneten Vektorraumes mit positivem Kegel K:

(Z) Aus $0 \leqq y \leqq x_1 + x_2$ und $x_1, x_2 \in K$ folgt $y = y_1 + y_2$ mit $0 \leqq y_1 \leqq x_1$, $0 \leqq y_2 \leqq x_2$.

Definition 10. *Ein regulär*[11]) *halbgeordneter Vektorraum L heiße ein* (Z)-*Raum, wenn sein positiver Kegel die Eigenschaft* (Z) *besitzt und L erzeugt.*

Beispiele. 1. Aus (7.3) ergibt sich, daß jeder reflexive lokalkonvexe Raum E, der halbgeordnet ist mit abgeschlossenem, normalem positivem Kegel K, monoton vollständig ist. (Hierzu braucht K nicht E oder einen dichten Teilraum von E zu erzeugen.) Da jeder endlichdimensionale topologische lineare Raum in seiner eindeutig bestimmten Hausdorffschen Topologie $\mathfrak{T}$ lokalkonvex und reflexiv ist, gilt insbesondere: Jeder endlichdimensionale halbgeordnete Vektorraum mit $\mathfrak{T}$-abgeschlossenem (echtem) positivem Kegel ist monoton vollständig. (Denn ein solcher Kegel ist nach (1.7) notwendig normal.)

[10]) $f \in L^*$ heißt strikt positiv, wenn $f(x) > 0$ ist für jedes x, $0 \neq x \in K$. Die Existenz einer solchen Linearform ist damit äquivalent, daß 0 ein L^*-exponierter Punkt von K ist (im Sinne von Klee [6″]).

[11]) Def. 3 (HV, p. 126).

2. Es sei L ein beliebiger Vektorraum (über $\mathbf{R}$), $f \neq 0$ eine Linearform auf L. Der echte Kegel $K = \{0\} \cup \{x : f(x) > 0\}$ besitzt die Eigenschaft (Z). Ist nämlich $x \neq 0$, $x \neq u + v$, sowie $u \geqq 0$, $v \geqq 0$ (beide $\neq 0$) und $0 \leqq x \leqq u + v$ für die durch K erzeugte Ordnungsstruktur, so ist also

$$0 < f(x) < f(u) + f(v)$$

und es gibt ein $\lambda \in [0, 1]$, für welches $f(\lambda x) < f(u)$ und $(1 - \lambda) f(x) < f(v)$ ist. $x_1 = \lambda x$ und $x_2 = (1 - \lambda) x$ genügen dann (Z).

3. Ein Beispiel eines (Z)-Raumes mit Ordnungseinheit (HV, p. 120), der kein Vektorverband ist, liefert der Raum H aller auf dem Intervall $[0, 1]$ reellwertigen analytischen Funktionen. Genauer: Es sei H die Algebra (über $\mathbf{R}$) der Einschränkungen auf $[0, 1]$ aller auf $[0, 1]$ reellwertigen, in einem $[0, 1]$ enthaltenden Gebiet D_f holomorphen Funktionen f. Wir betrachten H in natürlicher Ordnung, so daß $f \geqq 0$ gleichbedeutend ist mit $f(t) \geqq 0$, $t \in [0, 1]$.

a) Der zu H assoziierte halbgeordnete Vektorraum ist kein Verband. Hierzu seien $f, g \in K$ zwei Elemente von H, deren numerisches supremum nicht in H ist. $\left(\text{Beispiel: Es seien } f \text{ bzw. } g \text{ die Funktionen } t \to \sin \frac{1}{2} \pi t \text{ bzw. } t \to \cos \frac{1}{2} \pi t.\right)$ Wir zeigen: Zu jeder Funktion $f_1 \in K$ mit $f_1 \geqq f$, $f_1 \geqq g$ existiert ein $f_2 \in K$ mit $f_1 \neq f_2$ und $f_1 \geqq f_2 \geqq f$, $f_1 \geqq f_2 \geqq g$. Hierzu setzen wir

$$\varrho = \frac{f_1 - g}{(f_1 - f) + (f_1 - g)}, \quad \sigma = \frac{f_1 - f}{(f_1 - f) + (f_1 - g)}$$

und

$$\tau = \varrho (f_1 - f) = \sigma (f_1 - g).$$

Ist D ein $[0, 1]$ enthaltendes, gemeinsames Holomorphiegebiet von f, g und f_1, so sind ϱ und σ meromorph in D, können also auf $[0, 1]$ höchstens endlich viele Pole besitzen. Dies kann aber nicht eintreten, da außerhalb dieser möglichen Pole auf $[0, 1]$ stets $0 \leqq \varrho(t) \leqq 1$ und $0 \leqq \sigma(t) \leqq 1$ gilt. Daher sind ϱ und σ in K, und beide nicht identisch 0, also ist auch $\tau \neq 0$. Weiter gilt wegen $\varrho, \sigma \leqq 1$ und $f_1 \geqq f, g$

$$f_1 - \tau = f_1 - \varrho (f_1 - f) \geqq f$$

und

$$f_1 - \tau = f_1 - \sigma (f_1 - g) \geqq g.$$

Daher ist $f_2 = f_1 - \tau$ ein Element von K, das der Bedingung genügt.

b) Der zu H assoziierte halbgeordnete Vektorraum ist ein (Z)-Raum. Offenbar wird dieser Raum von K erzeugt (1 ist Ordnungseinheit) und ist regulär halbgeordnet nach (1.7), da K für die Topologie gleichmäßiger Konvergenz auf $[0, 1]$ abgeschlossen (sogar normal) ist. (Z): Es sei $0 \leqq h \leqq f + g$ mit $f, g \in K$. Wir setzen

$$\lambda = \frac{f}{f + g}, \quad \mu = \frac{g}{f + g};$$

dann sind (nach der gleichen Schlußweise wie in a)) $\lambda, \mu \in K$, und es ist $\lambda + \mu = 1$. Man bestätigt leicht, daß $h_1 = \lambda h$ und $h_2 = \mu h$ der Bedingung (Z) genügen $\left(\text{z. B. ist } h_1 = \lambda h = \frac{h}{f + g} f \leqq f\right)$.

(13.1) *Jeder monoton vollständige Vektorverband ist ordnungsvollständig; das gleiche gilt von jedem monoton folgenvollständigen Vektorverband, auf dem eine strikt positive Linearform existiert.*

Beweis. Sei B eine beliebige nichtleere, durch das Element a majorisierte Teilmenge von L. Es bezeichne $\mathfrak{H}$ das System aller Teilmengen von B, die ein supremum besitzen; $\mathfrak{H}$ ist nicht leer, da jede endliche Teilmenge von B zu $\mathfrak{H}$ gehört. Nehmen wir an, die durch Inklusion auf $\mathfrak{H}$ definierte Ordnungsstruktur sei induktiv; dann existiert nach dem Satz von Zorn ein maximales Element $H_0 \in \mathfrak{H}$. Es sei $b_0 = \sup H_0$. Es muß nun $H_0 = B$ sein; andernfalls gäbe es ein $b \in B \sim H_0$, die Menge $H_0 \cup \{b\}$ hätte die obere Grenze $\sup(b_0, b)$ und H_0 wäre nicht maximal.

Der erste Teil des Satzes ist daher bewiesen, wenn wir zeigen, daß $\mathfrak{H}$ induktiv ist. Hierzu sei $\{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ein total geordnetes Teilsystem von $\mathfrak{H}$ und a_α die (nach Voraussetzung vorhandene) obere Grenze von H_α in L $(\alpha \in A)$. $\{a_\alpha : \alpha \in A\}$ ist offensichtlich eine total geordnete Teilmenge von L, die majorisiert ist (nämlich durch a). Nach Lemma 1 existiert eine mit $\{a_\alpha\}$ konfinale, wohlgeordnete Teilmenge $\{a_\beta : \beta \in A' \subset A\}$. Da $\{a_\beta\}$ eine transfinite, majorisierte Folge in L ist, existiert $a_0 = \sup\limits_{\beta \in A'} a_\beta$. a_0 ist ersichtlich die obere Grenze von $\cup \{H_\alpha : \alpha \in A\}$, so daß $\mathfrak{H}$ induktiv ist.

Wir betrachten noch den Fall, daß auf L eine strikt positive Linearform existiert. Dann kann nach Lemma 2 die im zweiten Teil des Beweises benutzte transfinite Folge $\{a_\beta\}$, die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit als strikt monoton annehmen können, höchstens die Mächtigkeit $\aleph_0$ haben. Daher gibt es jetzt, wieder nach Lemma 1, eine konfinale Teilfolge $\{a_\gamma\}$ von $\{a_\beta\}$, die einen Ordnungstypus $\leqq \omega_0 = \omega$ hat, d. h. die entweder aus nur einem Element besteht oder eine gewöhnliche Folge ist. Daher ist $\mathfrak{H}$ auch unter der zweiten Voraussetzung induktiv, und der Beweis ist beendet.

Ist L ein halbgeordneter Vektorraum, so bezeichne $[x, y]$ für beliebige $x, y \in L$ das Ordnungsintervall $\{z : x \leqq z \leqq y\}$. Zwei Elemente $a, b \in K$ heißen ordnungsfremd, wenn $[0, a] \cap [0, b] = \{0\}$ ist. Mit dieser Bezeichnungsweise gilt

Lemma 3. *Ist L ein halbgeordneter Vektorraum mit der Eigenschaft* (Z) *und sind a, b ordnungsfremd, so ist* $\inf(a, b)$ *vorhanden* (und $= 0$).

Beweis. Wir haben zu zeigen: $\{x \leqq a \;\&\; x \leqq b\} \Rightarrow x \leqq 0$. Aus $x \leqq a$ folgt, daß x dem Teilraum $K - K$ angehört (es ist nämlich $x = a - (a - x)$). Es gilt also $x = x_1 - x_2$ mit $x_1, x_2 \in K$, daher folgt nach (Z): Aus $x_1 \leqq a + x_2$ ergibt sich $x_1 = u' + u''$ mit $0 \leqq u' \leqq a$, $0 \leqq u'' \leqq x_2$. Weiter haben wir $x_1 \leqq b + x_2$ und folglich $u' \leqq b + (x_2 - u'')$, woraus nach (Z) folgt $u' = v' + v''$ mit $0 \leqq v' \leqq b$, $0 \leqq v'' \leqq x_2 - u''$. Es muß aber hier $v' = 0$ sein wegen $v' \in [0, a] \cap \cap [0, b]$, denn es ist $v' \leqq u' \leqq a$. Folglich ist $u' = v'' \leqq x_2 - u''$, also $x_1 = u' + + u'' \leqq x_2$ und $x = x_1 - x_2 \leqq 0$, w. z. b. w.

Wir kommen zum Hauptsatz dieses Abschnitts.

(13.2) *Jeder monoton vollständige* (Z)*-Raum (und jeder monoton folgenvollständige* (Z)*-Raum, auf dem eine strikt positive Linearform existiert) ist ein ordnungsvollständiger Vektorverband.*

Beweis. Nach (13.1) haben wir nur zu zeigen, daß unter jeder der beiden angegebenen Voraussetzungen der zugrunde gelegte Raum L ein Vektorverband ist. Da nach Def. 10 der positive Kegel K den Raum L erzeugt, genügt es, die Existenz der unteren Grenze $\inf(a, b)$ für zwei beliebige Elemente $a, b \in K$ nachzuweisen (vgl. HV, p. 131). Wir nehmen zunächst an, daß L monoton vollständig ist, und werden zeigen, daß für gegebene $a, b \in K$ das supremum einer (i. a. transfiniten) strikt monotonen Folge (in K) $= \inf(a, b)$ ist.

Diese Folge definieren wir durch transfinite Induktion: Wir setzen $x_0 = 0$ und nehmen an, x_α sei für alle Ordnungszahlen $\alpha < \beta$ bereits definiert mit den Eigenschaften: $\{x_\alpha : \alpha < \beta\}$ ist monoton, $x_\alpha \leqq a$ und $x_\alpha \leqq b$ für alle $\alpha < \beta$, und $x_\alpha = x_{\alpha+1}$ nur wenn $[0, a - x_\alpha] \cap [0, b - x_\alpha] = \{0\}$. Zur Definition von x_β unterscheiden wir zwei Fälle:

1. β ist isoliert (d. h. keine Limeszahl). Es sind dann entweder $a - x_{\beta-1}$ und $b - x_{\beta-1}$ fremd, und wir setzen $x_\beta = x_{\beta-1}$; oder es gibt ein $u_\beta \neq 0$ mit $u_\beta \in [0, a - x_{\beta-1}] \cap [0, b - x_{\beta-1}]$, und wir setzen $x_\beta = x_{\beta-1} + u_\beta$.

2. β ist eine Limeszahl. Nach Voraussetzung existiert $\sup\{x_\alpha : \alpha < \beta\}$, und wir setzen dieses Element $= x_\beta$.

Die so auf der Klasse aller Ordnungszahlen definierte Funktion mit Werten in K, die den drei obigen Bedingungen genügt, kann nun nicht für alle β strikt wachsen; ihr Wertevorrat ist nicht größer, als es die Mächtigkeit von K zuläßt. Daher gibt es eine kleinste Ordnungszahl β_0, für welche $x_{\beta_0} = x_{\beta_0+1}$ ist; es sind notwendig $a - x_{\beta_0}$ und $b - x_{\beta_0}$ fremd, und nach Lemma 3 ist $x_{\beta_0} = \inf(a, b)$. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Zum Beweis des zweiten Teiles zeigen wir zunächst, daß die Folge $\{x_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ für alle β der Zahlklasse $Z(\aleph_0)$ existiert. Angenommen, x_α sei mit den obigen drei Eigenschaften bereits für alle α, $\alpha < \beta \in Z(\aleph_0)$, konstruiert. Die Definition von x_β ist, falls β isoliert ist, unverändert; ist β eine Limeszahl und $x_\alpha \leqq x_{\alpha+1}$ für jedes $\alpha < \beta$, so ist nach Lemma 1 die Folge $\{x_\alpha : \alpha < \beta\}$ mit einer gewöhnlichen (majorisierten) Folge konfinal, und nach Voraussetzung existiert $\sup\limits_{\alpha<\beta} x_\alpha$ in K für jedes $\beta \in Z(\aleph_0)$. Wenn nun auf L eine strikt positive Linearform existiert, so muß nach Lemma 2 der Fall $x_\beta = x_{\beta+1}$ schon für ein $\beta \in Z(\aleph_0)$ eintreten. Damit ist der Beweis vollständig.

Mit Hilfe von (13.2) erhalten wir die folgende Charakterisierung endlichdimensionaler Vektorverbände (vgl. Beispiel 1, p. 121)[12]):

(13.3) *Es sei E ein n-dimensionaler halbgeordneter Vektorraum, dessen positiver Kegel E erzeugt, abgeschlossen (und echt) ist. Der Raum E ist dann und nur dann dem E^n (in natürlicher Ordnung) isomorph, wenn er die Eigenschaft* (Z) *besitzt.*

Bemerkung. In Verallgemeinerung von (13.2) gilt natürlich: Ist L ein monoton vollständiger, halbgeordneter linearer Raum mit der Eigenschaft (Z), so ist der lineare Teilraum $K - K$ ein ordnungsvollständiger Vektorverband.

---

[12]) Der Beweis von (13.3) ergibt sich unmittelbar aus (13.2), dem genannten Beispiel und der (bekannten) Tatsache, daß jeder n-dimensionale (archimedische) Vektorverband dem E^n in natürlicher Ordnung isomorph ist.

Ein entsprechender Satz gilt im Falle der Existenz einer strikt positiven Linearform auf L.

In jedem ordnungsvollständigen Vektorverband L gilt der Zerlegungssatz von RIESZ ([9], p. 25 th. 1):

(R) *Ist A eine beliebige nichtleere Teilmenge von L, A' die Menge aller zu A disjunkten Elemente von L, so ist A' ein Band in L; die Menge A'' der zu A' disjunkten Elemente ist das kleinste, A enthaltende Band in L und L ist direkte ordnungstreue Summe von A' und A''.*

Hierbei heißen $A, B \subset L$ disjunkt, wenn $\inf(|a|, |b|) = 0$ ist für alle $a \in A$, $b \in B$. Ein linearer Teilraum $L_1 \subset L$ heißt ein Band, wenn L_1 mit x auch jedes y, $|y| \leq |x|$, und mit jeder (in L) majorisierten Teilmenge X auch deren obere Grenze $\sup X$ enthält. Eine direkte Summe heißt ordnungstreu, wenn die zugehörigen Projektoren positiv sind. Wenn wir uns auf den Fall der Existenz einer strikt positiven Linearform auf L beschränken, so ergibt sich aus unseren Resultaten folgende Charakterisierung der Bänder:

(13.4) *Ist L ein ordnungsvollständiger Vektorverband, auf dem eine strikt positive Linearform existiert, und A eine nichtleere Teilmenge von L, so ist das von A erzeugte Band der kleinste lineare Teilraum $\hat{A}$ von L mit den Eigenschaften:*

a) *$a \in \hat{A}$ bedingt* $[0, |a|] \subset \hat{A}$.

b) *Für jede in L majorisierte monotone Folge $\{a_n\} \subset \hat{A}$ gilt* $\sup\{a_n\} \in \hat{A}$.

Beweis. Offenbar bedingt $x \in \hat{A}$ nach a) auch $y \in \hat{A}$ für jedes y, $|y| \leq |x|$. Wir haben nur noch zu zeigen, daß aus $X \subset \hat{A}$ auch $\sup X \in \hat{A}$ folgt, wenn X in L majorisiert ist. Nun ist aber $\sup X = \sup X'$, wo X' die Menge aller suprema endlicher Teilmengen von X bezeichnet. Nach a) ist aber, wenn $x_1, x_2 \in \hat{A}$ sind, auch $|x_1| \in \hat{A}$ und $|x_2| \in \hat{A}$, daher $\pm(|x_1| + |x_2|) \in \hat{A}$ und folglich auch $\sup(x_1, x_2) \in \hat{A}$. Daher ist mit $X \subset \hat{A}$ auch $X' \subset \hat{A}$ und es ist jetzt leicht, eine strikt monotone, transfinite Folge $\{a_\alpha : \alpha < \beta\} \subset X'$ (wo nach Lemma 2 $\beta \in Z(\aleph_0)$ sein muß) mit der Eigenschaft $\sup\{a_\alpha : \alpha < \beta\} = \sup X' = \sup X$ zu konstruieren, und nach Lemma 1 eine dazu konfinale gewöhnliche Folge.

Als Ordnungsdual eines halbgeordneten Vektorraumes L bezeichnet NAMIOKA [19] den Raum $L^+ = K^* - K^*$, wo K^* den Kegel (in L^*) aller positiven Linearformen auf L bedeutet. Da für die Ordnungstopologie $\mathfrak{T}_O$ (vgl. (4.4)) jede positive Linearform auf L stetig ist, stimmt nach (1.3) und (4.9) für einen (Z)-Raum L der Ordnungsdual L^+ mit dem topologischen Dual $L[\mathfrak{T}_O]'$ überein. Nach RIESZ [8''] ist für einen (Z)-Raum L der Raum L^+ in seiner natürlichen Ordnung ein ordnungsvollständiger Vektorverband.

Ein *Ordnungsideal* in einem Vektorverband R ist ein linearer Teilraum $S \subset R$ mit der Eigenschaft, daß aus $|y| \leq |x|$ und $x \in S$ stets folgt $y \in S$. Jedes Ordnungsideal in R ist ein Unterverband von R in dem Sinne, daß für jedes Paar $x, y \in S$ das $\sup(x, y)$ in S und R das gleiche ist. Es gilt nun folgender Satz, der für Vektorverbände L bereits von NAMIOKA bewiesen wurde ([19], th. 7.9):

(13.5) (Homomorphiesatz). *Ist L ein halbgeordneter Vektorraum mit der Eigenschaft* (Z) *und G ein Ordnungsideal in L^+, so ist die kanonische Abbildung $x \to \tilde{x}$ von L in G^+ ein Verbandshomomorphismus*[13]).

Beweis. Es sei $x \in L$ ein Element, für das $x^+ = \sup(0, x)$ in L existiert. Nach Definition von G^+ (vgl. [9], p. 36, (1)) ist, für festes f, $0 \leq f \in G^+$,

$$(\tilde{x})^+ (f) = \sup(0, \tilde{x})\,(f) = \sup\{g(x) : 0 \leqq g \leqq f, g \in G\}.$$

Wir haben zu zeigen, daß $\sup(0, \tilde{x})\,(f) = f(x^+)$ ist. Wir definieren einen Linearformenkeim[14]) t auf K durch

$$t(u) = \sup\{f(z) : 0 \leqq z \leqq u, z \leqq r x^+, r \geqq 0\} \qquad (u \in K).$$

Offenbar ist t positiv homogen. Weiter sieht man leicht, daß $t(u_1 + u_2) \geqq t(u_1) + t(u_2)$ ist. Es sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $z_\varepsilon \in K$ so gewählt, daß $z_\varepsilon \leqq u_1 + u_2$, $z_\varepsilon \leqq r_0 x^+$ für ein gewisses $r_0 \geqq 0$ und $f(z_\varepsilon) > t(u_1 + u_2) - \varepsilon$ ist. Infolge der Eigenschaft (Z) existiert eine Darstellung $z_\varepsilon = z_1 + z_2$ mit $z_i \in K$, $z_i \leqq u_i$ sowie $z_i \leqq r_0 x^+$ $(i = 1, 2)$. Daher ist

$$t(u_1 + u_2) - \varepsilon < f(z_\varepsilon) = f(z_1) + f(z_2) \leqq t(u_1) + t(u_2)$$

und folglich $t(u_1 + u_2) \leqq t(u_1) + t(u_2)$. Also ist t additiv und läßt sich (nicht notwendig eindeutig) zu einer auf L positiven Linearform fortsetzen, die wir wieder mit t bezeichnen wollen. Es ist ersichtlich t in der zur Definition von $(\tilde{x})^+$ benutzten Klasse, ferner $t(x^+) = f(x^+)$ und $t(x^-) = 0$, letzteres wegen $\inf(x^+, x^-) = 0$. Daher gilt $t(x^+) = t(x) = f(x^+)$ und der Satz ist bewiesen.

Auf Grund dieses Homomorphiesatzes läßt sich nun jeder (Z)-Raum L in einen kleinsten regulären Vektorverband (d. h. in einen kleinsten Vektorverband mit regulärer Ordnungsstruktur, HV Def. 3) isomorph einbetten. Zum Beweis benötigen wir noch

Lemma 4. *Ist L ein ordnungsvollständiger Vektorverband und sind A', A'' komplementäre Bänder in L, so ist $L = A' + A''$ topologische direkte Summe für die Ordnungstopologie $\mathfrak{T}_O$. Insbesondere ist daher jedes Band in L abgeschlossen für $\mathfrak{T}_O$, wenn $\mathfrak{T}_O$ separiert ist.*

Beweis. Bezeichnet P die (auf A'' verschwindende) Projektion von L auf A', so ist P wegen der Ordnungstreue der Darstellung $L = A' + A''$ ein positiver Endomorphismus von L. Wie aus der Definition von $\mathfrak{T}_O$ leicht folgt, ist jeder positive Endomorphismus von $L[\mathfrak{T}_O]$ stetig (vgl. (4.4) und (9.1)). Daher ist P stetig und die Behauptung bewiesen.

(13.6) *Zu jedem* (Z)*-Raum L existiert ein regulärer Vektorverband L_R mit den Eigenschaften:*

a) *L ist zu einem (linearen) Teilraum von L_R verbandsisomorph*[13]).

b) *Ist M ein regulärer Vektorverband, der einen zu L verbandsisomorphen*[14]) *Teilraum enthält, so enthält M auch einen zu L_R isomorphen Unterverband.*

Beweis. Da L regulär halbgeordnet ist, also L^+ Punkte in L trennt, enthält

---

[13]) Das heißt, für $x \to \tilde{x}$, $y \to \tilde{y}$ gilt $\sup(x, y) \to \sup(\tilde{x}, \tilde{y})$, falls die obere Grenze von x und y in L vorhanden ist.

[14]) Hiermit ist eine additive, positiv homogene Abbildung von K in R_+ gemeint. Jede solche Abbildung läßt sich zu einer auf L positiven Linearform fortsetzen. Ist $L \neq K - K$, so ist „$\leqq$" in L^+ keine eigentliche Ordnungsrelation, was aber für uns hier ohne Belang ist.

der Ordnungsbidual L^{++} einen zu L linear und nach (13.5) auch verbandsisomorphen Teilraum, den wir mit L identifizieren. Wir definieren L_R als den Durchschnitt aller Unterverbände von L^{++}, die L enthalten. Zum Beweis von b) sei M ein beliebiger regulärer Vektorverband, der L isomorph enthält. Da L^+ bzw. M^+ die Dualräume von L bzw. M für die jeweiligen Ordnungstopologien sind (s. o.), ist der Dual L' von L für die von $M\,[\mathfrak{T}_O]$ auf L induzierte Topologie, der dem zu L^0 komplementären Band in M^+ isomorph ist, bis auf Isomorphie in L^+ enthalten. L' ist ein Ordnungsideal in L^+, und daher ist L nach (13.5) in dem Raum $L^{++}/(L')^0$, wo $(L')^0$ bezüglich des Dualsystems $\langle L^+, L^{++}\rangle$ zu nehmen ist, isomorph enthalten. Andererseits ist $L^{++}/(L')^0$ zu einem Unterverband des Duals von $L'\,[\mathfrak{T}_O]$ isomorph (denn die Ordnungstopologie auf L', die mit der von $M^+\,[\mathfrak{T}_O]$ induzierten Topologie übereinstimmt, ist feiner als die von $L^+\,[\mathfrak{T}_O]$ auf L' induzierte Topologie), und letzterer ist nach Lemma 4 einem Band in M^{++} isomorph. Hieraus folgt, daß es einen L isomorph enthaltenden Unterverband von L^{++} gibt, der als Unterverband von M^{++} angesehen werden kann. Da das letztere auch von M gilt, ist der Satz bewiesen.

Der naheliegende Gedanke, in analoger Weise jeden (Z)-Raum in einen kleinsten ordnungsvollständigen Vektorverband isomorph einzubetten, ist nicht in befriedigender Weise durchführbar. Man kann zwar für einen (Z)-Raum L als „ordnungsvollständige Hülle" von L den kleinsten, L enthaltenden, ordnungsvollständigen Unterverband von L^{++} definieren, aber bei dieser Komplettierung ist selbst ein regulärer, ordnungsvollständiger Vektorverband i. a. nicht mit seiner „ordnungsvollständigen Hülle" identisch. Dies liegt daran, daß eine aufsteigend gerichtete (nach (13.5) notwendig unendliche), in L majorisierte Teilmenge (von L) in L und in L^{++} verschiedene suprema haben kann. Als Beispiel betrachten wir l_∞ in natürlicher Ordnung. Die monotone Folge $\{x_n\}_{n\in N}$, wo x_n die Koordinaten $x_{n,m} = \inf\left(1, \frac{n}{m}\right)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ hat, besitzt in l_∞ das supremum $x = (1, 1, \ldots)$. x kann aber nicht die obere Grenze dieser Folge in l_∞^{++} sein, denn in diesem Fall müßte $f(x) = \sup_n f(x_n)$ gelten für jede positive Linearform f auf l_∞. Da jede positive Linearform auf l_∞ stetig ist (für die übliche Normtopologie, die mit $\mathfrak{T}_O$ identisch ist), müßte nach (7.2) $x_n \to x$ auch für die Normtopologie gelten, denn der positive Kegel ist für diese Topologie normal. Es ist aber $\|x_n - x\| = 1$ für alle n, so daß in l_∞^{++} $\sup\{x_n\} \neq x$ ist. Nebenbei ergibt sich, daß l_∞ kein Band in seinem Ordnungsbidual ist. Ganz analoge Verhältnisse herrschen im B-Raum beschränkter reeller Funktionen auf $[0, 1]$.

(Z)-Räume L, für die die kanonische Einbettung in L^{++} ein Isomorphismus bezüglich der suprema beliebiger Teilmengen von L ist, werden wir im nächsten Abschnitt betrachten. Sie sind dadurch ausgezeichnet, daß in ihnen die oberen Grenzen (soweit sie vorhanden sind) majorisierter Teilmengen minimal sind (nämlich die kleinsten möglichen hinsichtlich der Werte positiver Linearformen auf L).

14. Ordnungsvollständigkeit und Topologie

Wie das vorangehende Beispiel zeigt, braucht selbst für einen regulären ordnungsvollständigen Vektorverband L die kanonische Einbettung in seinen Ordnungsbidual L^{++} kein Isomorphismus in den ordnungsvollständigen Verband L^{++} zu sein. Wir verabreden daher die

Definition 11. *Ein* (Z)-*Raum L heißt von minimalem Typus (*kurz: *minimal), wenn die kanonische Einbettung von L in L^{++} ein Isomorphismus von L in den beschränkt ordnungsvollständigen Verband L^{++} ist.*

Das bedeutet also: Ist X eine majorisierte Teilmenge von L und $\sup X$ in L vorhanden, so ist $\varphi(\sup X) = \sup \varphi(X)$, wo $\sup \varphi(X)$ in L^{++} zu nehmen ist und φ die kanonische Einbettung bezeichnet.

Ein Filter $\mathfrak{F}$ in einem ordnungsvollständigen Vektorverband heißt ordnungskonvergent, wenn $\mathfrak{F}$ eine ordnungsbeschränkte Teilmenge X (also auch ein nichtleeres Ordnungsintervall $[x, y]$) enthält und wenn

$$\sup_{X \in \mathfrak{F}} (\inf X) = \inf_{X \in \mathfrak{F}} (\sup X)$$

ist, wo X eine beliebige ordnungsbeschränkte Menge in $\mathfrak{F}$ bezeichnet. Der gemeinsame Wert der beiden Ausdrücke heißt der Ordnungslimes von $\mathfrak{F}$ ([9], p. 28, ex. 9).

(14.1) *L sei ein regulärer ordnungsvollständiger Vektorverband*[15]*). Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *L ist von minimalem Typus.*
2. *Der Filter der Enden jeder nichtleeren, aufsteigend gerichteten majorisierten Teilmenge von L konvergiert für die Ordnungstopologie $\mathfrak{T}_O$.*
3. *$\mathfrak{T}_O$ ist die feinste lokalkonvexe Topologie auf L, für die jeder ordnungskonvergente Filter konvergiert.*
4. *Jeder ordnungskonvergente Filter in L konvergiert für $\mathfrak{T}_O$.*

Beweis. 1. → 2. Es sei $X \neq \theta$ eine aufsteigend gerichtete, majorisierte Teilmenge von L und $x_0 = \sup X$. Da L minimal ist, gilt $x_0 = \sup X$ auch in L^{++}, d. h. aber für jede positive Linearform $f \in K^*$ gilt (K der positive Kegel in L)

$$(*) \qquad f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in X\}$$

nach Definition des supremums in L^{++} (vgl. [9], p. 36). Die Relation (*) bedeutet aber nichts anderes, als daß der Filter der Enden von X für die Topologie $\sigma(L, L^+)$ gegen x_0 konvergiert (denn es ist $L^+ = K^* - K^*$ nach Definition von L^+). Nun ist aber nach (1.3), (4.6) und (4.9) L^+ der topologische Dual von L für $\mathfrak{T}_O$, daher $\sigma(L, L^+)$ die zu $\mathfrak{T}_O$ assoziierte schwache Topologie. Aus (4.9) und (7.2) folgt jetzt, daß der Filter der Enden von X für $\mathfrak{T}_O$ konvergiert.

2. → 3. Ist $\mathfrak{F}$ ein gegen x_0 ordnungskonvergenter Filter auf L und X ein beliebiges ordnungsbeschränktes Element von $\mathfrak{F}$, so ist die Menge $Y = \{\inf X : X \in \mathfrak{F}\}$ aufsteigend gerichtet und majorisiert. Entsprechend ist $Z = \{\sup X : X \in \mathfrak{F}\}$ absteigend gerichtet und minorisiert. Nach Voraus-

[15]) Setzt man die Ordnungsstruktur von L nicht als regulär voraus, so ist $\mathfrak{T}_0$ nicht separiert und unter Umständen die triviale Topologie.

setzung konvergieren die Filter der Enden von Y bzw. Z beide für $\mathfrak{T}_O$, und zwar nach (7.1) wegen der $\mathfrak{T}_O$-Abgeschlossenheit[16]) von K in L gegen $\sup Y = x_0$ bzw. $\inf Z = x_0$. Es sei U eine $\mathfrak{T}_O$-Umgebung von x_0, die mit jedem Paar $x_1, x_2 \in U$ auch das Ordnungsintervall $[x_1, x_2]$ enthält. (Da nach (4.9) K für $\mathfrak{T}_O$ in L normal ist, existiert eine $\mathfrak{T}_O$-Nullumgebungsbasis in L mit dieser Eigenschaft. Vgl. die Ergänzungen, Nr. 1.) Wegen der $\mathfrak{T}_O$-Konvergenz der Filter der Enden von Y und Z gegen x_0 gibt es Elemente $y \in Y \cap U$ und $z \in Z \cap U$. Dann gilt $[y, z] \subset U$ und nach Definition von Y und Z ist $[y, z] \in \mathfrak{F}$. Da U ein beliebiges Element einer Umgebungsbasis von x_0 ist, konvergiert $\mathfrak{F}$ für $\mathfrak{T}_O$ gegen x_0.

Wir haben noch zu zeigen, daß $\mathfrak{T}_O$ die feinste lokalkonvexe Topologie auf L ist, für die jeder ordnungskonvergente Filter konvergiert. Es sei $\mathfrak{T}$ eine Topologie dieser Klasse auf L, und L_0 der von $y_0 \in K$ erzeugte Teilraum $\bigcup_{n=1}^{\infty} n[-y_0, y_0]$ von L [vgl. den Beweis von (4.4)]. Der Filter $\mathfrak{F}$ in L, der die Basis $\{n^{-1}[-y_0, y_0] : n \in \mathrm{N}\}$ besitzt, ist ordnungskonvergent gegen 0, denn L ist wegen der $\mathfrak{T}_O$-Abgeschlossenheit von K[16]) archimedisch geordnet. Da die Spur von $\mathfrak{F}$ auf L_0 nichts anderes ist als der Umgebungsfilter von 0 für die in (4.1) definierte, durch die Ordnungseinheit y_0 in L_0 erzeugte Normtopologie $\mathfrak{T}(y_0)$, ist die kanonische Einbettung von $L_0[\mathfrak{T}(y_0)]$ in $L[\mathfrak{T}]$ stetig. Daher ist nach Definition von $\mathfrak{T}_O$ diese Topologie feiner als $\mathfrak{T}$, w. z. b. w.

3. → 4. Offenbar.

4. → 1. Es sei X eine beliebige, aufsteigend gerichtete majorisierte Teilmenge $\neq \theta$ von L und $x_0 = \sup X$. Offenbar ist der Filter der Enden von X ordnungskonvergent gegen x_0. Nach Voraussetzung konvergiert dieser Filter für $\mathfrak{T}_O$, und zwar nach (7.1) ebenfalls gegen x_0. Nach (4.6) ist aber jede positive Linearform auf L stetig für $\mathfrak{T}_O$, daher gilt

$$f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in X\}$$

für jedes $f \in K^*$. Hieraus folgt wegen der Definition oberer Grenzen in L^{++} ohne weiteres, daß L von minimalem Typus ist. Q. E. D.

(14.2) *Es sei E ein* (Z)*-Raum, versehen mit einer lokalkonvexen Topologie, für die E halbreflexiv und K abgeschlossen und normal ist. Dann ist E ein ordnungsvollständiger Vektorverband; ist überdies jede positive Linearform auf E stetig, so ist E minimal, $\tau(E, E') = \mathfrak{T}_O$ und E für $\mathfrak{T}_O$ reflexiv.*

Beweis. Nach (7.3) ist E monoton vollständig und daher nach (13.2) ein ordnungsvollständiger Vektorverband. Es sei $\mathfrak{T}$ die Topologie von E. Ist nun jede positive Linearform auf E stetig für $\mathfrak{T}$, so hat E [da K für $\mathfrak{T}$ nach Voraussetzung und für $\mathfrak{T}_O$ nach (4.9) normal ist] für $\mathfrak{T}$ und für $\mathfrak{T}_O$ denselben Dualraum E^+, und weil nach (4.4) $\mathfrak{T}_O$ feiner ist als $\mathfrak{T}$, liegt $\mathfrak{T}$ zwischen $\mathfrak{T}_O$ und $\sigma(E, E^+)$. Da $E[\mathfrak{T}_O]$ bornologisch ist, gilt notwendig $\mathfrak{T}_O = \tau(E, E^+)$. Als halbreflexiver Raum ist E für $\tau(E, E^+)$ quasivollständig, und da jeder quasivollständige bornologische Raum tonneliert ist (vgl. [8], p. 21, lemme 1), ist E

[16]) Wegen der Stetigkeit von $x \to |x|$ für $\mathfrak{T}_0$ (vgl. Ergänzungen, Nr. 3) ist K als volles Urbild von $\{0\}$ bezüglich der Abbildung $x \to x - |x|$ abgeschlossen.

für $\mathfrak{T}_O$ tonneliert und folglich reflexiv.

Wir haben noch zu zeigen, daß E von minimalem Typus ist. Nach (7.3) konvergiert aber der Filter der Enden jeder nichtleeren, aufsteigend gerichteten und majorisierten Menge für $\mathfrak{T}_O$, so daß nach 2. von (14.1) E minimal ist.

Corollar. *Jeder für die Ordnungstopologie reflexive* (Z)-*Raum ist ein ordnungsvollständiger Vektorverband von minimalem Typus.*

Aus dem Corollar erhält man eine große Anzahl von Beispielen minimaler, ordnungsvollständiger Vektorverbände. Die Reflexivität von E für $\mathfrak{T}_O$ ist natürlich keine notwendige Bedingung dafür, daß E minimal sei. Ein Beispiel hierzu liefert der Raum l_1, auf dem die Normtopologie mit $\mathfrak{T}_O$ übereinstimmt, und der als Verband minimal ist.

Wir wenden uns jetzt der Frage zu, welche Folgerungen sich aus Vollständigkeitseigenschaften im ordnungstheoretischen Sinne für die topologische Vollständigkeit (bezüglich geeigneter Topologien) ergeben; hierbei ist nicht zu erwarten, daß man über Quasivollständigkeit wesentlich hinauskommt, da jede ordnungsbeschränkte Teilmenge eines halbgeordneten Vektorraumes nach dem 2. Corollar von (1.1) auch topologisch beschränkt ist für jede lokalkonvexe Topologie, für die der positive Kegel normal ist (und allgemeiner für jede Topologie, die gröber[17]) ist als $\mathfrak{T}_O$). Der erste allgemeine Satz in dieser Richtung wurde von AMEMIYA, der frühere Resultate von KANTOROVICH und NAKANO von unnötigen Zusatzvoraussetzungen befreite, für normierte Vektorverbände[18]) bewiesen [2']. Da sich auf diesen Satz weitere Vollständigkeitsaussagen aufbauen lassen, beweisen wir ihn hier nochmals, und zwar in allgemeinerer Gestalt.

(14.3) *Es sei E ein halbgeordneter normierter Raum, dessen Normtopologie gröber als $\mathfrak{T}_O$*[19]) *und dessen positiver Kegel strikter* BZ-*Kegel ist. Besitzt jede monotone, normbeschränkte Folge in E ein supremum, so ist E ein Banachraum.*

Beweis. Wir zeigen zunächst: Es gibt eine Zahl $0 < \varrho \leqq 1$, so daß für jede monotone Folge $\{x_n\} \subset K$ mit $x = \sup\{x_n\}$ gilt:

$$\sup\{\|x_n\| : n \in \mathrm{N}\} \geqq \varrho \|x\| .$$

Wäre dies nämlich nicht der Fall, so gäbe es eine Doppelfolge $\{x_{m,n}\}$ in K mit den Eigenschaften: $\{x_{m,n} : n \in \mathrm{N}\}$ ist monoton für jedes m, $x_m = \sup\{x_{m,n} : n \in \mathrm{N}\}$, $\sup\{\|x_{m,n}\| : n \in \mathrm{N}\} \leqq 2^{-m}$ und $\|x_m\| \geqq m$ $(m \in \mathrm{N})$. Setzt man nun

$$y_m = x_{1,m} + x_{2,m} + \cdots + x_{m,m} ,$$

so ist $\{y_m\}$ monoton und $\|y_m\| < 1$ für alle m. Daher existiert $y = \sup\{y_m\}$ und es ist $y \geqq x_m$ für jedes m; dies widerspricht aber, da $\{x_m\}$ nicht normbeschränkt ist, der Voraussetzung, daß die Normtopologie gröber sei als $\mathfrak{T}_O$ (denn für $\mathfrak{T}_O$ ist jedes Ordnungsintervall beschränkt). — Hieraus folgt nun, daß jede monotone Cauchyfolge $\{u_n\}$ konvergiert; es existiert nämlich nach Voraus-

[17]) Gleichheit ist zugelassen.

[18]) Ein normierter Vektorverband ist in unserer Terminologie ein Vektorverband und ein normierter Raum, in dem der positive Kegel normal und die Abbildung $x \to |x|$ stetig ist. K ist dann automatisch auch ein strikter BZ-Kegel, vgl. die Ergänzungen, Nr. 2.

[19]) Dies ist nach (4.4) stets der Fall, wenn K normal ist für die gegebene Topologie.

setzung $u = \sup\{u_n\}$ ($\{u_n\}$ als aufsteigend vorausgesetzt). Nach dem soeben Bewiesenen ist aber

$$\sup\{\|u_n - u_m\| : n > m\} \geqq \varrho \|u - u_m\|$$

für jedes m, und daher $u_m \to u$. — Ist schließlich eine beliebige Cauchyfolge in E gegeben, so gibt es eine Teilfolge, die sich (ganz nach dem Muster des Vollständigkeitsbeweises in HV II, p. 277) wegen der strikten BZ-Eigenschaft von K als Differenz zweier monotoner Cauchyfolgen darstellen läßt und daher konvergiert. Damit ist der Satz bewiesen.

(14.4) *Jeder monoton vollständige, fastarchimedisch halbgeordnete Vektorraum mit Ordnungseinheit ist vollständig für die Ordnungstopologie.*

Beweis. Nach Definition der Ordnungstopologie $\mathfrak{T}_O$ [vgl. (4.1) und (4.4), Corollar] auf L ist K ein strikter BZ-Kegel, da K für $\mathfrak{T}_O$ innere Punkte besitzt, und jede $\mathfrak{T}_O$-beschränkte Teilmenge von L ist majorisiert. Daher folgt die Behauptung unmittelbar aus (14.3)[20]).

Mit Hilfe von (14.4) erhalten wir nun die folgende Verallgemeinerung von (14.3).

(14.5) *Es sei E ein halbgeordneter Vektorraum, versehen mit einer lokalkonvexen Topologie, die gröber als $\mathfrak{T}_O$ ist, und für die E metrisierbar und K strikter* BZ-*Kegel ist. Besitzt jede monotone,* (topologisch) *beschränkte Folge in E ein supremum, so ist E vollständig.*

Beweis. Wir denken uns die Topologie von E durch eine aufsteigende Folge von Halbnormen $\{p_n\}$ erzeugt. Ist eine beliebige Cauchyfolge in E gegeben, so gibt es eine Teilfolge $\{z_k\}$ mit der Eigenschaft

$$p_k(z_{k+1} - z_k) \leqq 2^{-2k} \qquad (k \in \mathrm{N}).$$

Wir setzen $w_k = 2^k(z_{k+1} - z_k)$; dann ist die Folge $\{2^k w_k\}$ beschränkt. [Es ist nämlich

$$p_{k_0}(2^k w_k) \leqq p_k(2^k w_k) \leqq 1$$

für $k \geqq k_0$, da die p_k als aufsteigend vorausgesetzt wurden.] Wegen der strikten BZ-Eigenschaft von K gibt es daher zwei Folgen $\{u_k\}$, $\{v_k\} \subset K$, so daß $w_k = u_k - v_k$ ist ($k \in \mathrm{N}$) und die Folgen $\{2^k u_k\}$, $\{2^k v_k\}$ beschränkt sind. Daher sind auch die Summen $\sum\{u_l : 1 \leqq l \leqq k\}$ und $\sum\{v_l : 1 \leqq l \leqq k\}$ ($k \in \mathrm{N}$) beschränkt, also nach Voraussetzung majorisiert:

$$\sum_{l=1}^{k} u_l \leqq r\,, \quad \sum_{l=1}^{k} v_l \leqq s \qquad (r, s \in K;\ k \in \mathrm{N}).$$

Daher sind die Folgen $\left\{\sum_1^k u_l : k \in \mathrm{N}\right\}$ und $\left\{\sum_1^k v_l : k \in \mathrm{N}\right\}$ in dem linearen Teilraum $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} n[-r-s, r+s]$ von E enthalten und für die Normtopologie auf L, deren Einheitskugel $[-r-s, r+s]$ ist [vgl. (4.1)] und die die Ordnungs-

[20]) Ein direkter Beweis wurde Verf. von Herrn I. Namioka mitgeteilt.

topologie $\mathfrak{T}_O$ auf L ist, beschränkt. Nach (14.4) ist $L[\mathfrak{T}_O]$ vollständig. Andererseits sind die Folgen

$$x_k = \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{2^l} u_l, \quad y_k = \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{2^l} v_l \qquad (k \in \mathrm{N})$$

Cauchyfolgen in $L[\mathfrak{T}_O]$, denn es gilt für $\{x_k\}$

$$0 \leqq x_{k+p} - x_k = \sum_{k+1}^{k+p} \frac{1}{2^l} u_l \leqq \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{1}^{p} u_{k+l} \leqq \frac{1}{2^{k+1}} r \qquad (k, p \in \mathrm{N})$$

und Entsprechendes gilt für $\{y_k\}$. Es konvergiert also $\{x_k\}$ in $L[\mathfrak{T}_O]$ gegen ein $x \in K \cap L$, und entsprechend hat man $y_k \to y$. Nun ist die von der Ordnungstopologie von E auf dem Teilraum L induzierte Topologie gröber als die Ordnungstopologie von L, und daher ist auch die von der gegebenen Topologie auf L induzierte Topologie gröber als die Ordnungstopologie von L. Daher gelten die Relationen $x_k \to x$ und $y_k \to y$ auch für die auf E gegebene Topologie; da $z_{k+1} = z_1 + x_k - y_k$ ist $(k \in \mathrm{N})$, konvergiert $\{z_k\}$ in E, w. z. b. w.

Da in einem Vektorverband der positive Kegel stets strikter BZ-Kegel für $\mathfrak{T}_O$ ist [vgl. Ergänzungen, (2.b)], ergibt sich noch das

Corollar. *Ist L ein für die Ordnungstopologie metrisierbarer Vektorverband, in dem jede $\mathfrak{T}_O$-beschränkte monotone Folge ein supremum besitzt, so ist $L[\mathfrak{T}_O]$ topologisch vollständig.*

Wir schließen diesen Abschnitt mit der folgenden Bemerkung: Ist L ein für die Ordnungstopologie reflexiver, halbgeordneter Vektorraum und $\beta(L', L)$ die Ordnungstopologie auf dem halbgeordneten Raum L', so ist $L[\mathfrak{T}_O]$ als starker Dual eines bornologischen Raumes topologisch vollständig.

15. Quasi-innere Punkte des positiven Kegels

Bei der Untersuchung von Spektraleigenschaften positiver Operatoren ist, wie z. B. [17] zeigt, das Vorhandensein innerer Punkte des positiven Kegels K in dem zugrunde gelegten topologischen Vektorraum ein sehr nützlicher Umstand. Andererseits sind positive Kegel mit inneren Punkten in den Anwendungen selten, wie schon die Beispiele in HV, p. 130, zeigen; normale Kegel mit inneren Punkten gibt es nach (7.6) überhaupt nur in normierbaren Räumen. Man kann jedoch eine Reihe von Spektraleigenschaften positiver linearer Abbildungen auf einen Begriff gründen [13″], der wesentlich schwächer als der des inneren Punktes ist, und den wir wie folgt definieren:

Definition 12. *In einem halbgeordneten topologischen Vektorraum E heißt x ein quasi-innerer Punkt des positiven Kegels K, wenn das Ordnungsintervall $[0, x]$ in E total ist.*

Offenbar ist jeder innere Punkt von K (allgemeiner: jeder Punkt, bezüglich dessen K in E radial ist) ein quasi-innerer Punkt (q.i. Punkt) von K, und jeder q.i. Punkt von K ist, falls $E \neq \{0\}$ ist, ein von Null verschiedenes Element von K.

Nach V.L. KLEE heißt ein Punkt $x \in B$, B eine konvexe Teilmenge eines topologischen Vektorraumes, nicht unterstützter Punkt (non-support point)

von B[21]), wenn jede, B in x unterstützende, abgeschlossene Hyperebene die Menge B enthält. Es ist klar, daß jeder q.i. Punkt von K nicht unterstützter Punkt von K ist; die Umkehrung hiervon ist, auch in lokalkonvexen Räumen, im allgemeinen unrichtig.

Ist E ein Vektorverband (Rieszscher Raum, Abschnitt 3), so heißt nach Freudenthal [2″] ein Punkt $x \in K$ schwache Ordnungseinheit (O.E.) von E, wenn $\inf(x, |y|) \neq 0$ ist für alle $0 \neq y \in E$. Ist E außerdem ein lokalkonvexer Raum, für dessen Topologie K normal und die Abbildung $x \to |x|$ stetig sind, so ist jeder q.i. Punkt von K schwache O.E. von E; die Umkehrung hiervon ist im allgemeinen unrichtig.

Besitzt K innere Punkte in E, so fallen die Begriffe innerer Punkt, q.i. Punkt, Ordnungseinheit (HV, p. 120) und schwache O.E.[22]) natürlich zusammen; dies ist insbesondere der Fall, wenn E endlichdimensional ist und von K (über $\mathbf{R}$) erzeugt wird. Allgemein ist in der folgenden Reihe der jeweils nachfolgende Begriff der schwächere: O.E. $=>$ q.i. Punkt $=>$ n.u. Punkt $=>$ schwache O.E. (letzteres, wenn E ein ordnungsvollständiger Verband ist, s. (15.6)).

Beispiele. 1. In den Folgenräumen (c_0) und l^p, $1 \leq p < \infty$, sind die q.i. Punkte von K (für die natürliche Ordnung, HV p. 130) genau die Folgen mit positiven Gliedern; in den Funktionenräumen L^p, $1 \leq p < \infty$, sind es die Funktionenklassen, die einen höchstens auf einer Nullmenge verschwindenden, nichtnegativen Repräsentanten besitzen. Ist C_0 der B-Raum auf [0, 1] stetiger, in 0 verschwindender reeller Funktionen, so ist jedes nur in 0 verschwindende, nichtnegative Element q.i. Punkt von K. Im B-Raum l_∞ der beschränkten Folgen reeller Zahlen ist ein $x = (x_n)$ mit $x_n > 0$ $(n \in \mathbf{N})$ i. a. nicht q.i. Punkt von K; dies ist dann und nur dann der Fall, wenn $\inf x_n > 0$ ist (und dann ist x innerer Punkt von K). Ganz Entsprechendes gilt im B-Raum beschränkter reeller Funktionen auf [0, 1].

2. Es sei E das (algebraische und topologische) Produkt abzählbar vieler Exemplare von l_∞. Ist E halbgeordnet mit positivem Kegel $K = \prod K_n$ (K_n der positive Kegel in l_∞, $n \in \mathbf{N}$), so ist jedes $x = (x_n)$, $x_n \in \mathring{K}_n$ $(n \in \mathbf{N})$, q.i. Punkt von K (und nur diese); tatsächlich enthält die lineare Hülle von $[0, x]$ für ein solches x die algebraische direkte Summe der l_∞, und letztere ist dicht in E.

3. Es sei E der Raum aller endlichen reellen Funktionen auf [0, 1], versehen mit der Produkttopologie ($\aleph$-vieler Exemplare von $\mathbf{R}$) und in natürlicher Ordnung. Die q.i. Punkte von K (es ist $\mathring{K} = \emptyset$) sind die Elemente $f \in E$ mit $\inf\{f(t) : t \in [0, 1]\} > 0$. In der Tat enthält die lineare Hülle von $[0, f]$ für ein solches f alle auf [0, 1] stetigen, stückweise linearen reellen Funktionen, und die Menge L der letzteren ist offenbar dicht in E. (Aus dieser Bemerkung folgt in einfacher Weise, daß E *separabel* ist: Ist nämlich L_r die Menge aller stetigen,

---

[21]) Ursprünglich [5″] hieß $x \in B$ n. u., wenn x keiner B unterstützenden abgeschlossenen Hyperebene angehört. Allgemeiner [6″] heißt für einen linearen Teilraum $F \subset E^*$ $x \in B$ ein F-n. u. Punkt von B, wenn die in der obigen Definition zugelassenen Hyperebenen $\sigma(E, F)$-abgeschlossen sind. Analog kann man für einen halbgeordneten linearen Raum den Begriff F-q.-i. Punkt bilden.

[22]) Falls E lokalkonvex und ein Verband mit normalem positivem Kegel ist.

stückweise linearen Funktionen in E, die ihre Knickstellen nur in rationalen Punkten von $[0, 1]$ haben und an diesen Stellen und 0, 1 nur rationale Werte annehmen, so ist offenbar L_r dicht in L, während andererseits L_r abzählbar ist.)

4. Die Menge der q.i. Punkte von K kann leer sein, selbst wenn E ein vollständiger, tonnelierter Raum und K ein normaler, strikter BZ-Kegel ist. Ein Beispiel hierfür ist der Raum φ (vgl. [14]), lokalkonvexe direkte Summe abzählbar vieler Exemplare von $\mathbf{R}$.

Es sei nun E ein halbgeordneter, lokalkonvexer Raum. Ist die Menge K_q der q.i. Punkte von K nicht leer, so bildet K_q einen stumpfen (d. h. seinen Scheitel 0 nicht enthaltenden) Teilkegel von K, der K erschöpft (Def. 5, Abschnitt 4); denn ist $x_0 \in K$ und $x \in K_q$, so ist $x_0 + x \in K_q$.

(15.1) *K_q ist entweder leer oder dicht in K.*

Beweis. Offenbar ist $x \in K_q$ höchstens dann, wenn $\langle x, x'\rangle > 0$ ist für jedes $x' \in K'$, $x' \neq 0$. Es sei nun $x' \in E'$ und $\langle x, x'\rangle \geqq 0$ für alle $x \in K_q$. Wäre $x' \notin K'$, so gäbe es ein $x_0 \in \bar{K}$, für welches $\langle x_0, x'\rangle < 0$ gälte. Ist $x \in K_q$, so gibt es ein $\lambda > 0$ mit der Eigenschaft

$$\langle \lambda\, x_0 + x, x'\rangle < 0\,;$$

dies widerspricht aber der Voraussetzung, daß x' auf K_q nicht negativ sein soll, denn $x_0 \in \bar{K}$ und $x \in K_q$ bedingen nach der obigen Bemerkung $x_0 + x \in \bar{K}_q$. Daher ist $K^0 = K_q^0$ und nach dem Bipolarensatz ist K_q (wenn es nicht leer ist) dicht in K.

(15.2) *Sei E ein separabler, metrisierbarer lokalkonvexer Raum, K ein vollständiger und totaler Kegel in E. Dann ist K_q nicht leer; ist E außerdem normierbar, so besitzt K' einen q.i. Punkt für $\sigma(E', E)$*[23]).

Beweis. Sei $\{p_n\}$ eine aufsteigende, die Topologie von E erzeugende Folge von Halbnormen und $\{x_n\}$ eine in K dichte Folge (K ist infolge der Voraussetzungen über E separabel). Da K vollständig ist, können wir das Element

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\,\frac{x_n}{p_n(x_n)}$$

bilden. Da $\bigcup\limits_{1}^{\infty} n\,[-x_0, x_0]$ die sämtlichen Elemente $x_m - x_n$ $(m, n \in N)$ enthält, ist diese Vereinigung (die mit der linearen Hülle von $[0, x_0]$ identisch ist) dicht in $K - K$, folglich in E. Daher ist $x_0 \in K_q$. Ist E normierbar, so ist $K' \cap S$ (S die Einheitskugel in E') ein für $\sigma(E', E)$ separabler Raum und man beweist die Existenz eines q.i. Punktes von K' für $\sigma(E', E)$ durch eine analoge Überlegung. [Aus der Echtheit von K folgt nach routinemäßigen Schlüssen, daß K' in E' für $\sigma(E', E)$ total ist.]

Weiter gilt

(15.3) *Ist E lokalkonvex und $\overset{-1}{f}(1) \cap K$ beschränkt für ein $f \in E'$, so ist f q.i. Punkt von K' für $\beta(E', E)$* [und a fortiori für $\sigma(E', E)$]. *Ist außerdem K BZ-Kegel und E normierbar, so ist f innerer Punkt von K' für $\beta(E', E)$ und $\beta(E', E)$ die Ordnungstopologie auf E'.*

Beweis. Die Voraussetzung zieht nach sich, daß $f \in K'$ und daß K normal

[23]) Für die zweite Behauptung ist K als echt vorauszusetzen.

ist in E [s. Ergänzungen, (1.b)]. Daher ist nach (1.3) $E' = K' - K'$. Ist nun $g \in K'$, $C = \overset{-1}{f}(1) \cap K$ und $\sup g(C) = \alpha$, so ist $g \leqq \alpha f$ für die Ordnungsstruktur auf E', deren positiver Kegel K' ist. Daher ist f (starke) O.E. in E' und folglich q.i. Punkt von K'. Ist außerdem K BZ-Kegel in E, so ist nach (2.2) K' normal für $\beta(E', E)$, und die Normierbarkeit von E bedingt, daß E' für die starke Topologie ein vollständiger normierbarer Raum mit abgeschlossenem K' ist. Nach (4.2) (wo der positive Kegel als abgeschlossen vorauszusetzen ist, vgl. Ergänzungen Nr. 4) ist daher $\beta(E', E)$ die Ordnungstopologie auf E' (für die Ordnungsstruktur, deren positiver Kegel K' ist) und f innerer Punkt von K'.

Der folgende Satz beleuchtet die Beziehung zwischen den schwachen O.E. von E und den q.i. Punkten des positiven Kegels, wenn E ein Vektorverband und ein (Hausdorffscher) topologischer linearer Raum ist.

(15.4) *$E[\mathfrak{T}]$ sei ein Vektorverband und ein topologischer Vektorraum.*

a) *Ist $x \to |x|$ stetig, so ist jeder q.i. Punkt von K schwache O.E. von E.*

b) *Ist E regulär, ein Ordnungsideal in E^{++} und $\mathfrak{T}$ gröber als $\mathfrak{T}_O$, so ist jede schwache O.E. ein q.i. Punkt von K.*

Beweis. a) Es sei $x_0 \in K_q$ und $\inf(x_0, |y|) = 0$. Dann ist y zu dem Ordnungsintervall $[0, x_0]$ und wegen der Stetigkeit von $x \to |x|$ auch zu allen Elementen der abgeschlossenen linearen Hülle E_1 dieses Intervalls im verbandstheoretischen Sinn disjunkt. Nach Definition 12 ist $E_1 = E$, daher $y = 0$ und x_0 ist schwache O.E. von E.

b) Sei y_0 eine schwache O.E. von E. Das von $\{y_0\}$ im Raum E^{++} (in den wir E isomorph eingebettet denken) erzeugte Band $\hat{E}$ enthält offenbar E. Bezeichnen wir mit E_0 die lineare Hülle von $[0, y_0]$ in E^{++}, so ist E_0 dicht in $E[\mathfrak{T}_O]$. Denn der positive Kegel $\hat{K}$ in $\hat{E}$, der $\hat{E}$ erzeugt, besteht nach [9], p. 25, prop. 5 aus den oberen Grenzen $\sup M$ aller gerichteten, in E^{++} majorisierten Teilmengen von K^{++}, deren Elemente von y_0 im Sinne der Def. 5 (Abschnitt 4) umfaßt werden, und die also Teilmengen von E_0 sind. Der Filter der Enden von M konvergiert aber für $\sigma(\hat{E}, E^+)$, so daß E_0 σ-dicht in $\hat{E}$ ist. Andererseits ist $E_0 \subset E$, wenn E ein Ordnungsideal in E^{++} ist, und folglich ist E_0 dicht in $E[\mathfrak{T}_O]$.

Ist nun $\mathfrak{T}$ gröber als $\mathfrak{T}_O$ und E_1 die $\mathfrak{T}$-abgeschlossene Hülle von E_0, so ist $E_1 = E$, $y_0 \in K_q$ und der Satz ist bewiesen.

(15.5) *Es sei E ein Vektorverband und ein separabler F-Raum, in dem die Abbildung $x \to |x|$ stetig ist. Dann ist der Kegel der schwachen O.E. von E dicht in K.*

Beweis. Da E ein Vektorverband ist, gilt $E = K - K$ und daher ist K total in E; K ist abgeschlossen und folglich vollständig. Die Behauptung folgt jetzt aus (15.4) mit Hilfe von (15.1) und (15.2).

Dieser Satz ist eine wesentliche Verallgemeinerung eines Satzes von Freudenthal [2″], nach dem in jedem separablen Banachraum, der ein Vektorverband mit normalem positivem Kegel und stetigem $x \to |x|$ ist, eine schwache Ordnungseinheit existiert.

Wir wenden uns jetzt dem Zusammenhang zwischen q.i. Punkten und nicht unterstützten (n.u.) Punkten eines Kegels K zu. Wie oben bemerkt wurde,

ist in jedem topologischen Vektorraum jeder q.i. Punkt von K n. u. Punkt von K. Die Umkehrung hiervon ist keineswegs richtig. Hierzu verdankt der Verfasser Herrn V. L. KLEE die Kenntnis des folgenden Sachverhaltes:

Es sei F ein separabler Banachraum, E eine abgeschlossene, nicht homogene Hyperebene in F. Es sei $\mathscr{S}$ die Menge aller nichtleeren, konvexen kompakten Teilmengen von E; versehen mit der bekannten Hausdorffschen Metrik ist $\mathscr{S}$ ein vollständiger metrischer Raum. (Eine Teilmenge von $\mathscr{S}$, die in $\mathscr{S}$ von 2. Kategorie ist, bezeichnen wir als aus fast allen Elementen von $\mathscr{S}$ bestehend.) Ist die affine Hülle eines $S \in \mathscr{S}$ dicht in E, so ist der von S in F aufgespannte Kegel K_S (mit dem Scheitel 0) total und normal [vgl. Ergänzungen, (1.b)] in F. Unter diesen Voraussetzungen gilt:

(K) *Für fast alle $S \in \mathscr{S}$ ist K_S total in F und enthält n. u. Punkte, die nicht q.i. sind.*

Die Identität von n. u. Punkten und q.i. Punkten eines Kegels K wird also nur unter sehr restriktiven Bedingungen herzustellen sein. Wir stellen zunächst den folgenden Zusammenhang her:

(15.6) *In jedem regulären, ordnungsvollständigen Vektorverband L ist jeder L^*-n. u. Punkt des positiven Kegels schwache O.E.; ist L minimal, so gilt auch die Umkehrung.*

Beweis. Ist $x_0 \in K$ ein L^*-n. u. Punkt von K, so muß x_0 schwache O.E. sein; andernfalls wäre das von $\{x_0\}$ erzeugte Band $A' \neq L$, und L wäre direkte ordnungstreue Summe von A' und A'' [vgl. (R), Abschnitt 13], wo $A'' \neq \{0\}$ das Band aller zu A' disjunkten Elemente von L ist. Da A'' als (nach Abschnitt 13, Lemma 4 für $\mathfrak{T}_O$ sogar abgeschlossener) Teilraum von L selbst regulär ist, gäbe es eine auf A'' positive Linearform $f_0 \neq 0$. Es gäbe daher eine auf A' verschwindende, auf L positive Linearform $f \neq 0$, und $\overset{-1}{f}(0)$ wäre Stützhyperebene von K durch den Punkt x_0, entgegen der Voraussetzung.

Sei umgekehrt $y \in K$ und f eine positive Linearform auf L mit $f(y) = 0$. Wir zeigen, daß f auf dem von $\{y\}$ erzeugten Band A verschwindet, wenn L minimal ist. Nun besteht aber der positive Kegel $K_A = K \cap A$, der A erzeugt, aus den suprema derjenigen (in L majorisierten) Teilmengen M von K, deren Elemente von y im Sinne der Def. 5 (Abschnitt 4) umfaßt werden (siehe [9], p. 25, prop. 5), und auf diesen Teilmengen M von K verschwindet f offenbar. Andererseits ist für jedes solche M auch die Menge M' der suprema endlicher Teilmengen von M im Nullraum von f, und es ist $\sup M = \sup M'$. Nach (14.1) konvergiert der Filter der Enden von M' für die Ordnungstopologie $\mathfrak{T}_O$ gegen $\sup M$, und da f stetig ist für $\mathfrak{T}_O$ nach (4.6), haben wir $f(\sup M) = 0$, d. h. f verschwindet auf K_A und folglich auf A.

Ist nun y schwache O.E. von L, so ist das von $\{y\}$ erzeugte Band $A = L$, und wenn $f(y) = 0$ und L minimal ist, so ist $f = 0$. Daher ist in jedem minimalen, ordnungsvollständigen Vektorverband L jede schwache O.E. ein L^*-n. u. Punkt von K, und der Beweis ist beendet.

Aus (15.4) und (15.6) lassen sich nun leicht Beziehungen zwischen q.i. und n. u. Punkten eines Kegels K herleiten. Insbesondere ergibt sich unmittelbar:

(15.7) *Es sei L regulär, ein Band in L^{++} und ein Hausdorffscher topologischer Vektorraum, dessen Topologie gröber als $\mathfrak{T}_O$ und in dem $x \to |x|$ stetig ist. Dann sind die Mengen der q.i. Punkte von K, der n. u. Punkte von K, und der schwachen O.E. von L paarweise identisch.*

Da in jedem Vektorverband die Abbildung $x \to |x|$ für $\mathfrak{T}_O$ stetig ist, ergibt sich hieraus noch das

Corollar. *Ist L regulär und ein Band in seinem Ordnungsbidual, so sind die Mengen der q.i. Punkte von K (für $\mathfrak{T}_O$), der L^*-n. u. Punkte von K, und der schwachen O.E. von L paarweise identisch.*

Anhand der am Anfang dieses Abschnitts gegebenen Beispiele erkennt man in den Sätzen (15.6) und (15.7) die Bedingung, daß L minimal sei, als nicht entbehrlich. So ist in l_∞ jede Nullfolge (x_n) mit positiven Gliedern eine schwache Ordnungseinheit, aber weder quasi-innerer noch nicht unterstützter Punkt des positiven Kegels, und Entsprechendes gilt im B-Raum beschränkter reeller Funktionen auf $[0, 1]$.

Ergänzungen

Wir stellen in diesem Abschnitt eine Reihe von ergänzenden Resultaten und Bemerkungen zusammen, die dazu dienen sollen, die Verbindung zu einigen an anderer Stelle in der Literatur eingeführten Begriffen herzustellen. Hierbei ist keine Vollständigkeit angestrebt; wir beschränken uns auf die uns am wichtigsten erscheinenden Begriffe. Die ergänzenden Resultate gehören sachlich zu Abschnitten aus HV und HV II. Diese Ergänzungen sind nach den zugehörigen Abschnitten gruppiert, jeweils unter der entsprechenden Abschnittsnummer.

1. Es sei E ein halbgeordneter linearer Raum. Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt (ordnungs-)gesättigt (full [19]; o-convex [9'] wenn A außerdem konvex ist), wenn mit $x \in A$, $y \in A$ auch das Ordnungsintervall $[x, y]$ zu A gehört. Die kleinste, A enthaltende, gesättigte Teilmenge von E werde als gesättigte Hülle $[A]$ von A bezeichnet; sie ist die Vereinigung aller Ordnungsintervalle mit „Endpunkten" in A. Ist $\mathfrak{F}$ ein beliebiger Filter in E, so ist die Menge aller gesättigten Hüllen $[F]$, $F \in \mathfrak{F}$, eine Filterbasis für einen Filter $[\mathfrak{F}]$ in E: $[\mathfrak{F}]$ ist gröber als $\mathfrak{F}$. Zwischen dem Begriff des normalen Kegels und dem der gesättigten Hülle besteht nun folgender Zusammenhang:

(1.a) *Es sei E ein halbgeordneter lokalkonvexer Raum, $\mathfrak{F}$ ein beliebiger Filter in E. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *K ist normal in E.*
2. *Aus $\lim \mathfrak{F} = x$ folgt $\lim [\mathfrak{F}] = x$ für jedes $\mathfrak{F}$ und jedes x.*
3. *Aus $\lim \mathfrak{F} = 0$ folgt $\lim [\mathfrak{F}] = 0$ für jedes positive $\mathfrak{F}$*[21]*).*

Beweis. 1. → 2. Nach Definition 1 existiert eine Nullumgebungsbasis $\mathfrak{U}$ in E, so daß aus $x \in U \in \mathfrak{U}$ folgt $y \in U$ für jedes $y \in [0, x]$. Hieraus ergibt sich ($U = -U$ konvex vorausgesetzt), daß $[U] \subset 3U$ ist. Daher ist $[\mathfrak{U}]$ eine Basis für den Nullumgebungsfilter in E, woraus 2. folgt. 2. → 3. Offenbar. 3. → 1. Bezeichnet $\mathfrak{U}'$ die Spur des Nullumgebungsfilters auf K, so ist

[21]) Ein Filter heißt positiv, wenn $F \in \mathfrak{F}$ existiert mit $F \subset K$.

$\lim[\mathfrak{U}'] = 0$. Es gibt also zu jeder absolutkonvexen Nullumgebung U in E eine andere V, $V \subset U$, so daß $[V \cap K] \subset U$ ist, und die absolutkonvexe Hülle von V und $[V \cap K]$, die in U enthalten ist, genügt der Bedingung von Definition 1; hieraus folgt, daß K normal ist.

Man sieht an diesen Betrachtungen, daß zur Definition eines normalen Kegels der Raum E nicht als lokalkonvex vorausgesetzt zu werden braucht; im Interesse einer befriedigenden Theorie der Dualität ist die Beschränkung auf den lokalkonvexen Fall jedoch angebracht. Ist $\mathfrak{T}$ eine Topologie auf E mit dem Nullumgebungsfilter $\mathfrak{V}$, so ist die Topologie $[\mathfrak{T}]$ mit dem Nullumgebungsfilter $[\mathfrak{V}]$ die feinste Topologie, die gröber als $\mathfrak{T}$ und für die K normal ist. (Mit $\mathfrak{T}$ ist auch $[\mathfrak{T}]$ lokalkonvex.) Die Zuordnung $\mathfrak{T} \to [\mathfrak{T}]$ wird von NAMIOKA [19] mit $\mathfrak{T} \to F(\mathfrak{T})$, von KIST [9'] mit $\mathfrak{T} \to \mathfrak{T}_\eta$ bezeichnet. Es braucht aber $[\mathfrak{T}]$ nicht eine Hausdorffsche Topologie zu sein, wenn $\mathfrak{T}$ es ist; bei lokalkonvexem $\mathfrak{T}$ ist hierfür notwendig und hinreichend, daß $\bar{K}$ ein echter Kegel ist (vgl. (1.7)). Die in (4.8) mit $\mathfrak{T}_N$ bezeichnete Topologie ist nichts anderes als $[\mathfrak{T}^{lf}]$ für die feinste lokalkonvexe Topologie $\mathfrak{T}^{lf}$ auf E. — Es ist also K genau dann normal in E, wenn $\mathfrak{T} = [\mathfrak{T}]$ ist; diese Räume bezeichnet NAMIOKA (auch im nicht lokalkonvexen Fall) als locally full, KIST als locally o-convex. Die von NACHBIN [7''] als halbgeordnet bezeichneten lokalkonvexen Vektorräume besitzen stets einen positiven Kegel, der abgeschlossen und normal ist.

Aus (1.a) erhalten wir noch das folgende Resultat:

(1.b) *Es sei K ein Kegel in dem lokalkonvexen Raum E. Ist $K = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda B$, wo B eine abgeschlossene beschränkte, konvexe und 0 nicht enthaltende Teilmenge von E bezeichnet, so ist K normal in E.*

Beweis. Es gibt eine abgeschlossene reelle Hyperebene H, die $\{0\}$ und B strikt trennt; $H \cap K = C$ ist beschränkt. Die konvexe Hülle C_1 von $C \cup \{0\}$ ist beschränkt und ordnungsgesättigt. Ist $\mathfrak{F}$ ein gegen 0 konvergenter, positiver Filter, so existieren $F \in \mathfrak{F}$ und $\varepsilon > 0$ mit den Eigenschaften $F \subset \varepsilon C_1$ und $\varepsilon C_1 \subset U$ für eine gegebene Nullumgebung U in E. Es ist dann $[F] \subset U$ und nach (1.a), 3. ist K normal.

Ist K ein normaler Kegel in E, so ist K normal für $\sigma(E, E')$ nach dem 2. Corollar von (1.5). Umgekehrt gilt

(1.c) *Ist E für $\tau(E, E')$ normierbar und K ein für $\sigma(E, E')$ normaler Kegel in E, so ist K normal für $\tau(E, E')$.*

Beweis. Nach (1.3) ist $E' = K' - K'$, daher nach (2.6) K' BZ-Kegel für $\beta(E', E)$ und nach (2.2) ist K'' normal für $\beta(E'', E')$. Da $\beta(E'', E')$ auf E die Topologie $\tau(E, E')$ induziert, ist nach (1.2) die Behauptung bewiesen.

2. Die BZ-Kegel (bzw. strikten BZ-Kegel) in lokalkonvexen Räumen können als solche Kegel angesehen werden, für welche die Fundamentalsysteme $\mathfrak{B}$ beschränkter Teilmengen von E unter der Abbildung $\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'$:

$$B \to \overline{\Gamma(B \cap K)} \quad (\text{bzw. } B \to \Gamma(B \cap K)) \qquad B \in \mathfrak{B},$$

in ihrer Gesamtheit invariant sind. (Hier bezeichnet, wie üblich, ΓA die absolutkonvexe Hülle von $A \subset E$.) Eine entsprechende Bemerkung gilt für die

$\mathfrak{S}$-Kegel (HV, Def. 2). Unter gewissen Voraussetzungen regeneriert dieser Prozeß auch den Nullumgebungsfilter $\mathfrak{B}$ in E. Genauer:

(2.a) *Sei K ein BZ-Kegel (bzw. strikter BZ-Kegel) in E, und E tonneliert oder bornologisch (bzw. bornologisch). Dann ist für jede Nullumgebung U in E die Menge $\overline{\Gamma(U \cap K)}$ (bzw. $\Gamma(U \cap K)$) ein Element von $\mathfrak{B}$.*

Beweis. Ist B eine beschränkte Teilmenge von E, so ist $B \subset \overline{\Gamma(B_0 \cap K)}$ (bzw. $B \subset \Gamma(B_0 \cap K)$) für ein beschränktes B_0. Ist $U \in \mathfrak{B}$, so ist $B_0 \subset \lambda U$ für geeignetes $\lambda > 0$ und daher $B \subset \overline{\Gamma(B_0 \cap K)} \subset \lambda \overline{\Gamma(U \cap K)}$ (bzw. $B \subset \Gamma(B_0 \cap K) \subset$ $\subset \lambda \Gamma(U \cap K)$). Die Behauptung folgt jetzt unmittelbar.

Im zweiten Abschnitt haben wir nur *ein* unmittelbares Kriterium dafür erhalten, daß ein gegebener Kegel ein BZ-Kegel ist [vgl. (2.6) und die nachfolgende Bemerkung]. Für Vektorverbände kann man jedoch die folgende weitgehende Aussage machen:

(2.b) *Es sei E lokalkonvex und ein Vektorverband, in dem die Abbildung $x \to |x|$ stetig ist. Dann ist der positive Kegel K strikter BZ-Kegel in E.*

Beweis. Da $x \to |x|$ stetig ist, ist auch $x \to x^+$ stetig. Hieraus folgt, daß das Bild B^+ jeder beschränkten Menge B bei dieser Abbildung beschränkt ist. ($x \to x^+$ ist zwar nicht linear, aber positiv homogen; ist $\{x_n^+\}$ eine beliebige Folge in B^+ und $\lambda_n \downarrow 0$, so ist $\lambda_n x_n \to 0$, da B beschränkt ist, und aus $(\lambda_n x_n)^+ = \lambda_n x_n^+$ folgt $\lambda_n x^+ \to 0$ wegen der Stetigkeit von $x \to x^+$, so daß B^+ nach dem Banachschen Kriterium beschränkt ist. Vgl. [8], p. 7, prop. 5.) Für symmetrisches B gilt nun $B \subset B^+ - B^- = B^+ - B^+$ und K ist strikter BZ-Kegel.

3. In Vektorverbänden tritt zu dem in Nr. 1 betrachteten Begriff der ordnungsgesättigten Hülle noch dieser hinzu: $A \subset E$ heiße massiv (solid [9″], [19]), wenn aus $x \in A$ und $|y| \leq |x|$ stets folgt $y \in A$. Zu jedem A existiert die massive Hülle $|A|$, die aber nicht notwendig gesättigt ist. Ein Vektorverband und topologischer Vektorraum ist lokal-massiv, wenn sein Nullumgebungsfilter eine aus lokal-massiven Mengen bestehende Basis besitzt. Äquivalent hierzu ist ([19], th. 8.1): E ist lokalgesättigt und $x \to |x|$ ist stetig. Wie man leicht verifiziert, ist jeder Vektorverband für die Ordnungstopologie lokalmassiv.

Unter einem lokalkonvexen Vektorverband wird in der Literatur zuweilen (z. B. in [9′]) ein lokalkonvexer Raum verstanden, der als topologischer Vektorverband lokal-massiv ist, also: Ein Vektorverband mit lokalkonvexer Topologie, normalem positivem Kegel K und stetigen Verbandsoperationen. Nach (2.b) ist K dann stets ein strikter BZ-Kegel.

Zur Ergänzung von (3.4) beweisen wir noch:

(3.a) *Es sei E ein* (Z)-*Raum* (Def. 10) *und ein bornologischer lokalkonvexer Raum, in dem K normal und strikter* BZ-*Kegel ist. Dann ist E'* (in natürlicher Ordnung) *ein ordnungsvollständiger Vektorverband und, wenn E tonneliert ist, ein Band im Ordnungsdual $E^+ = K^* - K^*$ von E.*

Beweis. Für eine beliebige Linearform $f \in E'$ und $x \in K$ definieren wir in üblicher Weise $f^+(x)$ durch

$$f^+(x) = \sup\{f(y) : 0 \leq y \leq x\}.$$

f^+ ist auf Grund der Eigenschaft (Z) von K additiv und setzt sich in eindeutiger

Weise zu einer positiven Linearform f^+ auf E fort, und offenbar ist $f^+ = \sup(0, f)$ in E', falls f^+ stetig ist. Da f stetig und K normal ist, existiert eine ordnungsgesättigte Nullumgebung U in E mit $\sup|f(U)| \leqq 1$. Daher ist $f^+(x) \leqq 1$ für $x \in U \cap K$, und folglich $f^+(z) \leqq 1$ für $z \in \Gamma(U \cap K)$. Nach (2.a) ist $\Gamma(U \cap K)$ eine Nullumgebung in E, womit die Stetigkeit von f^+ gezeigt ist. Ist nun F eine beliebige majorisierte, aufsteigend gerichtete Teilmenge von K', so ist $\sup F$ durch die Fortsetzung des Linearformenkeims $x \to g(x) = \sup\{f(x) : f \in F\}$ $(x \in K)$ von K auf E gegeben, und diese Fortsetzung ist offenbar stetig. Aus diesen Betrachtungen folgt zugleich, daß E' massiv (d. h. ein Ordnungsideal) in E^+ ist. Um zu verifizieren, daß für tonneliertes E der Dual E' ein Band in E^+ ist, genügt es daher zu zeigen, daß für jede aufsteigend gerichtete, in E^+ majorisierte Teilmenge von K' die obere Grenze $\sup M$ ein Element von E' ist. Ist nun M eine solche Menge, so ist M beschränkt in E^+ für $\sigma(E^+, E)$; denn nach (1.5) ist, da K E erzeugt, K^* normal für $\sigma(E^+, E)$. Daher ist M beschränkt, und folglich relativ kompakt, für $\sigma(E', E)$; andererseits konvergiert der Filter der Enden von M in E^+ für $\sigma(E^+, E)$ gegen $\sup M$. Hieraus folgt in der Tat $\sup M \in E'$ und der Satz ist bewiesen.

4. In (4.2) ist K für die Hinlänglichkeit der Bedingung als abgeschlossen vorauszusetzen. Der Beweis verläuft dann am kürzesten wie folgt: $\mathfrak{T}$ ist gröber als $\mathfrak{T}_a$ nach (4.1); ist K $\mathfrak{T}$-abgeschlossen, so ist die $\mathfrak{T}_a$-Nullumgebung $[-a, a]$ $\mathfrak{T}$-abgeschlossen, konvex und (weil a Ordnungseinheit ist) absorbant; da E für $\mathfrak{T}$ tonneliert ist, ist $[-a, a]$ eine $\mathfrak{T}$-Nullumgebung.

Die in (4.4) als Topologie des induktiven Limes definierte Ordnungstopologie $\mathfrak{T}_O$ ist identisch mit der von Namioka eingeführten Topologie $\mathfrak{T}_b$ (order bound topology, [19], p. 20). $\mathfrak{T}_b$ ist definiert als diejenige lokalkonvexe Topologie auf E, für die eine Nullumgebungsbasis aus allen konvexen symmetrischen Teilmengen von E besteht, die jede ordnungsbeschränkte Menge absorbieren. Damit ist gleichwertig: $\mathfrak{T}_b$ ist die feinste lokalkonvexe Topologie auf E, für die alle Ordnungsintervalle beschränkt sind. Gibt es eine lokalkonvexe Topologie $\mathfrak{T}$ auf E, für die die Ordnungsintervalle ein Fundamentalsystem beschränkter Mengen bilden, so ist $\mathfrak{T}_b$ die zu $\mathfrak{T}$ assoziierte bornologische Topologie. Der positive Kegel K ist für $\mathfrak{T}_O$ im allgemeinen nicht normal ([19], p. 21), und die in (4.8) definierte Topologie $\mathfrak{T}_N$ ist identisch mit $[\mathfrak{T}_O]$ (vgl. Nr. 1). In einem halbgeordneten Vektorraum mit der Eigenschaft (Z) ist $\mathfrak{T}_O$ separiert, genau wenn E regulär halbgeordnet ist. Ist $\mathfrak{T}_O = [\mathfrak{T}_O]$, d. h. ist K normal für $\mathfrak{T}_O$, so ist der Ordnungsdual $E^+ = K^* - K^*$ der topologische Dual von E für $\mathfrak{T}_O$. Ist E ein ordnungsvollständiger Vektorverband, so sind die im Beweis von (4.4) mit L_α bezeichneten „Limitanden" zwar Ordnungsideale (d. h. massiv) in E, aber im allgemeinen keine Bänder. Auf Grund der bisherigen Diskussion hat man:

(4.a) *Ist L ein regulär halbgeordneter Vektorverband, so ist $L[\mathfrak{T}_O]$ ein lokalkonvexer Hausdorffraum mit normalem, striktem BZ-Kegel K und stetigem $x \to |x|$. $\mathfrak{T}_O$ ist die feinste lokalkonvexe Topologie auf L mit diesen Eigenschaften.*

In (4.5) muß die Voraussetzung verschärft werden (der Beweis der Tonneliertheit von L_α, HV, p. 135, enthält einen Irrtum). Es gilt

(4.5)′ *Jeder monoton folgenvollständige* (Def. 10) *halbgeordnete lineare Raum E ist für die Ordnungstopologie $\mathfrak{T}_O$ tonneliert.*

Der Beweis ergibt sich leicht mit Hilfe von (14.4). — Infolge dieses Sachverhaltes sind im Beweis von (4.7) die Worte „und nach (4.5) tonneliert" durch „und bornologisch" zu ersetzen.

5. Zu (5.1) und (5.2) ist zu bemerken, daß hier K stillschweigend als abgeschlossen vorausgesetzt ist. Andernfalls erhält man die behauptete Isomorphie nur für einen im positiven Kegel des mit $\hat{E}$ bezeichneten Raumes dichten Teilkegel.

7. Der Konvergenzsatz (7.2) steht mit dem klassischen Satz von Dini in engerer Verbindung, als es seine Formulierung vermuten läßt. Legt man nämlich den Dinischen Satz in allgemeiner Fassung (vgl. HV II, p. 266) zugrunde, so ergibt sich (7.2) unter Benutzung des Isomorphietheorems (5.1). Der verallgemeinerte Dinische Satz ist also mit (7.2) äquivalent; für separable Banachräume ist (7.2) infolge von (5.2) sogar mit dem klassischen Dinischen Satz für stetige Funktionen auf dem Einheitsintervall äquivalent.

8. Selbst wenn (E, F als lokalkonvexe Räume vorausgesetzt) E ein (Z)-Raum und F ein ordnungsvollständiger Vektorverband ist, läßt sich das Problem der Zerlegung einer stetigen linearen Abbildung (von E in F) in positive Komponenten anscheinend nicht positiv beantworten. Existiert nämlich eine solche Zerlegung $T = T_1 - T_2$ mit $T_1, T_2 \geqq 0$, so gilt $-T_2 \leqq T \leqq T_1$ und nach dem Muster von [1″], p. 245 läßt sich zeigen, daß T ordnungsbeschränkte Teilmengen von E notwendig in ebensolche Teilmengen von F überführt. Nun ist zwar, wenn T stetig, K normal und B ordnungsbeschränkt ist, $T(B)$ topologisch beschränkt in F; aber die topologisch beschränkten Teilmengen von F sind im allgemeinen nicht ordnungsbeschränkt. Zu untersuchen bleibt die Frage nach der Zerlegbarkeit einer in diesem Sinne ordnungsbeschränkten linearen Abbildung. Unter den obigen Voraussetzungen über E und F bilden diese Abbildungen selbst einen Vektorverband (l. c., p. 245 th. 7), der, wie man leicht nachprüft, sogar ordnungsvollständig ist, sobald F als minimal (Def. 11) angenommen wird.

10. Weitere Spektraleigenschaften beschränkter, positiver linearer Abbildungen finden sich in [3″] und [13″]. Die in [13″] für Banachräume bewiesenen Sätze übertragen sich mit geringer Modifikation auf beschränkte, positive Endomorphismen eines halbgeordneten, folgenvollständigen lokalkonvexen Vektorraumes.

11. (Zusatz bei der Korrektur.) Nach einer Bemerkung von Herrn A. Pietsch folgt aus dem zweiten Teil des Beweises von (11.2), daß T reines Punktspektrum besitzt. Dies verschärft (11.2) und schließt gleichzeitig eine im ersten Teil des Beweises für $\varrho = 0$ vorhandene Lücke.

Literatur

(Die im Text verwendeten, mit keinem ′ versehenen Nummern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis in [10″], und die nur mit einem ′ versehenen Nummern auf das Literaturverzeichnis in [11″].)

[1″] BIRKHOFF, G.: Lattice Theory. New York 1948.
[2″] FREUDENTHAL, H.: Teilweise geordnete Moduln. Proc. kon. ned. Akad. Wet. **39**, 641–651 (1936).
[3″] HAUSDORFF, F.: Grundzüge der Mengenlehre. Chelsea, New York 1949.
[4″] KARLIN, S.: Positive Operators. J. Math. Mech. **8**, 907–937 (1959).
[5″] KLEE, V. L.: Convex sets in linear spaces. Duke Math. J. **18**, 443–466 (1951).
[6″] KLEE, V. L.: Some new results on smoothness and rotundity in normed linear spaces. Math. Ann. **139**, 51–63 (1959).
[7″] NACHBIN, L.: On the continuity of positive linear transformations. Proc. Int. Congr. of Math. 1950, I, 461–465.
[8″] RIESZ, F.: Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires. Ann. Math. **41**, 174–206 (1940).
[9″] ROBERTS, G. T.: Topologies in vector lattices. Proc. Cambridge Phil. Soc. **48**, 533–546 (1952).
[10″] SCHAEFER, H.: Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume. Math. Ann. **135**, 115–141 (1958).
[11″] SCHAEFER, H.: Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume. II. Math. Ann. **138**, 259–286 (1959).
[12″] SCHAEFER, H.: On the singularities of an analytic function with values in a Banach space. Arch. Math. **11**, 40–43 (1960).
[13″] SCHAEFER, H.: Some spectral properties of positive linear operators. Pacific J. Math. **10** (1960).
[14″] TAYLOR, A. E.: Spectral theory of closed distributive operators. Acta Math. **84**, 189–224 (1950).

(Eingegangen am 10. März 1960)

POMMERENKE, CH.
Math. Annalen 141, 143—152 (1960)

Einige Sätze über die Kapazität ebener Mengen

Von
CHRISTIAN POMMERENKE in Göttingen

§ 1

In dieser Arbeit sollen einige Untersuchungen [5, 6] über die Kapazität[1]) ebener Mengen auf den Fall ausgedehnt werden, daß die betrachteten kompakten Mengen keine Kontinuen, d. h. nicht mehr zusammenhängend zu sein brauchen.

Ein Ergebnis (Satz 2) wird sein, daß sich jede kompakte Menge $\mathfrak{E}$ durch endlich viele Kurven einer Gesamtlänge

$$\Lambda < 10{,}36 \operatorname{cap} \mathfrak{E}$$

einschließen läßt. Für den Fall, daß $\mathfrak{E}$ ein Kontinuum ist, war in [5] bewiesen worden, daß man sogar $\Lambda < 9{,}173 \operatorname{cap}\mathfrak{E}$ wählen kann. Andererseits war dort an einem Beispiel gezeigt worden, daß man nicht mehr allgemein $\Lambda < 8{,}248 \operatorname{cap}\mathfrak{E}$ wählen kann.

Als eine Anwendung wird sich ergeben (Satz 3), daß man $\mathfrak{E}$ durch endlich viele Kreisscheiben einer Radiensumme $< 2{,}59 \operatorname{cap}\mathfrak{E}$ überdecken kann. Wenn $\mathfrak{E}$ ein Kontinuum ist, läßt sich $\mathfrak{E}$ bekanntlich (man vergleiche z. B. [4, Bd. II, S. 25]) durch eine Kreisscheibe des Radius $2 \operatorname{cap}\mathfrak{E}$ überdecken (aber im Falle eines Segmentes durch keine kleinere). Wahrscheinlich läßt sich $\mathfrak{E}$ immer durch (abzählbar viele) Kreisscheiben einer Radiensumme $\leqq 2 \operatorname{cap}\mathfrak{E}$ überdecken.

Wenn man speziell für $\mathfrak{E}$ die Lemniskate $\mathfrak{F}(r): |P(z)| \leqq r^n$ nimmt, wo $P(z)$ ein Polynom n-ten Grades mit dem höchsten Koeffizienten 1 ist, so gilt $\operatorname{cap}\mathfrak{F}(r) = r$ [2, S. 259]. Daher läßt sich $\mathfrak{F}(r)$ überdecken durch Kreisscheiben einer Radiensumme $< 2{,}59 r$, d. h. es gilt

$$|P(z)| > r^n \tag{1}$$

außerhalb von Kreisen mit einer Radiensumme $< 2{,}59\, r$. Dies ist eine Verschärfung des Lemmas von BOUTROUX-CARTAN (man vergleiche z. B. [1, S. 46]), welches aussagt, daß (1) außerhalb von Kreisen einer Radiensumme $< 2er \approx 5{,}44\, r$ gilt.

Jedes einfach zusammenhängende Gebiet läßt sich konform und schlicht auf das Äußere des Einheitskreises abbilden. Für ein beliebiges Gebiet ist das nicht mehr möglich. Im nächsten Paragraphen soll jedoch mit Hilfe der Greenschen Funktion eine schlichte Funktion konstruiert werden, die einen gewissen Ersatz für diese Abbildungsfunktion darstellt.

---

[1]) Zum Begriff der Kapazität vergleiche man z. B. [2, Kap. VII].

Zum Abschluß wird noch ein Satz aus [6] auf mehrfach zusammenhängende Gebiete verallgemeinert.

§ 2

Sei $\mathfrak{G}$ ein Gebiet, das den unendlich fernen Punkt enthält. Der Rand $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ bestehe aus endlich vielen geschlossenen Jordankurven. Sei $G(z)$ die Greensche Funktion von $\mathfrak{G}$ bezüglich ∞, d. h. $G(z)$ ist harmonisch in $\mathfrak{G}$, ausgenommen in ∞, wo $G(z)$ die Entwicklung

$$G(z) = \log|z| - \log \operatorname{cap}\mathfrak{R} + \cdots$$

hat [2, S. 270], und auf $\mathfrak{R}$ verschwindet $G(z)$. Wenn $H(z)$ die (im allgemeinen nicht eindeutige) konjugiert harmonische Funktion von $G(z)$ ist (in irgendeiner Normierung), so ist

$$g(z) = \exp(G(z) + iH(z)) \tag{2}$$

eine in $\mathfrak{G}$ analytische Funktion. Der Betrag $|g(z)|$ ist in $\mathfrak{G}$ eindeutig. In ∞ hat jeder Zweig von $g(z)$ einen einfachen Pol, dessen Residuum dem Betrage nach $= (\operatorname{cap}\mathfrak{R})^{-1}$ ist. Auf $\mathfrak{R}$ ist $|g(z)| = 1$, und in $\mathfrak{G}$ ist $|g(z)| > 1$.

Satz 1. *Sei $g(z)$ unter den obigen Voraussetzungen die durch* (2) *erklärte Funktion.*

Dann existiert eine Aufschneidung $\mathfrak{G}_0$ von $\mathfrak{G}$, so daß $\mathfrak{G}_0$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist und daß $\mathfrak{G}_0$ durch jeden Zweig von $g(z)$ eineindeutig auf ein Gebiet abgebildet wird, das aus dem Äußeren des Einheitskreises durch Fortlassung von endlich vielen Radialschlitzen entsteht.

Man kann also aus $\mathfrak{G}$ durch Fortlassung von endlich vielen Kurvenstücken ein einfach zusammenhängendes Gebiet erhalten, in dem jeder Zweig von $g(z)$ eindeutig und schlicht ist.

Beweis: Es seien $\mathfrak{C}_\mu$ ($\mu = 1, \cdots, m$) die geschlossenen Jordankurven, die $\mathfrak{G}$ beranden. Man kann annehmen, daß die $\mathfrak{C}_\mu$ geschlossene analytische Kurven sind. Bei einmaliger negativer Umlaufung von $\mathfrak{C}_\mu$ geht $g(z)$ in $e^{-i\alpha_\mu} g(z)$ über, wobei $\alpha_\mu \geqq 0$ und

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu = 2\pi$$

ist. Das gleiche gilt für $g'(z)$. Daher ist auch $|g'(z)|$ eindeutig. Seien $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ die verschiedenen Punkte, in denen $g'(z)$ verschwindet, und zwar mit den Vielfachheiten $p_1, \ldots, p_n$. Dann ist $p_\nu \geqq 1$ und [3, S. 32]

$$p_1 + \cdots + p_n = m - 1 .$$

Von jedem dieser Punkte ζ_ν gehen $2(p_\nu + 1)$ Kurvenstücke aus, auf denen

$$\arg g(z) \equiv \arg g(\zeta_\nu)$$

ist. Auf $p_\nu + 1$ von ihnen gilt (lokal) $|g(z)| \leqq |g(\zeta_\nu)|$ (Kurvenstücke erster Art), auf den anderen $p_\nu + 1$ gilt $|g(z)| \geqq |g(\zeta_\nu)|$ (Kurvenstücke zweiter Art). Die Kurvenstücke dieser beiden Arten trennen sich gegenseitig, d. h. in dem von ζ_ν ausgehenden Sektor zwischen zwei Kurvenstücken der einen Art liegt immer

mindestens ein Kurvenstück der anderen Art. Man wähle nun jeweils die Kurvenstücke der ersten Art aus.

Sei $\mathfrak{L}$ eines dieser Kurvenstücke. Da $g(z)$ in allen $z \in \mathfrak{G}$ mit $z \neq \zeta_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ eine lokal eindeutige Umkehrfunktion hat, läßt sich $\mathfrak{L}$ solange eindeutig fortsetzen, bis man an einen anderen Punkt $\zeta_{\nu'}$ oder an den Rand $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ gelangt. Da die Randkurven $\mathfrak{C}_\mu$ als analytisch vorausgesetzt waren und dort also $g'(z) \neq 0$ gilt, ist die Fortsetzung von $\mathfrak{L}$ im letzteren Falle sogar über $\mathfrak{R}$ hinaus möglich, d. h. $\mathfrak{L}$ endet jedenfalls auf $\mathfrak{R}$ in einem bestimmten Punkt. Weiter verhält sich $|g(z)|$ auf $\mathfrak{L}$ (d. h. auf dem gesamten Stück zwischen zwei Punkten ζ_ν bzw. zwischen ζ_ν und $\mathfrak{R}$) monoton. Denn wenn s die Bogenlänge auf $\mathfrak{L}$ ist, so ist wegen $\arg g(z(s)) \equiv \text{const}$

$$\frac{d}{ds} \log|g(z(s))| = \frac{d}{ds} \log g(z(s)) = z'(s) \frac{g'(z(s))}{g(z(s))} \neq 0 \,,$$

da $z(s) \neq \zeta_\nu$ ist für innere Punkte von $\mathfrak{L}$. Somit ist $\frac{d}{ds} \log|g(z(s))|$ dort entweder immer positiv oder immer negativ, d. h. $|g(z)|$ ist auf $\mathfrak{L}$ streng monoton. Daher hat $\mathfrak{L}$ keine Doppelpunkte.

Seien $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_q$ mit

$$q = \sum_{\nu=1}^{n} (p_\nu + 1) = m + n - 1$$

die eben betrachteten abgeschlossenen Kurvenstücke, jeweils von einem ζ_ν bis zum nächsten oder bis an den Rand $\mathfrak{R}$ gerechnet. Als positive Richtung möge die Richtung wachsender $|g(z)|$ bezeichnet werden. Die $\mathfrak{L}_k$ treffen sich nur in den ζ_ν, da sie sonst wegen der Eindeutigkeit der Fortsetzung identisch wären. Sei

$$\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R} \cup \bigcup_{k=1}^{q} \mathfrak{L}_k \,.$$

Dann zerlegt $\mathfrak{R}_0$ das Gebiet $\mathfrak{G}$ nicht in mehrere Teilgebiete. Sonst würde ein Gebiet $\mathfrak{H}$ existieren, dessen Rand $\mathfrak{S}$ ganz zu $\mathfrak{R}_0$ gehört und das ∞ nicht im Innern enthält. Da $|g(z)|$ in $\mathfrak{H} \cup \mathfrak{S}$ eindeutig und stetig ist, nimmt $|g(z)|$ sein Maximum in $\mathfrak{H} \cup \mathfrak{S}$ in einem Punkt $c \in \mathfrak{S}$, also $c \in \mathfrak{R}_0$ an. Da $|g(z)| = 1$ ist für $z \in \mathfrak{R}$, gilt $c \notin \mathfrak{R}$, also $c \in \mathfrak{L}_k$ für ein gewisses k. Wegen der Monotonie von $|g(z)|$ auf $\mathfrak{L}_k$ ist also c einer der Punkte ζ_ν. Nun gehören zu $\mathfrak{S}$ zwei Kurvenstücke $\mathfrak{L}_{k'}$ und $\mathfrak{L}_{k''}$, die sich in c treffen, so daß einer der beiden Sektoren zwischen $\mathfrak{L}_{k'}$ und $\mathfrak{L}_{k''}$ zu $\mathfrak{H}$ gehört. Wegen der Maximaleigenschaft von c gilt $|g(c)| \geq |g(z)|$ auf jedem. Also gehören beide zur ersten der vorhin beschriebenen Arten, und daher liegt in dem Sektor zwischen $\mathfrak{L}_{k'}$ und $\mathfrak{L}_{k''}$, der zum Gebiet $\mathfrak{H}$ gehört, mindestens ein Kurvenstück der zweiten Art, auf dem also in $\mathfrak{H}$ Punkte mit $|g(z)| > |g(c)|$ existieren, im Widerspruch zur Annahme, daß $|g(z)|$ in c sein Maximum in $\mathfrak{H} \cup \mathfrak{S}$ annimmt.

Die $\mathfrak{L}_k$ mögen als die „Strecken", die Punkte ζ_ν und die durch die Randkurven $\mathfrak{C}_\mu$ begrenzten abgeschlossenen Bereiche als die „Punkte" eines Streckenkomplexes betrachtet werden (man vergleiche [7, S. 98]). Dann hat man $m + n$ „Punkte" und $q = m + n - 1$ „Strecken", und der von ihnen gebildete Strecken-

komplex zerlegt die Ebene nicht. Daher folgt aus dem Hilfssatz, der anschließend an diesen Beweis gebracht werden soll, daß $\mathfrak{R}_0$ zusammenhängt.

Daher ist das Komplementärgebiet $\mathfrak{G}_0$ von $\mathfrak{R}_0$ bezüglich $\mathfrak{G}$ einfach zusammenhängend und also jeder Zweig von $g(z)$ in $\mathfrak{G}_0$ eindeutig. Sei jetzt $g(z)$ ein fester Zweig. Dann hat $g(z)$ überall auf $\mathfrak{R}_0$ eindeutige Randwerte (dabei sind natürlich Randpunkte als verschieden zu zählen, wenn sie auf verschiedenen Ufern einer der Kurven $\mathfrak{L}_k$ liegen). Auf den $\mathfrak{C}_\mu$ ist $|g(z)| = 1$, auf den $\mathfrak{L}_k$ ist $\arg g(z) = \text{const}$. Daher besteht die Bildmenge von $\mathfrak{R}_0$ bei der Abbildung $w = g(z)$ aus Teilbögen von $|w| = 1$ und aus gewissen Strecken, auf denen $\arg w = \text{const}$ ist. Man durchlaufe nun den vollständigen Rand von $\mathfrak{G}_0$ einmal so, daß $\mathfrak{G}_0$ links liegt. Dabei wird also jedes $\mathfrak{L}_k$ insgesamt einmal positiv und einmal negativ durchlaufen. Man beginne in einem Punkt, wo ein $\mathfrak{L}_{k_1}$ ein $\mathfrak{C}_{\mu_1}$ trifft, und durchlaufe den Rand längs der $\mathfrak{L}_k$ solange, bis man wieder ein $\mathfrak{C}_{\mu_2}$ trifft. Es soll gezeigt werden, daß hierbei $|g(z)|$ erst monoton von 1 bis zu einem gewissen Wert wächst und dann wieder monoton bis 1 fällt. Da sich $|g(z)|$ auf den einzelnen $\mathfrak{L}_k$ monoton verhält, heißt es, daß zuerst einige $\mathfrak{L}_k$ alle positiv und anschließend von einem gewissen Punkt an einige $\mathfrak{L}_k$ alle negativ durchlaufen werden. Angenommen, das wäre falsch. Dann gäbe es zwei Kurvenstücke $\mathfrak{L}_{k_1}$ und $\mathfrak{L}_{k_2}$, die sich in einem ζ_{ν_0} treffen und nacheinander durchlaufen werden, und zwar erst $\mathfrak{L}_{k_1}$ im negativen Sinn und dann $\mathfrak{L}_{k_2}$ im positiven Sinn. Dann gehen $\mathfrak{L}_{k_1}$ und $\mathfrak{L}_{k_2}$ beide von ζ_{ν_0} im positiven Sinn aus, d. h. beide Kurvenstücke gehören (bez. ζ_{ν_0}) zur zweiten Art, und daher gibt es in jedem Sektor zwischen $\mathfrak{L}_{k_1}$ und $\mathfrak{L}_{k_2}$ ein weiteres Kurvenstück $\mathfrak{L}_{k_3}$, das in ζ_{ν_0} mündet und erster Art ist. Das steht im Widerspruch zu der Annahme, daß $\mathfrak{L}_{k_1}$ und $\mathfrak{L}_{k_2}$ nacheinander durchlaufen werden. Also wird das Stück des Randes zwischen $\mathfrak{C}_{\mu_1}$ und $\mathfrak{C}_{\mu_2}$ abgebildet auf eine Strecke, die genau einmal hin und zurück durchlaufen wird.

Wenn man $\mathfrak{C}_{\mu_2}$ erreicht hat, so durchläuft man anschließend $\mathfrak{C}_{\mu_2}$ (im negativen Sinne). Dabei ist $|g(z)| = 1$, und $\arg g(z)$ ändert sich monoton um $-\alpha_{\mu_2}$. Also wird $\mathfrak{C}_{\mu_2}$ abgebildet auf ein monoton durchlaufenes Stück von $|w| = 1$ der Länge α_{μ_2}. Wegen $\Sigma\alpha_\mu = 2\pi$ wird also der gesamte Rand von $\mathfrak{G}_0$ abgebildet auf den Rand eines Gebietes $\mathfrak{K}_0$, das aus $|w| > 1$ entsteht durch Fortlassung gewisser Strecken, die auf $|w| = 1$ beginnen und auf denen $\arg w = \text{const}$ ist. Da $g(z)$ in ∞ einen einfachen Pol hat und sonst in $\mathfrak{G}_0$ regulär ist, wird $\mathfrak{G}_0$ durch $w = g(z)$ eineindeutig auf $\mathfrak{K}_0$ abgebildet.

Zum Schluß soll noch der vorhin benutzte Hilfssatz gebracht werden.

Hilfssatz 1. *Ein Streckenkomplex aus q Strecken und $p = q + 1$ Punkten, der die Ebene nicht zerlegt, ist zusammenhängend.*

Beweis: Der Komplex möge aus n zusammenhängenden Teilkomplexen bestehen, die die Streckenzahlen q_ν und die Punktzahlen p_ν haben mögen. Da diese Teilkomplexe zusammenhängend sind und ebenfalls die Ebene nicht zerlegen, sind sie Bäume und es gilt daher $p_\nu = q_\nu + 1$ [7, S. 103], also

$$p = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} (q_\nu + 1) = n + \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu = n + q\,.$$

Wegen $p = q + 1$ folgt hieraus $n = 1$.

§ 3

Satz 2. *Sei $\mathfrak{E}$ eine abgeschlossene beschränkte Punktmenge* ($\operatorname{cap}\mathfrak{E} > 0$). *Dann gibt es endlich viele geschlossene analytische Kurven der Gesamtlänge A, so daß $\mathfrak{E}$ in der Vereinigung ihrer Innengebiete enthalten ist und daß gilt*

$$A < 10{,}36 \operatorname{cap}\mathfrak{E}\,.$$

Beweis: 1. Sei $\mathfrak{G}$ ein Gebiet, dessen Rand $\mathfrak{L}$ aus endlich vielen geschlossenen analytischen Kurven besteht und das ∞ enthält. Sei $\mathfrak{G}_0$ das Gebiet, das man aus $\mathfrak{G}$ gemäß der Aufschneidung von Satz 1 erhält. Dann ist $w = g(z)$ in $\mathfrak{G}_0$ eindeutig und schlicht. Sei $z = f(w)$ die Umkehrfunktion, die also im Bildgebiet $\mathfrak{K}_0$ von $\mathfrak{G}_0$ schlicht und regulär ist, mit Ausnahme eines einfachen Poles in ∞. Die Ableitung $f'(w)$ hat auf dem Rande von $\mathfrak{K}_0$ überall Randwerte, mit Ausnahme von endlich vielen Stellen ω, für die $g'(\zeta) = 0$ mit $\zeta = f(\omega)$ ist. In der Umgebung dieser Stellen gilt dann wegen $w = g(z) = \omega + a(z-\zeta)^q + \cdots$ $(a \neq 0)$

$$f(w) = z = \zeta + a^*(w-\omega)^{\frac{1}{q}} + \cdots,\ f'(w) = \frac{1}{q}\,a^*(w-\omega)^{-\left(1-\frac{1}{q}\right)} + \cdots.$$

Also ist $f'(w)$ in ganz $1 \leq |w| \leq A$ (für jedes $A > 1$) integrierbar. Sei $\mathfrak{L}(r)$ die Niveaulinie, auf der die Greensche Funktion $G(z) \equiv \log r$ ist ($r > 1$), d. h. es gilt $|g(z)| = r$ und deshalb

$$\mathfrak{L}(r) = \{f(re^{i\vartheta}) : 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}\,. \tag{3}$$

Diese Niveaulinie kann aus mehreren getrennten Stücken bestehen. Sei $L(r)$ die Länge von $\mathfrak{L}(r)$, und $A(r)$ der Flächeninhalt der Punktmenge innerhalb von $\mathfrak{L}(r)$. Man sieht leicht, daß $\operatorname{cap}\mathfrak{L}(r) = \varkappa r$ ist, wobei $\varkappa = \operatorname{cap}\mathfrak{L}$ gesetzt ist. Daraus folgt [2, S. 260], daß

$$A(r) \leq \pi\varkappa^2 r^2 \tag{4}$$

ist. Weiter gilt

$$L(\varrho) = \varrho \int_0^{2\pi} |f'(\varrho e^{i\vartheta})|\,d\vartheta\,.$$

Nach der Schwarzschen Ungleichung ist daher

$$L(\varrho)^2 \leq \varrho^2\cdot 2\pi \int_0^{2\pi} |f'(\varrho e^{i\vartheta})|^2 d\vartheta\,,$$

und also für $r > 1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_1^r \frac{1}{\varrho} L(\varrho)^2 d\varrho \leq \int_1^r\int_0^{2\pi} |f'(\varrho e^{i\vartheta})|^2 \varrho\, d\varrho\, d\vartheta\,. \tag{5}$$

Das letzte Integral ist wegen der Schlichtheit von $f(w)$ der Flächeninhalt der Menge zwischen $\mathfrak{L}(1)$ und $\mathfrak{L}(r)$, also

$$= A(r) - A(1) < A(r)\,.$$

Nach (4) folgt deshalb aus (5)

$$\frac{1}{2\pi}\int_1^r \frac{1}{\varrho} L(\varrho)^2\, d\varrho < \pi\varkappa^2 r^2\,. \tag{6}$$

Sei nun

$$\sigma = \min_{0 \leq \varrho \leq r} L(\varrho) .$$

Dann ergibt sich aus (6), daß

$$\frac{1}{2\pi}\sigma^2 \log r = \frac{1}{2\pi}\int_1^r \frac{\sigma^2}{\varrho}\,d\varrho < \pi\varkappa^2 r^2$$

ist, also

$$\sigma^2 < \frac{2\pi^2\varkappa^2 r^2}{\log r} .$$

Wenn man speziell $r = e^{\frac{1}{2}}$ setzt, folgt

$$\min_{1 \leq \varrho \leq e^{\frac{1}{2}}} L(\varrho) = \sigma < 2\pi\varkappa e^{\frac{1}{2}} ,$$

und also wegen $\varkappa = \operatorname{cap}\mathfrak{L}$

$$L(\varrho_0) \leqq 2\pi e^{\frac{1}{2}} \operatorname{cap}\mathfrak{L} \tag{7}$$

für ein gewisses $\varrho_0 \geqq 1$, das man so wählen kann, daß $L(\varrho_0)$ keine Doppelpunkte enthält.

2. Nun benötigen wir einen bekannten Hilfssatz, der im Anschluß an diesen Beweis nachgewiesen werden soll.

Hilfssatz 2. *Sei $\mathfrak{C}$ eine kompakte Menge. Dann existiert zu jedem $\delta > 0$ ein System $\mathfrak{L}$ punktfremder geschlossener analytischer Kurven, das $\mathfrak{C}$ im Innern enthält* (d. h. $\mathfrak{C}$ ist in der Vereinigungsmenge der Innengebiete enthalten), *so daß gilt*

$$\operatorname{cap}\mathfrak{L} < \operatorname{cap}\mathfrak{C} + \delta .$$

Zur Vollendung des Beweises von Satz 2 wähle man hierin

$$\delta = \left(10{,}36 - 2\pi e^{\frac{1}{2}}\right) \operatorname{cap}\mathfrak{C} > 0$$

und wende Teil 1 an (dabei ist dann $\mathfrak{G}$ das Gebiet außerhalb $\mathfrak{L}$). Nach (7) ist also für ein gewisses $\varrho_0 \geqq 1$

$$L(\varrho_0) \leqq 2\pi e^{\frac{1}{2}} \operatorname{cap}\mathfrak{L} < 10{,}36 \operatorname{cap}\mathfrak{C} .$$

Da $\mathfrak{C}$ im Innern von $\mathfrak{L}$ und daher auch im Innern von $\mathfrak{L}(\varrho_0)$ enthalten ist und da $\mathfrak{L}(\varrho_0)$ aus endlich vielen geschlossenen analytischen Kurven besteht, ist somit Satz 2 bewiesen.

Beweis des Hilfssatzes: Seien $P_n(z)$ diejenigen Polynome der Form

$$P_n(z) = z^n + \cdots + b_1 z + b_0 ,$$

deren Maximum auf $\mathfrak{C}$ minimal ist. Dann gilt (man vergleiche z. B. [2, S. 258])

$$\max_{z \in \mathfrak{C}} |P_n(z)|^{\frac{1}{n}} \to \operatorname{cap}\mathfrak{C} .$$

Man wähle nun ein festes m, so daß

$$\max_{z \in \mathfrak{C}} |P_m(z)| \leqq \left(\operatorname{cap}\mathfrak{C} + \frac{1}{2}\delta\right)^m$$

ist, und dann ein R mit

$$\operatorname{cap}\mathfrak{E} + \frac{1}{2}\delta < R < \operatorname{cap}\mathfrak{E} + \delta,$$

so daß die Menge $\mathfrak{L} = \{|P_m(z)| = R^m\}$ aus geschlossenen punktfremden analytischen Kurven besteht. Für $z \in \mathfrak{E}$ ist

$$|P_m(z)| \leqq \left(\operatorname{cap}\mathfrak{E} + \frac{1}{2}\delta\right)^m < R^m,$$

also $\mathfrak{E}$ im Innern von $\mathfrak{L}$ enthalten. Weiter ist $\operatorname{cap}\mathfrak{L} = R$, also

$$\operatorname{cap}\mathfrak{L} < \operatorname{cap}\mathfrak{E} + \delta.$$

Satz 3. *Sei $\mathfrak{E}$ eine abgeschlossene Punktmenge* ($\operatorname{cap}\mathfrak{E} > 0$). *Dann läßt sich $\mathfrak{E}$ durch endlich viele Kreisscheiben überdecken, deren Radiussumme* $< 2{,}59 \operatorname{cap}\mathfrak{E}$ *ist.*

Beweis: Seien $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_m$ die analytischen Kurven aus Satz 2, und $\Lambda_1, \ldots \Lambda_m$ ihre Umfänge. Da der Umfang der konvexen Hülle von $\mathfrak{C}_\mu \leqq \Lambda_\mu$ ist, läßt sich $\mathfrak{C}_\mu$ durch eine Kreisscheibe von einem Radius $\leqq \frac{1}{4}\Lambda_\mu$ überdecken, also $\mathfrak{E}$ durch Kreisscheiben einer Radiensumme

$$\leqq \frac{1}{4}\sum_{\mu=1}^{m}\Lambda_\mu = \frac{1}{4}\Lambda < 2{,}59 \operatorname{cap}\mathfrak{E}.$$

§ 4

Seien $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ Gebiete, die den unendlich fernen Punkt enthalten. Der Rand von $\mathfrak{G}$ bestehe aus endlich vielen Jordankurven, der Rand von $\mathfrak{H}$ aus endlich vielen (nicht ausgearteten) Kontinuen. Die kompakten Komplemente von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ seien $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$. Es sei $F(z)$ eine in $\mathfrak{G}$ eindeutige meromorphe Funktion, deren Entwicklung in ∞ mit

$$F(z) = az^p + \cdots \qquad (p \geqq 1, a \neq 0)$$

beginnt. In einer Umgebung von $\mathfrak{E}$ sei $F(z)$ beschränkt, d. h. es gibt eine offene Menge $\mathfrak{Q}$ mit $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{Q}$, so daß $F(z)$ in $\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{G}$ beschränkt ist, also auch keine Pole hat. Für jeden Randpunkt ζ von $\mathfrak{G}$ mögen alle Häufungspunkte von $F(z)$ für $z \to \zeta$ ($z \in \mathfrak{G}$) in $\mathfrak{F}$ liegen. Sei $G(z)$ die Greensche Funktion von $\mathfrak{G}$ bezüglich ∞, und sei wieder $\mathfrak{L}(r)$ die Niveaulinie $G(z) \equiv \log r$. Die Anzahl der c-Stellen von $F(z)$ außerhalb von $\mathfrak{L}(r)$ sei mit $n(r, c)$ bezeichnet, und wie üblich sei

$$N(r, c) = \int_r^\infty \frac{n(\varrho, c)}{\varrho}\, d\varrho \qquad (c \neq \infty),$$

$$N(r, \infty) = -p\log r + \int_r^\infty \frac{n(\varrho, \infty) - p}{\varrho}\, d\varrho.$$

Schließlich sei $d\gamma(c)$ die Robinsche Belegung von $\mathfrak{F}$, d. h. $\gamma(e)$ ist die nichtnegative additive Mengenfunktion auf den Borelschen Untermengen von $\mathfrak{F}$ mit $\gamma(\mathfrak{F}) = 1$, für deren Potential

$$U(s) = \int_{\mathfrak{F}} \log|s - c|\, d\gamma(c) \tag{8}$$

gilt

$$(9)\qquad \begin{aligned} &U(s) \equiv \log \operatorname{cap} \mathfrak{F} \quad \text{für } s \in \mathfrak{F}\,,\\ &U(s) \equiv \log \operatorname{cap} \mathfrak{F} + (\text{Greensche Funktion von } \mathfrak{H}) \text{ für } s \in \mathfrak{H} \end{aligned}$$

(man vergleiche z. B. [3, S. 136]).

Satz 4. *Unter den eben genannten Voraussetzungen gilt*

$$\log \operatorname{cap} \mathfrak{F} = \log|a| + p \log \operatorname{cap} \mathfrak{E} + \int_{\mathfrak{F}} N(1, c)\, d\gamma(c) - N(1, \infty)\,.$$

Beweis: Die Niveaulinien $\mathfrak{L}(\varrho)$ seien so orientiert, daß das Gebiet $\mathfrak{G}$ rechts liegt. Dann gilt

$$(10)\qquad n(\varrho, \infty) - n(\varrho, c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{L}(\varrho)} \frac{F'(z)}{F(z) - c}\, dz\,.$$

Sei wieder $z = f(w)$ die Umkehrfunktion von $w = g(z)$, die im Beweis von Satz 2 eingeführt wurde. Ihre Entwicklung in ∞ lautet

$$f(w) = e^{i\beta} \operatorname{cap} \mathfrak{E} \cdot w + \cdots \quad (\beta \text{ reell})\,.$$

Wegen (3) folgt also aus (10), wenn man $\varphi(w) = F(f(w))$ setzt,

$$\frac{1}{\varrho}\left(n(\varrho, \infty) - n(\varrho, c)\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi'(\varrho e^{i\vartheta})}{\varphi(\varrho e^{i\vartheta}) - c}\, e^{i\vartheta} d\vartheta\,.$$

Durch Integration[2] nach ϱ ergibt sich für $1 < r < R$, wenn man anschließend den Realteil nimmt,

$$\begin{aligned} &\int_r^R \frac{1}{\varrho}\left(n(\varrho, \infty) - p\right) d\varrho + p \log \frac{R}{r} - \int_r^R \frac{1}{\varrho}\, n(\varrho, c)\, d\varrho \\ &\qquad = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|\varphi(Re^{i\vartheta}) - c|\, d\vartheta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|\varphi(re^{i\vartheta}) - c|\, d\vartheta\,. \end{aligned}$$

Wegen $\varphi(w) = F(f(w)) = a(e^{i\beta}\varkappa w)^p + \cdots$ mit ($\varkappa = \operatorname{cap} \mathfrak{E}$) folgt durch Grenzübergang $R \to \infty$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|\varphi(re^{i\vartheta}) - c|\, d\vartheta = \log|a| + p \log \varkappa + N(r, c) - N(r, \infty)\,.$$

Indem man bezüglich $d\gamma(c)$ über $\mathfrak{F}$ integriert, folgt aus (8)

$$\int_0^{2\pi} U(\varphi(re^{i\vartheta}))\, d\vartheta = \log|a| + p \log \varkappa - N(r, \infty) + \int_{\mathfrak{F}} N(r, c)\, d\gamma(c)\,.$$

Jetzt nimmt man den Grenzübergang $r \to 1$ vor. Für $r \to 1$ liegen die Häufungspunkte von $f(re^{i\vartheta})$ auf dem Rand von $\mathfrak{G}$, also die von $\varphi(re^{i\vartheta}) = F(f(re^{i\vartheta}))$ in $\mathfrak{F}$ (für alle ϑ mit Ausnahme von höchstens endlich vielen). Da $F(z)$ nach Voraussetzung in einer Umgebung von $\mathfrak{E}$ beschränkt ist, gilt das gleiche von $\varphi(re^{i\vartheta})$ und damit nach (9) auch von $U(\varphi(re^{i\vartheta}))$ für $1 \leq r \leq r_0$ (für ein gewisses r_0).

---

[2]) Die jetzt folgende Rechnung ist wohlbekannt (z. B. [3, S. 180]).

Man kann daher den Grenzübergang unter dem Integralzeichen vornehmen und erhält dann aus der ersten Gleichung in (9) die Behauptung des Satzes.

Natürlich kann man, wie der Beweis zeigt, in mannigfacher Weise die Voraussetzungen von Satz 4 abschwächen, wie z. B. die Beschränktheitsvoraussetzung. Es genügt auch anzunehmen, daß nur fast alle (passend erklärten) Radialgrenzwerte von $F(z)$ in $\mathfrak{F}$ liegen.

Aus Satz 4 ergibt sich folgende Verallgemeinerung des Satzes 1 aus [6]:

Satz 5. *Wenn $F(z)$ unter den Voraussetzungen von Satz 4 außer in ∞ keine Pole hat, so gilt*

$$\log \operatorname{cap} \mathfrak{F} \geqq \log |a| + p \log \operatorname{cap} \mathfrak{E}\,. \tag{11}$$

Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn $F(z)$ das Gebiet $\mathfrak{G}$ so auf $\mathfrak{H}$ abbildet, daß jeder Wert aus $\mathfrak{H}$ genau p-mal in $\mathfrak{G}$ angenommen wird.

Beweis: 1. Da $F(z)$ nur in ∞ Pole hat, ist $N(1, \infty) = 0$. Aus $N(1, c) \geqq 0$ folgt dann die Ungleichung (11).

2. Wenn $\mathfrak{G}$ durch $F(z)$ auf $\mathfrak{H}$ abgebildet wird, so nimmt natürlich $F(z)$ in $\mathfrak{G}$ keinen Wert aus $\mathfrak{F}$ an, d. h. es gilt $n(\varrho, c) = 0$ für alle $\varrho > 1$, $c \in \mathfrak{F}$, also auch $N(1, c) = 0$, und in (11) steht das Gleichheitszeichen.

3. Wenn umgekehrt in (11) das Gleichheitszeichen stehen soll, so folgt aus Satz 4, daß

$$\int_{\mathfrak{F}} N(1, c)\, d\gamma(c) = 0$$

ist. Hieraus folgt $n(\varrho, c) = 0$ für alle $c \in \mathfrak{F}$, $\varrho > 1$. Wenn nämlich $n(\varrho_0, c_0) \geqq 1$ ist für ein Paar $c_0 \in \mathfrak{F}$, $\varrho_0 > 1$, so ergibt sich, da das Bild des Äußeren von $\mathfrak{L}(\varrho_0)$ ein Gebiet ist, das ∞ enthält, daß es einen Randpunkt c_1 von $\mathfrak{H}$ und eine Kreisscheibe $\mathfrak{K}$ um c_1 gibt, so daß $n(\varrho_0, c) \geqq 1$ für $c \in \mathfrak{K}$ ist, also auch $n(\varrho, c) \geqq 1$ für $c \in \mathfrak{K}$, $1 \leqq \varrho \leqq \varrho_0$ und damit $N(1, c) \geqq \log \varrho_0$ für $c \in \mathfrak{K}$. Daher folgt

$$0 = \int_{\mathfrak{F}} N(1, c)\, d\gamma(c) \geqq \log \varrho_0 \cdot \gamma(\mathfrak{K})\,,$$

d. h. wegen $\varrho_0 > 1$ ist $\gamma(\mathfrak{K}) = 0$. Hieraus ergibt sich aber, daß dann das Potential

$$U(s) = \int_{\mathfrak{F}} \log |s - c|\, d\gamma(c) = \int_{\mathfrak{F} - \mathfrak{K}} \log |s - c|\, d\gamma(c)$$

ist und also in $\mathfrak{K}$ harmonisch ist. Nun ist immer $U(s) \geqq \log \operatorname{cap} \mathfrak{F}$, und im Mittelpunkt c_1 von $\mathfrak{K}$ gilt (wegen $c_1 \in \mathfrak{F}$) $U(c_1) = \log \operatorname{cap} \mathfrak{F}$. Nach dem Minimumprinzip folgt daraus $U(s) \equiv \log \operatorname{cap} \mathfrak{F}$ in $\mathfrak{K}$, und das steht im Widerspruch zur zweiten Gleichung in (9), da $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{H}$ nicht leer ist. Damit ist bewiesen, daß $n(\varrho, c) = 0$ ist für $\varrho > 1$, $c \in \mathfrak{F}$, d. h. alle Werte von $F(z)$ für $z \in \mathfrak{G}$ liegen in $\mathfrak{H}$. Nach Voraussetzung liegen alle Häufungswerte von $F(z)$ für $z \to \zeta$ für jeden Randpunkt ζ von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{F}$, d. h. kein Häufungswert liegt in $\mathfrak{H}$. Schließlich hat $F(z)$ in ∞ einen p-fachen Pol. Daraus folgt dann die Behauptung (man vergleiche den Hilfssatz in [6]).

Literatur

[1] BOAS jr., R. P.: Entire functions. New York 1954.
[2] GOLUSIN, G. M.: Geometrische Funktionentheorie. Berlin 1957.
[3] NEVANLINNA, R.: Eindeutige analytische Funktionen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1953.
[4] PÓLYA, G., u. G. SZEGÖ: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Berlin 1925.
[5] POMMERENKE, CH.: Über die Kapazität ebener Kontinuen. Math. Ann. 139, 64—75 (1959).
[6] POMMERENKE, CH.: Über die Kapazität der Summe von Kontinuen. Math. Ann. 139, 127—132 (1959).
[7] REIDEMEISTER, K.: Einführung in die kombinatorische Topologie. Braunschweig 1932.

(Eingegangen am 21. März 1960)

KRISHNAMURTHY, V.
Math. Annalen 141, 153—160 (1930)

On the state of a linear operator and its adjoint*)

By
V. KRISHNAMURTHY in Annamalainagar (India)

Notations and Terminology

"l. c. l. H. s." stands for locally convex linear Hausdorff space(s).
Fréchet space, Barrelled space, Montel space, etc.: c.f. BOURBAKI [1].
Homomorphism: A continuous open mapping.
E and F: Any two arbitrary l. c. l. H. s.
e and f: Representative elements of E and F respectively.
E' and F': The algebraic duals of E and F respectively.
$R(X)$: The range of a linear operator X.
C: The class of all entire functions.
$C(\varrho, 0)$: The class of all entire functions of order ϱ and minimum type.

Introduction

Let T be a bounded linear operator defined on all of a normed linear space with values in a second normed linear space. TAYLOR and HALLBERG [8] have presented a complete systematic account of the theorems about the range and inverse of T and those of its adjoint. They present, in the form of what they call the State Diagram, all the implications of the theorems concerned. In this paper we carry out this systematisation for a continuous linear operator and its adjoint from one l. c. l. H. s. into another, with the restriction that we consider only the "weak" topologies in these spaces and their duals. (For definitions and details, see Section 1.) Our main result with this restriction is that, in the general case of E and F being just l. c. l. H. s., precisely nine "states" out of a theoretical total of 81 mutually exclusive alternatives, are possible for a pair (T, T^*), where T^* is the adjoint operator of T; and that, if further restrictions are imposed on E and F, the number of possible cases drops to seven. This is the case, when, for example, E and F are Fréchet spaces. Examples from the linear topological space of entire functions as well as from Hilbert space are made available to show that each of these "possible" states does occur. Finally, we collect, in another theorem all the implications which the state diagram offers on the spectrum of a weak continuous — continuous for the weak topologies — linear operator.

*) This work was done under a Junior Fellowship of the National Institute of Sciences of India.

Our main theorems 1 and 2, which we enunciate about the state of a pair (T, T^*) and about the spectrum of an operator, follow directly from certain preliminary theorems (c.f. Section 1), which, however, are not essentially new. The significance of our results lies in the fact that all the information about a weak continuous linear operator have been collected in a schematic form and examples are offered to show that such a presentation in the form of a state diagram cannot be improved any further except, perhaps, in a minor way, by answering the question posed at the end of Section 4. It is also believed that the information on the spectrum collected in Theorem 2 have not so far been obtained, in relation to spaces more general than normed linear spaces.

It is a pleasure and privilege to acknowledge, here, the direction and guidance from Professor GANAPATHY IYER, during the preparation of this paper.

Section 1

Let $E^* \subset E'$ satisfy the following two properties:

(i) For each $e \neq 0$ in E, there exists $e^* \in E^*$ such that $\langle e, e^* \rangle \neq 0$;

(ii) For each $e^* \neq 0$ in E^*, there exists $e \in E$ such that $\langle e, e^* \rangle \neq 0$.

Let F^* be similarly defined in relation to F'. The coarsest topology on E for which all the linear functionals $e \to \langle e, e^* \rangle$ are continuous, is called the weak topology on E and is denoted by $\sigma(E, E^*)$. The coarsest topology on E^* for which all the linear functionals $e^* \to \langle e, e^* \rangle$ are continuous is called the weak* topology on E^* and is denoted by $\sigma(E^*, E)$. Similarly we define $\sigma(F, F^*)$ and $\sigma(F^*, F)$. The terms "weakly dense", "weakly closed", "weak continuity", etc. will mean "dense in the weak topology", "closed in the weak topology", "continuity with respect to the weak topologies" respectively. An analogous remark applies for weak* topologies.

Let T be a weak-continuous linear operator from E to F. The property of T being weak-continuous, we know, (c.f. BOURBAKI [1], Ch. IV, § 4, Prop. 1) is equivalent to the existence of a linear operator T^* of F^* into E^* such that $\langle T(e), f^* \rangle = \langle e, T^*(f^*) \rangle$ for all $e \in E$ and $f^* \in F^*$. In other words, for every $f^* \in F^*$, there is an $e^* \in E^*$ such that $T^* f^* = e^*$ uniquely. The linear operator defined thus is called the adjoint operator of T. We also know ([1], Ch. IV, § 4, Prop. 6) that T^* is weak*-continuous. We shall consider the following three possibilities for $R(T)$:

I: $R(T) = F$.

II: $R(T)$ is weakly dense in F, but $R(T) \neq F$.

III: $R(T)$ is not weakly dense in F.

We shall also take into account the following three possibilities for the inverse T^{-1} of T:

1: T^{-1} exists and is weak-continuous.

2: T^{-1} exists but is not weak-continuous.

3: T^{-1} does not exist at all.

We say that T is in the state I_1 or $T \in \mathrm{I}_1$ whenever possibility I occurs for $R(T)$ and possibility 1 occurs for T^{-1}; and so on. We thus have nine states

for T, namely, $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \mathrm{II}_1, \ldots, \mathrm{III}_3$. The adjoint T^*, considered as a weak*-continuous linear operator from F^* to E^*, can also have nine states in an analogous manner. We remark that the three possibilities for $R(T^*)$ and the continuity of the inverse $(T^*)^{-1}$ are in relation to the weak* topologies of F^* and E^*. For example, $T^* \in \mathrm{II}_2$ will mean that $R(T^*)$ is weak* dense in E^*, but $R(T^*) \neq E^*$ and that $(T^*)^{-1}$ exists, but is not weak*-continuous from F^* to E^*. Thus, for a given pair (T, T^*), we have 81 possibilities of occurrence. These will be called the "states" of the pair (T, T^*). (T, T^*) is said to be in state $(\mathrm{I}_2, \mathrm{II}_3)$ if $T \in \mathrm{I}_2$ and $T^* \in \mathrm{II}_3$.

We begin with the following two theorems from Bourbaki ([1], Ch. IV, § 4, Props. 3 and 5):

Theorem A. *$R(T)$ is weakly dense in F if and only if $(T^*)^{-1}$ exists.*

Theorem B. *$R(T) = F$ if and only if $(T^*)^{-1}$ exists and is weak*-continuous.*

Starting from E^*, endowed with the weak* topology $\sigma(E^*, E)$, we see that its topological dual is just E and the coarsest topology on E for which all the linear functionals $e \to \langle e, e^* \rangle$ are continuous, is precisely the weak topology $\sigma(E, E^*)$ on E. This property of duality between E and E^* and between F and F^*, as well as the definitions of T and T^*, permit us to interchange, in the above theorems, the roles played by E, F and T on the one hand and F^*, E^* and T^* (respectively) on the other hand. So, for each of the above theorems, we have, what may be called, a dual theorem, as below.

Theorem A′. *$R(T^*)$ is weak* dense in E^* if and only if T^{-1} exists.*

Theorem B′. *$R(T^*) = E^*$ if and only if T^{-1} exists and is weak-continuous.*

Before proceeding to the next theorem which we shall obtain as a consequence of Browder's results ([2], Sec. 2) regarding continuous linear mappings of E into F, we shall note some definitions regarding l. c. l. H. s. Details may be found in Bourbaki [1] or in Browder [2]. If E^* is the topological dual of E, and if the Mackey topology $\tau(E, E^*)$, that is, the finest topology for which E^* is still the topological dual of E, coincides with the strong topology $\beta(E, E^*)$, then E is called a Mackey space. Every locally convex metrisable space as well as every barrelled space is a Mackey space (Prop. 5 and 6, Ch. IV, § 2, Bourbaki [1]).

E is said to be fully barrelled if every closed subspace of E is barrelled. Every Fréchet space is fully barrelled; for every closed subspace of a Fréchet space is a Fréchet space.

If E is a l. c. l. H. s. and E^* be its topological dual, E is said to be fully complete provided that a subset of E^* is weak* closed if and only if its intersection with every weak* compact subset of E^* is weak* compact. Every Fréchet space is fully complete ([3], p. 85). Also fully complete spaces are complete ([2], p. 64).

If E is fully complete and F barrelled, every continuous linear mapping of E onto F is a homomorphism ([2], p. 64). This may be called the Pták Open Mapping Theorem.

E is said to satisfy condition (t) if for every linear subspace M of E, $\tau(M, M^*)$ coincides with the topology induced on M by $\tau(E, E^*)$, where E^* is the topological dual of E. When E is metrisable, E satisfies condition (t) ([2], pp. 63, 64).

We now have,

Theorem C. *Let E be a fully complete Mackey space. Let F be fully barrelled. Let T be a weak-continuous linear mapping from E to F. Then "T^* is a weak* homomorphism of F^* into E^*" implies "T is a weak homomorphism of E into F". If, in addition, F satisfies condition (t), the converse implication is also true.*

Proof. Since, when E is a Mackey space, by Prop. 7, Cor., § 4, Ch. IV of Bourbaki [1], every weak-continuous linear mapping from E to F is also continuous for the initial topologies, the theorem follows from the corresponding theorem for a linear mapping from E to F continuous for the initial topologies, without the Mackey space hypothesis for E. This latter theorem is a consequence of Lemmas 2.2, 2.3, 2.4 and 2.6 of Browder ([2], pp. 68, 69).

Section 2

We have already explained the concept of the state of a pair (T, T^*). We shall now construct a "State Diagram" on the lines of the second state diagram of Taylor and Hallberg [8]. The 81 squares of the diagram denote the different states of the pair (T, T^*). A square is crossed out by its diagonals if the corresponding state for (T, T^*) is impossible by virtue of the theorems A, B, A′ and B′. As regards the remaining squares, we place the letter C in a particular square if the corresponding state is impossible by virtue of the direct implication in Theorem C and we place the letter C′ if the impossibility is due only to the converse implication of Theorem C.

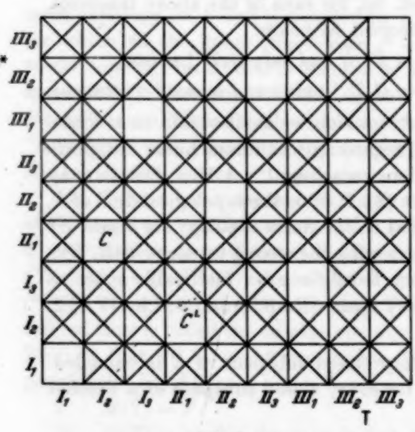

Fig. 1.

C: Cannot occur if E is a fully complete space and a Mackey space and F is fully barrelled.

C′: Cannot occur if E is a fully complete space and a Mackey space and F is fully barrelled and satisfies (t)

An inspection of the cancellation of the squares in the State Diagram enables us to formulate the following Theorem, which is the main result of this paper:

Theorem 1. *Let E and F be two l. c. l. H. s. Let E^* and F^* be defined as in the beginning of Section 1. Let T be a weak continuous linear operator from E to F and T^* be its adjoint, weak* continuous from F^* to E^*. Then,*

(a) *only nine states are possible for the pair (T, T^*), namely, (I_1, I_1), (I_3, III_1), (II_2, II_2), (II_3, III_2), (III_1, I_3), (III_2, II_3), (III_3, III_3), (I_2, II_1)*

and (II_1, I_2). Conversely, of these nine states, the first seven states occur even when E and F are Hilbert spaces;

(b) *if E and F satisfy the following combination: "E is a fully complete space aud a Mackey space and F is fully barrelled", then the state (I_2, II_1) cannot occur and here, the condition that F is fully barrelled is necessary;*

(c) *if, in addition to the conditions in* (b), *F satisfies condition* (t), *the state (II_1, I_2) also cannot occur and here, the condition that E is fully complete is necessary.*

Since Fréchet spaces are fully complete, Mackey and fully barrelled, we have the following

Corollary. *If E and F are Frechet spaces, T and T^* are defined as above, then seven and only seven states occur for the pair (T, T^*), viz., the first seven in the above list.*

Proof of Theorem 1. The Theorem is, in a sense, a description of the State Diagram. The cancellations of the squares in the Diagram are justified by the Theorems of Section 1 and so the statements concerning non-occurrences of states stand proved. The proof of the Theorem will now be complete if we can justify the non-cancellation of the 9 squares remaining. This will be done by offering examples to show that these 9 states do occur, the first seven of them even, when E and F are Hilbert spaces. The examples for these seven states are the same as the first seven examples in the paper of Taylor and Hallberg [8]. We have only to note that every continuous linear operator is also a weak continuous linear operator and that strongly dense subsets are also weakly dense. It therefore only remains to prove the converse parts of (b) and (c) of the theorem by offering examples for the two states $(\mathrm{II}_1, \mathrm{I}_2)$ and $(\mathrm{I}_2, \mathrm{II}_1)$ from general l. c. l. H. s., which fail to satisfy the combinations as suggested. This we propose to do in the next section.

Section 3

Our examples will be from the linear space C of entire functions and a subspace $C(1, 0)$ of it. The principle is to take a pair of spaces E and F, with certain initial topologies, take the set of continuous linear functionals on them and form the weak topologies. It is in these weak topologies that we consider the transformation T and the state of the pair (T, T^*). But the intrinsic properties of the spaces, like that of being fully complete, Mackey, etc. referred to in the Theorem, are with reference to the initial topologies of E and F.

The class C of entire functions has been elaborately discussed as a topological space in ([4], [5]). We shall note some terminology and results relevant to our purpose.

The class C of all entire functions is clearly a linear space. Let $\{e_n\}$ always stand for the fundamental basis $e_n = z^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Then C consists precisely of the elements $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$, where (a_n) satisfies the property

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0\,. \tag{3.1}$$

A metric in C is

$$|||\alpha||| = \text{upper bound } \{|a_0|, |a_n|^{1/n}, n \geq 1\}.$$

This metric topology on C is denoted by Γ and is equivalent to the topology of uniform convergence on compact subsets of the complex field ([4], p. 18). We can also obtain Γ as the lattice product of normed topologies $\Gamma(R)$'s as $R \to \infty$, the norm in each of these being

$$\|\alpha; R\| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n.$$

Γ is a Fréchet space ([4], p. 16; [5], p. 87) as well as a Montel space ([7], Th. 7). The topological dual of Γ consists precisely of sequences $\alpha^* = (c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots)$ which satisfy the property

$$\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} < \infty \tag{3.2}$$

and $\alpha^*(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n$. The set of all such α^*'s will be denoted by C^*.

The numbers $\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n\right|$, for all sequences (c_n) with the property (3.2), form a family of seminorms determining the weak topology $\sigma(C, C^*)$ on C. The numbers $\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n\right|$, for all sequences (a_n) with the property (3.1), form a family of seminorms determining the weak* topology $\sigma(C^*, C)$ on C^*.

For the purpose of our examples, we shall consider the space $C(1, 0)$, with the metric topology induced on it by Γ. We shall call this the topology $C_\Gamma(1, 0)$. Evidently this is not complete and so not also fully complete. The elements $\alpha = \sum a_n e_n \in C(1, 0)$ are characterised by the property

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \cdot n = 0.$$

The class of continuous linear functionals on $C_\Gamma(1, 0)$ is the space quotient of C^* by the set of those of its elements which vanish over the whole of $C(1, 0)$. So the weak topology on $C(1, 0)$ is defined by the seminorms $|\sum c_n a_n|$, where, $c_n = \gamma_n + \gamma'_n$, (γ_n) and (γ'_n) satisfy inequalities similar to (3.2) and $\sum \gamma_n a_n = 0$ for all $\alpha \in C(1, 0)$. This weak topology on $C(1, 0)$ is however identical to the topology induced on $C(1, 0)$ by $\sigma(C, C^*)$ (Prop. 8, §2, Ch. IV of [1]). With these remarks, we shall take up the remaining examples.

(II_1, I_2): Consider the injection mapping T defined by

$$T: \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$$

from $C(1, 0)$ to C, with the initial topologies $C_\Gamma(1, 0)$ and Γ respectively. It is obviously continuous for the initial topologies and so also continuous for the weak topologies. $R(T) = C(1, 0)$, which is dense in Γ and so also weakly dense in C. The inverse exists and is further both continuous and weak continuous. Thus $T \in \mathrm{II}_1$ and the State Diagram shows that $T^* \in \mathrm{I}_2$. We thus have an

example for the occurrence of $(\mathrm{II}_1, \mathrm{I}_2)$, when E and F satisfy the combination: E is not fully complete but is a Mackey space and F is fully barrelled and satisfies (t).

$(\mathrm{I}_2, \mathrm{II}_1)$: Consider the linear mapping

$$T: \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n \to a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{a_n}{n^n} e_n\right\}$$

defined on C. Since $|a_n|^{1/n} \to 0$, we have,

$$\lim_{n\to\infty} |a_n/n^n|^{1/n} \cdot n = 0 .$$

So $T(\alpha) \in C(1, 0)$, where $\alpha = \sum a_n e_n \in C$. Again, every element $\sum_{n=0}^{\infty} b_n e_n \in C(1,0)$ satisfies

(3.3) $$\lim_{n\to\infty} |b_n|^{1/n} \cdot n = 0 ;$$

so it can be written as $T(\alpha')$ where $\alpha' = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^n e_n$. The relation (3.3) now shows that $\alpha' \in C$. Thus $R(T) = C(1, 0)$. As initial topologies on C and $C(1, 0)$ let us take Γ and $C_\Gamma(1, 0)$ respectively. T is continuous in these initial topologies, because, whenever $(\alpha_p) \to 0$, $T(\alpha_p)$ also tends to 0, as can be seen from the metric in the spaces and the definition of T. On the other hand, the inverse, which surely exists, is not weak continuous, because, the sequence (e_n/n^n) in $C(1, 0)$ tends to zero in all its seminorms in the weak topology of $C_\Gamma(1, 0)$, whereas $T^{-1}(e_n/n^n)$ which is (e_n), does not tend to zero in $\sigma(C, C^*)$, as can be seen by choosing the seminorm $(c_r) = (1, 1, \ldots)$. Thus $T \in \mathrm{I}_2$ and, from the State Diagram, $T^* \in \mathrm{II}_1$.

The mapping T that has been defined above, continuous in the initial topologies from C to $C(1, 0)$, also enables us to observe that $C(1, 0)$ with the topology $C_\Gamma(1, 0)$ is not a fully barrelled space, in fact, not even a barrelled space. For, by the Pták Open Mapping Theorem (c.f. Section 1), since T is a continuous onto mapping from a fully complete space (C, with the topology Γ) to $C(1, 0)$ (with topology $C_\Gamma(1, 0)$), if $C_\Gamma(1, 0)$ were barrelled, then the inverse, which exists, must be continuous from $C_\Gamma(1, 0)$ to Γ. But this is not so, because, the sequence (e_n/n^n) in $C(1, 0)$ tends to zero in $C_\Gamma(1, 0)$, whereas (e_n) does not tend to zero in Γ.

So the above mapping T is an example for the occurrence of the State $(\mathrm{I}_2, \mathrm{II}_1)$ for the following combination of E and F: E is a fully complete space and a Mackey space, and F satisfies (t) but is not fully barrelled.

The two examples that we have provided in this section complete the proof of Theorem 1 as stated. We conclude this Section by posing an unanswered question: Are all the restrictions on E and F stated in the Theorem necessary for the non-occurrence of States $(\mathrm{I}_2, \mathrm{II}_1)$ and $(\mathrm{II}_1, \mathrm{I}_2)$?

Section 4

In this Section we collect all the implications of our State Diagram regarding the Spectrum of a weak continuous linear operator and its adjoint considered

as a weak* continuous operator. We assume that E is a Fréchet space and T is a weak continuous linear mapping of E into itself. Consider the states of the operator $\lambda - T$, where λ is a scalar. We say that λ is in one of the classes $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \ldots, \mathrm{III}_3$, if $\lambda - T$ is in the corresponding state. We say that $\lambda \in \varrho(T)$, the resolvent set, $C\sigma(T)$, the continuous spectrum, $R\sigma(T)$, the residual spectrum and $P\sigma(T)$, the point spectrum, as in GOLDBERG ([6], p. 78). These definitions may also be applied to the adjoint T^*. We note that $(\lambda - T)^* = \lambda - T^*$. The assertions in the following theorem will now be immediate from a scrutiny of the State Diagram:

Theorem 2. *With the above notations, we have,*

(i) $\varrho(T) = \varrho(T^*)$ *or equivalently,* $\sigma(T) = \sigma(T^*)$.

(ii) $P\sigma(T) \subset P\sigma(T^*) \cup R\sigma(T^*)$.

(iii) $P\sigma(T^*) \subset P\sigma(T) \cup R\sigma(T)$

(iv) $C\sigma(T) = C\sigma(T^*)$ (v) $R\sigma(T) \subset P\sigma(T^*)$ *and*

(vi) $R\sigma(T^*) \subset P\sigma(T)$.

References

[1] BOURBAKI, N.: Espaces vectoriels topologiques. Act. Sci. Industr. Nos. 1189, 1229 (1955).

[2] BROWDER, F. E.: Functional analysis and partial differential equations. I. Math. Ann. 138, 55–79 (1959).

[3] DIEUDONNÉ, J., et L. SCHWARTZ: La dualité dans les espaces (F) et (LF). Ann. Inst. Fourier 1, 61–101 (1949).

[4] GANAPATHY IYER, V.: On the space of integral functions. I. J. Indian Math. Soc. 12, 13–30 (1948).

[5] GANAPATHY IYER, V.: On the space of integral functions. II. Quart. J. Math. 1, 86–96 (1950).

[6] GOLDBERG, S.: Linear operators and their conjugates. Pacific J. Math. 9, 69–79 (1959).

[7] KRISHNAMURTHY, V.: On the continuous endomorphisms in the spaces of certain classes of entire functions. Proc. National Institute of Sciences of India (to be published).

[8] TAYLOR, A. E., and J. A. HALLBERG: General theorems about a bounded linear operator and its conjugate. J. reine angew. Math. 198, 93–111 (1957).

(Received March 12, 1960)

WARNER, S.
Math. Annalen 141, 161—170 (1960)

Compact Noetherian Rings

By

SETH WARNER*) in Princeton, New Jersey

A *noetherian ring* is a commutative ring with identity which satisfies the ascending chain condition on ideals, or equivalently, in which every ideal is finitely generated. A *local ring* is a noetherian ring having only one maximal ideal; a *semi-local ring* is one having only finitely many maximal ideals. Powers of the product of the maximal ideals of a semi-local ring form a fundamental system of neighborhoods of zero for a "natural" Hausdorff topology on the ring compatible with its ring structure. In § 1 we show that a compact noetherian domain (by definition a compact space is Hausdorff) is a local ring and that its given topology is the natural one. This result is extended in § 2, where it is shown that every compact noetherian ring is semi-local and that its given topology is the natural one. Certain equivalences between algebraic and topological properties of a semi-local ring are given in § 3, and the problem of extending the topology of a semi-local ring to one on subrings of its ring of fractions is considered. In particular, essentially algebraic necessary and sufficient conditions are given for a noetherian domain to be a compact open subring of a locally compact field. In § 4 we investigate topologies of formal power series rings; this is motivated by I. S. Cohen's theorem that complete local rings are homomorphic images of formal power series rings over integral domains of special type.

1. Compact Noetherian Domains

Our development utilizes nothing of the theory of topological groups and rings beyond that contained in N. Bourbaki's exposition [3, 4], but depends rather on the algebraic theory of noetherian rings. In particular, we shall not draw on the general theory of topological rings as developed by KAPLANSKY and others. We begin with a well-known fact [7, theorem 9] whose proof, however, we include for completeness.

Lemma 1. *A compact ring K which algebraically is a division ring is finite.*

Proof. Suppose $\{0\}$ is not a neighborhood of zero. Then $\mathscr{V} = \{V - \{0\} : V$ is a neighborhood of zero$\}$ is a filter base. Its image $\varphi(\mathscr{V})$ under the mapping $\varphi : x \to x^{-1}$, $x \neq 0$, is also a filter base and thus has an adherent point p, as K is compact. Let W be a neighborhood of zero not containing 1. Let O and P be neighborhoods respectively of zero and p such that $O\,P \subseteq W$. By [2, Theo-

*) The author is a National Science Foundation fellow.

rem 1, p. 92] there exists $V \in \mathscr{V}$ such that $\varphi(V) \subseteq PO \cap V \neq \theta$; let $x \in O \cap V$. Then $x^{-1} \in \varphi(V) \subseteq P$, so $1 = xx^{-1} \in OP \subseteq W$, a contradiction. Thus $\{0\}$ is a neighborhood of zero. Therefore K is a compact discrete ring and so is finite.

Lemma 2. *If A is a compact commutative ring with identity, every finitely generated ideal in A is compact.*

Proof. For any $a \in A$, Aa is the image of A under the continuous map $x \to xa$ and so is compact. If $a_1, \ldots, a_n$ are generators of ideal $\mathfrak{a}$, then $\mathfrak{a} = Aa_1 + \cdots + Aa_n$ is the sum of compact sets and so is compact.

Lemma 3. *If A is a compact commutative ring with identity and if $\mathfrak{m}$ is a closed maximal ideal in A, then $A/\mathfrak{m}$ is a finite field.*

Proof. With its quotient topology $A/\mathfrak{m}$ is a Hausdorff topological ring as $\mathfrak{m}$ is closed. Hence as $A/\mathfrak{m}$ is the continuous image of A, $A/\mathfrak{m}$ is a compact ring which algebraically is a field as $\mathfrak{m}$ is maximal. Thus by Lemma 1, $A/\mathfrak{m}$ is finite.

Lemma 4. *Let A be a commutative ring with identity, and let $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{b}$ be ideals in A. If $A/\mathfrak{a}$ and $A/\mathfrak{b}$ are finite [countable] and if $\mathfrak{b}$ has a finite set of generators, then $A/\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ is finite [countable].*

Proof. $(A/\mathfrak{a}\mathfrak{b})/(\mathfrak{b}/\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ is isomorphic to $A/\mathfrak{b}$. Consequently if $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ is finite [countable], $A/\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ is the union of a finite [countable] number of finite [countable] sets and so is finite [countable]. It suffices, therefore, to show $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ is finite [countable]. If $A/\mathfrak{a}$ has n members, let $S = \{1, \ldots, n\}$; if $A/\mathfrak{a}$ is countable, let S be the set of positive integers. Let $(a_i)_{i \in S}$ be a sequence of elements, one from each coset of $\mathfrak{a}$. Then $A = \bigcup_{i \in S} (a_i + \mathfrak{a})$. Let $\mathfrak{b} = Ab_1 + \cdots + Ab_m$. For each mapping σ of $\{1, \ldots, m\}$ into S, let $c_\sigma = \sum_{1 \leq j \leq m} a_{\sigma(j)} b_j$. The set of such mappings is finite [countable] if S is finite [countable], and we assert that $\mathfrak{b} = \bigcup_\sigma (c_\sigma + \mathfrak{a}\mathfrak{b})$, from which we may infer that $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ is finite [countable]. Let $x \in \mathfrak{b}$. Then $x = \sum_{1 \leq j \leq m} y_j b_j$, where $y_j \in A$. Let $\sigma(j) \in S$ be such that $y_j \in a_{\sigma(j)} + \mathfrak{a}$. Then $y_j = a_{\sigma(j)} + t_j$, where $t_j \in \mathfrak{a}$. Hence $x = \sum_{1 \leq j \leq m} a_{\sigma(j)} b_j + \sum_{1 \leq j \leq m} t_j b_j \in c_\sigma + \mathfrak{a}\mathfrak{b}$.

Lemma 5. *Let A be a compact commutative ring with identity, let $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ be finitely generated maximal ideals in A, and let $s_1, \ldots, s_n$ be positive integers. Then $\mathfrak{m}_1^{s_1} \ldots \mathfrak{m}_n^{s_n}$ is open, and $A/\mathfrak{m}_1^{s_1} \ldots \mathfrak{m}_n^{s_n}$ is finite.*

Proof. The latter assertion follows from Lemmas 2, 3, and 4 and induction. As the product of two finitely generated ideals is clearly finitely generated, by induction $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1^{s_1} \ldots \mathfrak{m}_n^{s_n}$ is finitely generated and hence compact by Lemma 2. Therefore each coset of $\mathfrak{m}$ is compact. Hence as $A/\mathfrak{m}$ is finite, $\mathfrak{m}$ is the complement of the union of the finite number of cosets of $\mathfrak{m}$ distinct from $\mathfrak{m}$ itself, a compact set, and so $\mathfrak{m}$ is open.

If $\mathfrak{m}$ is the unique maximal ideal of local ring A, the powers $\{\mathfrak{m}^s\}_{s \geq 1}$ of $\mathfrak{m}$ form a fundamental system of neighborhoods of zero for a topology $\mathscr{T}_A$ on A compatible with the ring structure of A. $\mathscr{T}_A$ is called the *natural* topology of A.

Theorem 1. *If A is a compact noetherian domain, then A is a local ring, and the given topology of A is the natural topology of A.*

Proof. Let $\mathfrak{m}$ be a maximal ideal of A. Then $\bigcap_{s\geq 1} \mathfrak{m}^s = \{0\}$ [10, Theorem 23, p. 232]. Therefore as each $\mathfrak{m}^s$ is closed (Lemma 2), $\{0\}$ is the adherence of filter base $\{\mathfrak{m}^s\}_{s\geq 1}$. Let $\mathfrak{n}$ be any maximal ideal in A. Then $\mathfrak{n}$ is an open neighborhood of zero (Lemma 5) and so $\mathfrak{m}^s \subseteq \mathfrak{n}$ for some $s \geq 1$ [2, Theorem 1, p. 92]. As $\mathfrak{n}$ is prime, therefore $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n}$ and hence $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$. Thus A is a local ring. Again as $\bigcap_{s\geq 1} \mathfrak{m}^s = \{0\}$, the natural topology $\mathcal{T}_A$ is Hausdorff, and by Lemma 5 $\mathcal{T}_A$ is weaker than the given topology $\mathcal{T}$ of A. Thus the identity mapping from $(A, \mathcal{T})$ onto $(A, \mathcal{T}_A)$ is continuous and hence is a homeomorphism, as $(A, \mathcal{T})$ is compact. Therefore $\mathcal{T} = \mathcal{T}_A$.

Cohen [6, p. 56] defines a *generalized local ring* to be a commutative ring with identity such that the set $\mathfrak{m}$ of all non-units is a finitely generated ideal (and hence the unique maximal ideal) and $\bigcap_{s\geq 1} \mathfrak{m}^s = \{0\}$. The powers $\{\mathfrak{m}^s\}_{s\geq 1}$ of $\mathfrak{m}$ then form a fundamental system of neighborhoods of zero for a Hausdorff topology on the ring compatible with its ring structure; this topology is again called the *natural* topology.

Theorem 2. *If A is a compact generalized local ring, then A is a local ring, and the given topology of A is the natural topology of A.*

Proof. Let $\mathfrak{m}$ be the ideal of non-units. By Lemma 5, $\mathfrak{m}^s$ is open for all $s \geq 1$. Hence the given topology of A is finer than its natural topology, so the two topologies coincide as the given topology is compact and the natural topology Hausdorff. A with its natural topology is therefore a complete topological ring. Hence by a theorem of Cohen [6, Theorem 3, p. 61], A is a local ring.

Let A be a compact principal ideal domain which is not a field, and let K be its field of fractions. A has a unique prime ideal (p) by Theorem 1, as every prime ideal in a principal ideal domain is maximal [10, Theorem 32, p. 243]. Consequently, every non-zero element of K is uniquely of form up^k where u is a unit, k an integer. The valuation $v(up^k) = k$ on K induces on A its natural topology, which is the given compact topology by Theorem 1. As A is open in K, K is locally compact. Thus A is the valuation ring of a locally compact field whose topology is given by an integer-valued valuation. This result was proved by an entirely different method in [9, Theorem 7]. Compact principal ideal domains thus have a particularly transparent structure.

Theorem 3. *A compact Dedekind domain is a compact principal ideal domain.*

Proof. The assertion follows from Theorem 1 and [10, Theorem 16, p. 278, and Theorem 13, p. 275].

2. Compact Noetherian Rings

If $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ are all the distinct maximal ideals of a semi-local ring A and if $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \ldots \mathfrak{m}_n$, the powers $\{\mathfrak{m}^s\}_{s\geq 1}$ of $\mathfrak{m}$ form a fundamental system of neighborhoods of zero for a topology $\mathcal{T}_A$ compatible with the ring structure of A. $\mathcal{T}_A$ is a Hausdorff topology [5, Lemmas 1 and 2, p. 692] and is again

called the *natural* topology of A. By a *proper* ideal of a ring A, we mean any ideal strictly contained in A.

Lemma 6. *If $\mathfrak{p}$ is a proper prime ideal in compact noetherian ring A, then $\mathfrak{p}$ is contained in only one maximal ideal.*

Proof. $\mathfrak{p}$ is closed by Lemma 2, so $A/\mathfrak{p}$ is Hausdorff and hence a compact noetherian domain. By Theorem 1, $A/\mathfrak{p}$ has only one maximal ideal, which is of form $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}$ where $\mathfrak{m}$ is a maximal ideal of A containing $\mathfrak{p}$. If $\mathfrak{n}$ is any maximal ideal containing $\mathfrak{p}$, then $\mathfrak{n}/\mathfrak{p} = \mathfrak{m}/\mathfrak{p}$, so $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ as both contain $\mathfrak{p}$.

Theorem 4. *A compact noetherian ring A is semi-local, and its given topology is the natural topology of A.*

Proof. Let $\{0\} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ be a primary decomposition of $\{0\}$, let $\mathfrak{p}_i$ be the radical of $\mathfrak{q}_i$; since $\mathfrak{p}_i$ is proper, $\mathfrak{p}_i$ is contained in a unique maximal ideal $\mathfrak{m}_i$ by Lemma 6. If $\mathfrak{m}$ is any maximal ideal of A, then $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p}_i$ for some i [10, Theorem 7, p. 211], whence $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_i$. Thus A is semi-local. By Lemma 5, $\mathcal{T}_A$ is weaker than the given topology $\mathcal{T}$. Hence as $\mathcal{T}_A$ is Hausdorff and as the identity mapping from $(A, \mathcal{T})$ onto $(A, \mathcal{T}_A)$ is continuous, it is a homeomorphism since $(A, \mathcal{T})$ is compact. Therefore $\mathcal{T} = \mathcal{T}_A$.

Theorem 5. *A compact noetherian ring A is the Cartesian product of a finite number of compact local rings, the topology of each being its natural topology.*

Proof. By Theorem 4, A is semi-local and its topology is the natural topology $\mathcal{T}_A$. Consequently, A is a complete ring and therefore, by a theorem of CHEVALLEY [5, Proposition 2, p. 693] is the direct sum of ideals $(\mathfrak{a}_i)_{1 \leq i \leq n}$ where each $\mathfrak{a}_i$ is a local ring. By Lemma 2, each $\mathfrak{a}_i$ is compact and (by Theorem 4, or as seen directly) the topology it inherits from A is its natural topology. The canonical algebraic isomorphism from the Cartesian product of $(\mathfrak{a}_i)_{1 \leq i \leq n}$ onto A is one-to-one and continuous and hence is a homeomorphism, as the Cartesian product is compact. Thus A is isomorphic as a topological ring to the Cartesian product of $(\mathfrak{a}_i)_{1 \leq i \leq n}$.

A *primary* ring is a commutative ring with identity which has only one proper prime ideal.

Theorem 6. *If A is a compact commutative ring with identity which satisfies the descending chain condition on ideals, then A is finite. In particular, every compact noetherian primary ring is finite.*

Proof. By [10, Theorem 3, p. 205], A is the direct sum of ideals which, as rings, are noetherian primary rings. Each ideal is compact, so it suffices to show that a compact noetherian primary ring B is finite. If $\mathfrak{m}$ is the proper prime ideal of B, $\mathfrak{m}$ is nilpotent [10, p. 204]. Hence the natural topology of B, which is the given topology of B by Theorem 4, is discrete. Therefore B is a compact discrete ring and so is finite.

Corollary. *A compact principal ideal ring A is the Cartesian product of a finite number of compact principal ideal domains and a finite number of finite, primary, principal ideal rings.*

Proof. A is the direct sum of a finite number of ideals, each of which, as a ring, is either a principal ideal domain or a primary principal ideal ring [10, Theorem 33, p. 245]. As every ideal is compact, it follows as in the proof of

Theorem 5 that A is isomorphic as a topological ring to their Cartesian product; by Theorem 6, each of the primary principal ideal rings is finite.

3. The Topology of Semi-local Rings

A semi-local ring with its natural topology is metrizable, and the open ideals form a fundamental system of neighborhoods of zero. We give algebraic conditions equivalent to total boundedness and separability.

Theorem 7. *Let $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ be the distinct maximal ideals of a semi-local ring A, equipped with its natural topology.* (1) *A is totally bounded if and only if $A/\mathfrak{m}_i$ is a finite field for $1 \leq i \leq n$. Therefore A is compact if and only if A is complete and $A/\mathfrak{m}_i$ is a finite field, for $1 \leq i \leq n$.* (2) *A is separable if and only if $A/\mathfrak{m}_i$ is a countable field for $1 \leq i \leq n$.*

Proof. (1) Necessity. If $\hat{A}$ is the completion of A and $\overline{\mathfrak{m}}_i$ the closure in $\hat{A}$ of $\mathfrak{m}_i$, then $\hat{A}/\overline{\mathfrak{m}}_i$ is isomorphic to $A/\mathfrak{m}_i$ [4, Corollary 1, p. 58]. Thus $\hat{A}/\overline{\mathfrak{m}}_i$ is a field, so $\overline{\mathfrak{m}}_i$ is a maximal ideal. But $\hat{A}$ is compact by hypothesis, so $\hat{A}/\overline{\mathfrak{m}}_i$ is a compact ring which algebraically is a field. Hence by Lemma 1, $\hat{A}/\overline{\mathfrak{m}}_i$ and so also $A/\mathfrak{m}_i$ are finite. Sufficiency: Let $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_n$. By Lemma 4, $A/\mathfrak{m}^s$ is finite for all $s \geq 1$. Consequently there exist $a_1, \ldots, a_p$ such that $A = \bigcup_{1 \leq i \leq p} (a_i + \mathfrak{m}^s)$. As $\{\mathfrak{m}^s\}_{s \geq 1}$ is a fundamental system of neighborhoods of zero, therefore A is totally bounded. (2) Necessity: As $\mathfrak{m}_i$ is open, the cosets of $\mathfrak{m}_i$ form a disjoint family of open sets whose union is A. Therefore as A is separable, the family is countable, i.e., $A/\mathfrak{m}_i$ is countable. Sufficiency: Let $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_n$. By Lemma 4, $A/\mathfrak{m}^s$ is countable for all $s \geq 1$. The cosets of $\mathfrak{m}^s$ are thus countable in number; as the collection of all cosets of all the ideals $\mathfrak{m}^s$ for $s \geq 1$ is a base for the open sets, A is therefore separable.

Let A be a semi-local ring equipped with its natural topology, let S be a subsemigroup of the multiplicative semigroup $\{x \neq 0 : x \text{ is not a divisor of zero}\}$, and let A_S be the subring of the full ring of fractions of A consisting of all elements of form x/y where $x \in A$, $y \in S$. When is the natural topology of A the restriction to A of a topology on A_S compatible with its ring structure? A_S may be semi-local, but if so its natural topology may induce on A a topology strictly finer than the natural topology of A. Indeed, if A is a semi-local integral domain, its natural topology is discrete if and only if A is a field; consequently if A is not a field, the natural topology of its field of fractions induces on A a topology strictly finer than the natural topology of A. On the other hand, we have seen that if K is the field of fractions of a compact principal ideal domain A, there is a topology on K which is compatible with its field structure and for which A is an open subset (remark following Theorem 2). The general problem admits an easy solution if we require in addition that A be open in A_S:

Theorem 8. *Let A be a semi-local ring, S a subsemigroup of the multiplicative semigroup of non-divisors of zero, $A_S = \{x/y : x \in A, y \in S\}$. There is a topology on A_S compatible with its ring structure, inducing on A its natural topology, and for which A is open if and only if every proper prime ideal of A intersecting S is*

maximal. If such a topology exists, it is unique, the set of elements invertible in A_S is open, and $x \to x^{-1}$ is continuous on that set.

Proof. Necessity: Let $\mathfrak{p}$ be a prime ideal of A intersecting S, and let $a \in \mathfrak{p} \cap S$. As a is invertible in A_S, $x \to xa$ is a homeomorphism and, in particular, is an open mapping of A_S onto A_S. Therefore as A is open in A_S, Aa is open. Let $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ be the distinct maximal ideals of A; for some $s \geqq 1$ we have $\mathfrak{m}_1^s \ldots \mathfrak{m}_n^s \subseteq Aa \subseteq \mathfrak{p}$, whence $\mathfrak{m}_i \subseteq \mathfrak{p}$ and thus $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{p}$ for some i, as $\mathfrak{p}$ is prime. Sufficiency: Let $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_n$. If A is to be open for a topology on A_S compatible with its ring structure and inducing on A its natural topology, $\{\mathfrak{m}^s\}_{s \geq 1}$ must be a fundamental system of neighborhoods of zero in A_S. Thus, if such a topology exists, it is unique. To show that $\{\mathfrak{m}^s\}_{s \geq 1}$ is indeed a fundamental system of neighborhoods of zero for a compatible topology on A_S, it suffices to show that for any $a \in A$, $b \in S$, and any $n \geqq 1$, there exists $s \geqq 1$ such that $(a/b)\mathfrak{m}^s \subseteq \mathfrak{m}^n$. Let $Ab = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k$ be a primary decomposition of ideal Ab, and let $\mathfrak{p}_i$ be the radical of $\mathfrak{q}_i$. As each $\mathfrak{p}_i$ is maximal, $\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_k \supseteq \mathfrak{m}$. As $\mathfrak{m}$ is contained in the radical of Ab, for some $r \geqq 1$ we have $\mathfrak{m}^r \subseteq Ab$ [10, p. 200], whence Ab is open and $\mathfrak{m}^{r+n} \subseteq \mathfrak{m}^n(Ab)$. Let $s = r + n$, and suppose $x \in \mathfrak{m}^s \subseteq \mathfrak{m}^n(Ab)$. Then $x = \sum y_i t_i b$ where $y_i \in \mathfrak{m}^n$, $t_i \in A$. Hence $(a/b)x = \sum y_i t_i a \in \mathfrak{m}^n$. Assume now such a topology exists; we shall prove that the set of invertible elements in A_S is open and that $x \to x^{-1}$ is continuous on that set. We may assume S contains the set G of all invertible elements of A, for $S \cdot G$ is a semigroup containing S, and $A_{S \cdot G} = A_S$. We first show that for $a \in S$, the invertible elements of A_S form a neighborhood of a and $x \to x^{-1}$ is continuous at a: Let $H = \{h \geqq 0$: for every n-tuple $(p_1, \ldots, p_n)$ of non-negative integers such that $p_1 + \cdots + p_n = h$, $a \notin \mathfrak{m}_1^{p_1} \ldots \mathfrak{m}_n^{p_n}\}$ (we define $\mathfrak{m}_i^0$ to be A, of course). Suppose $H = \theta$. Then for every $h \geqq 0$ there exist $p_{h,1}, \ldots, p_{h,n}$ such that $p_{h,1} + \cdots + p_{h,n} = h$ and $a \in \mathfrak{m}_1^{p_{h,1}} \ldots \mathfrak{m}_n^{p_{h,n}}$. Then for some k, $\{p_{h,k}\}_{h \geq 1}$ is unbounded, whence $a \in \bigcap_{p \geq 1} \mathfrak{m}_k^p$. By the Intersection Theorem [8, Theorem 1, p. 49] $a = ca$ for some $c \in \mathfrak{m}_k$. As $c \in \mathfrak{m}_k$, $c \neq 1$, so a is a zero-divisor, a contradiction of our assumption $a \in S$. Thus $H \neq \theta$. Let k be the smallest integer in H. Clearly $k > 0$, and by definition of H there exist $t_1, \ldots, t_n$ such that $t_1 + \cdots + t_n + 1 = k$ and $a \in \mathfrak{m}_1^{t_1} \ldots \mathfrak{m}_n^{t_n}$. Now $a^2 \in S$, so as we saw above, Aa^2 is open. Let r be such that $\mathfrak{m}^r \subseteq Aa^2$. Given n, let $s = \max\{r + n, t_1 + 1, \ldots, t_n + 1\}$. We shall show that $x - a \in \mathfrak{m}^s$ implies x is invertible in A_S and $a^{-1} - x^{-1} \in \mathfrak{m}^n$. Suppose $x - a \in \mathfrak{m}^s$. Then $x - a \in \mathfrak{m}^s \subseteq \mathfrak{m}^r \subseteq Aa^2 \subseteq Aa$, so $x \in Aa$. Let $x = za$, $z \in A$. If for some i, $z \in \mathfrak{m}_i$, then $x = za \in \mathfrak{m}_1^{t_1} \ldots \mathfrak{m}_i^{t_i+1} \ldots \mathfrak{m}_n^{t_n}$ and $x - a \in \mathfrak{m}^s \subseteq \mathfrak{m}_1^{t_1+1} \ldots \mathfrak{m}_n^{t_n+1}$, so $a = x - (x - a) \in \mathfrak{m}_1^{t_1} \ldots \mathfrak{m}_i^{t_i+1} \ldots \mathfrak{m}_n^{t_n}$ and $t_1 + \cdots + (t_i + 1) + \cdots + t_n = k$, a contradiction. Hence z does not belong to any maximal ideal of A, so z is invertible in A; further, as $a \in S$, $x = za$ is invertible in A_S. As $x - a \in \mathfrak{m}^{r+n} \subseteq \mathfrak{m}^n \cdot (Aa^2)$, $x - a = \sum y_i t_i a^2$ where $y_i \in \mathfrak{m}^n$, $t_i \in A$. Therefore $a^{-1} - x^{-1} = (x - a)a^{-2}z^{-1} = \sum y_i t_i z^{-1} \in \mathfrak{m}^n$. For the general case, let $a = b/c$ where $b, c \in S$. Given n, let s be such that $x - b \in \mathfrak{m}^s$ implies x is invertible in A_S and $b^{-1} - x^{-1} \in \mathfrak{m}^n$. Then if $y - a \in \mathfrak{m}^s$, we have $c(y - a) = cy - b \in c\mathfrak{m}^s \subseteq \mathfrak{m}^s$, whence cy is

invertible in A_S and $(ca)^{-1}-(cy)^{-1}\in \mathfrak{m}^n$; therefore $y=c^{-1}(cy)$ is invertible in A_S and $a^{-1}-y^{-1}=c((ca)^{-1}-(cy)^{-1})\in c\mathfrak{m}^n\subseteq \mathfrak{m}^n$. Thus the set of elements invertible in A_S is a neighborhood of a, and $x\to x^{-1}$ is continuous at a.

Corollary. *Let A be a semi-local domain of integrity, K its field of fractions. There is a topology on K which is compatible with its field structure, inducing on A its natural topology, and for which A is an open set if and only if every prime ideal in A other than A or $\{0\}$ is maximal.*

The *dimension* of a local domain is the length of the longest possible ascending chain of non-zero proper prime ideals [8, p. 57, 63]. By the Corollary, the topology of a local domain A can be extended to its field of quotients K so that A is open in K if and only if $\dim A\leqq 1$.

Theorem 9. *Let A be a topological noetherian integral domain. A is a compact open subring of a locally compact field if and only if A is a complete local ring of dimension $\leqq 1$ whose residue field is finite.*

Proof. Necessity: Let $K'\subseteq K$ be the field of fractions of A. As A is a compact open set in K', K' is locally compact. Therefore the properties of A follow from Theorems 1 and 7 and the preceding remark. The condition is also sufficient for the same reasons.

In the following section we shall see that there are compact noetherian domains of arbitrarily high dimension.

4. Formal Power Series Rings

Throughout, A is a commutative ring with identity. If $\mathfrak{a}$ is an ideal in A, we denote by $\mathfrak{a}_p$ the ideal in $A[[X_1,\ldots,X_p]]$, the ring of formal power series in p variables over A, consisting of all power series whose constant terms belong to $\mathfrak{a}$ (we identify A with the constant terms of $A[[X_1,\ldots,X_p]]$).

Lemma 7. *Let $B=A[[X_1,\ldots,X_p]]$. (1) For any ideal $\mathfrak{a}$ of A, $A/\mathfrak{a}$ is isomorphic to $B/\mathfrak{a}_p$. (2) $\mathfrak{m}\to\mathfrak{m}_p$ is a one-to-one mapping of the set of maximal ideals in A onto the set of maximal ideals in B. (3) For any ideal $\mathfrak{a}$ in A and any $s\geqq 1$, $\mathfrak{a}_p^s$ is the set of power series the coefficients of whose terms of total degree k belong to $\mathfrak{a}^{s-k}$ for $0\leqq k\leqq s-1$. (4) A is noetherian [local, semi-local] if and only if B is.*

Proof. (1) is obvious, and (3) is proved by an easy inductive argument. (2) The constant terms of any proper ideal $\mathfrak{b}$ in B form a proper ideal in A, for if 1 were the constant term of power series $u\in\mathfrak{b}$, u would be invertible [1, Proposition 4, p. 59]. Consequently, if $\mathfrak{m}$ is maximal, so is $\mathfrak{m}_p$, and every proper ideal of B is contained in some $\mathfrak{m}_p$. (4) A well-known theorem asserts that if A is noetherian, so is B [5, Lemma 8, p. 696; 8, Theorem 3, p. 89]. Conversely, if $\mathfrak{a}_1\subseteq\mathfrak{a}_2\subseteq\cdots$ is an ascending chain of ideals in A, $\mathfrak{a}_{1,p}\subseteq\mathfrak{a}_{2,p}\subseteq\cdots$ is an ascending chain in B, and $\mathfrak{a}_{i,p}=\mathfrak{a}_{j,p}$ implies $\mathfrak{a}_i=\mathfrak{a}_j$. By (2), B is local [semi-local] if and only if A is.

Theorem 10. *Let A be a semi-local ring, let $B=A[[X_1,\ldots,X_p]]$, and let both rings be equipped with their natural topologies. (1) The topology induced on A as a subset of B is the natural topology of A. (2) A is closed in B. (3) B is complete if and only if A is complete.*

Proof. Let $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ be the maximal ideals of A; by Lemma 7, $\mathfrak{m}_{1,p}, \ldots, \mathfrak{m}_{n,p}$ are the maximal ideals of B. Clearly $(\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_n)_p \supseteq \mathfrak{m}_{1,p} \ldots \mathfrak{m}_{n,p}$, so $(\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_n)_p^s$ is a neighborhood of zero in B for all $s \geqq 1$. On the other hand, it is easy to see by (3) of Lemma 7 that $\mathfrak{m}_{1,p} \ldots \mathfrak{m}_{n,p} \supseteq (\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_n)_p^n$, whence $(\mathfrak{m}_{1,p} \ldots \mathfrak{m}_{n,p})^s \supseteq (\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_n)_p^{ns}$ for all $s \geqq 1$. Therefore, if $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_n$, then $(\mathfrak{m}_p^s)_{s \geqq 1}$ is a fundamental system of neighborhoods of zero for the natural topology of B. (1) As $\mathfrak{m}_p^s \cap A = \mathfrak{m}^s$, B induces on A the natural topology of A. Next, let $u = \sum \alpha_{n_1 \ldots n_p} X_1^{n_1} \ldots X_p^{n_p}$ and $v = \sum \beta_{n_1 \ldots n_p} X_1^{n_1} \ldots X_p^{n_p}$. To prove (2) and (3) we make the following observation, a consequence of (3) of Lemma 7: Given r and k, if $m_1 + \cdots + m_p = r$, then $v - u \in \mathfrak{m}_p^{k+r}$ implies $\beta_{m_1 \ldots m_p} - \alpha_{m_1 \ldots m_p} \in \mathfrak{m}^k$. (2) We shall show that the set of non-constant power series is open. Let $u = \sum \alpha_{n_1 \ldots n_p} X_1^{n_1} \ldots X_p^{n_p}$ be such that $\alpha_{m_1 \ldots m_p} \neq 0$ where $m_1 + \cdots + m_p = r > 0$. Let k be such that $\alpha_{m_1 \ldots m_p} \notin \mathfrak{m}^k$. Then for all $v \in u + \mathfrak{m}_p^{k+r}$, v is not a constant power series by the preceding observation. Hence A is closed. (3) As A is closed in B, the condition is necessary. Sufficiency: Let $(u_j)_{j \geqq 1}$ be a Cauchy sequence in B, where $u_j = \sum \alpha_{j; n_1 \ldots n_p} X_1^{n_1} \ldots X_p^{n_p}$. Given $(m_1, \ldots, m_p)$ and k, let $r = m_1 + \cdots + m_p$; then if $h \geqq j_0$ and $i \geqq j_0$ imply $u_h - u_i \in \mathfrak{m}^{k+r}$, we infer from the preceding observation that $h \geqq j_0$ and $i \geqq j_0$ imply $\alpha_{h; m_1 \ldots m_p} - \alpha_{i; m_1 \ldots m_p} \in \mathfrak{m}^k$. Hence for each $(m_1, \ldots, m_p)$, the sequence $(\alpha_{j; m_1 \ldots m_p})_{j \geqq 1}$ is Cauchy in A. Let $\beta_{m_1 \ldots m_p} = \lim \alpha_{j; m_1 \ldots m_p}$, and let $u = \sum \beta_{n_1 \ldots n_p} X_1^{n_1} \ldots X_p^{n_p}$. Given s, let j_0 be such that $h \geqq j_0$ implies $\alpha_{h; m_1 \ldots m_p} - \beta_{m_1 \ldots m_p} \in \mathfrak{m}^s$ for all $(m_1, \ldots, m_p)$ such that $m_1 + \cdots + m_p < s$. Then by (3) of Lemma 7, $h \geqq j_0$ implies $u_h - u \in \mathfrak{m}_p^s$. Thus $\lim u_h = u$.

Theorem 11. *Let A be a semi-local ring, let $B = A[[X_1, \ldots, X_p]]$, and let both rings be equipped with their natural topologies. B is compact [totally bounded, separable] if and only if A is.*

Proof. The assertion follows from Theorem 7, (1) and (2) of Lemma 7, and (3) of Theorem 10.

If A is any commutative ring with identity, one may define a topology on $B = A[[X_1, \ldots, X_p]]$ which makes B a topological ring by taking $(\mathfrak{a}_n)_{n \geqq 1}$ as a fundamental system of neighborhoods of zero, where $\mathfrak{a}_n$ is the ideal of all power series of order $\geqq n$ [1, p. 65]. This topology we shall call the *power series topology* on B. With the power series topology, B is a complete metrizable ring.

Theorem 12. *Let $B = A[[X_1, \ldots, X_p]]$ be equipped with the power series topology.* (1) *The following are equivalent:* (a) *B is compact*; (b) *B is locally compact*; (c) *A is finite.* (2) *B is separable if and only if A is countable.*

Proof. Let $\mathfrak{a}_n$ be the ideal of power series of order $\geqq n$. $\mathfrak{a}_n$ is both open and closed. (1) We show first (b) implies (c). As B is locally compact, $\mathfrak{a}_n$ is compact for some n. For $u \in B$ let u_k be the homogeneous part of degree k of u. The mapping $\sum_{k \geqq n} u_k \to u_n$ is a homomorphism of the additive group $\mathfrak{a}_n$ onto the additive group of homogeneous polynomials of degree n, and its kernel is clearly $\mathfrak{a}_{n+1}$. Thus if A were infinite, $\mathfrak{a}_n/\mathfrak{a}_{n+1}$ would be infinite, and thus $\mathfrak{a}_n$ would be the union of an infinite family of mutually disjoint open sets (the cosets in $\mathfrak{a}_n$ of $\mathfrak{a}_{n+1}$), contradicting the compactness of $\mathfrak{a}_n$. Therefore A is finite.

(c) implies (a): As B is complete, it suffices to show B is totally bounded. For any n, the additive group $B/\mathfrak{a}_n$ is clearly isomorphic to the additive group of polynomials of degree $\leq n-1$, a finite group as A is finite. Thus for any n, B is the union of finitely many cosets of $\mathfrak{a}_n$, so B is totally bounded. (2) Necessity. The power series topology of B induces on A the discrete topology. Hence as B is separable, A is a separable discrete space and so is countable. Sufficiency: As in (1), $B/\mathfrak{a}_n$ is countable for all $n \geq 1$. The collection of all the cosets of all $\mathfrak{a}_n$ for $n \geq 1$ is a base for the open sets of B; as this collection is countable, B is separable.

Theorem 13. *Let A be a semi-local ring, let $\mathfrak{m}$ be the product of its maximal ideals, and let $B = A[[X_1, \ldots, X_p]]$. The natural topology of B is weaker than the power series topology of B. The two topologies coincide if and only if $\mathfrak{m}$ is a nilpotent ideal; in particular, they coincide if A is a field.*

Proof. By (3) of Lemma 7, $\mathfrak{m}_p^n \supseteq \mathfrak{a}_n$, from which the first assertion follows. If the two topologies coincide, the natural topology of A is discrete, i.e., $\mathfrak{m}^s = \{0\}$ for some $s \geq 1$. Conversely, if $\mathfrak{m}^s = \{0\}$, then $\mathfrak{a}_n \supseteq \mathfrak{m}_p^{n+s}$ for all n by (3) of Lemma 7, so the power series topology is weaker than the natural topology.

If $\mathfrak{k}$ is a finite field, the natural and formal power series topologies on $A_n = \mathfrak{k}[[X_1, \ldots, X_n]]$ coincide and convert A_n into a compact noetherian integral domain (Theorems 12 and 13). By [8, Theorem 4, p. 72], the dimension of A_n is n. Hence by Theorem 9, there is a topology on the field of fractions of A_n, compatible with its field structure, inducing on A its natural topology, and for which A_n is open, if and only if $n = 1$.

I. S. Cohen [6, p. 79] defines a v-ring to be the valuation ring of a complete topological field whose topology is given by an integer-valued valuation (every field is a v-ring, for its discrete topology is defined by the trivial valuation). In our discussion following Theorem 2, we saw that the compact v-rings are precisely the compact principal ideal domains. Cohen's fundamental structure theorems [6, Theorems 9 and 12] may be combined as follows: Let A be a complete local ring, $\mathfrak{k}$ its residue field, p the number of elements in a minimal set of generators for its maximal ideal. Then A is a homomorphic image of $B[[X_1, \ldots, X_p]]$ where B is a v-ring whose residue field is $\mathfrak{k}$ and which, if A and $\mathfrak{k}$ have the same characteristic, is $\mathfrak{k}$ itself. Specializing this theorem to compact local rings, we obtain:

Theorem 14. *Let A be a compact local ring, $\mathfrak{k}$ its residue field, p the number of elements in a minimal set of generators for its maximal ideal. Then A is isomorphic as a topological ring to $B[[X_1, \ldots, X_p]]/\mathfrak{a}$, equipped with its natural topology, where $\mathfrak{a}$ is an ideal in $B[[X_1, \ldots, X_p]]$, and where B is a compact principal ideal domain whose residue field is $\mathfrak{k}$ and which, if A and $\mathfrak{k}$ have the same characteristic, is the finite field $\mathfrak{k}$ itself. Conversely, if B is a compact principal ideal domain, $B[[X_1, \ldots, X_p]]/\mathfrak{a}$, equipped with its natural topology, is a compact local ring for any proper ideal $\mathfrak{a}$ of $B[[X_1, \ldots, X_p]]$.*

Proof. If A is compact, then $\mathfrak{k}$ is a finite field by Lemma 3, whence, as the v-ring B of Cohen's theorem is complete, B is also compact by (1) of Theorem 7. The first assertion therefore follows from Cohen's theorem, for the topology of

a compact local ring is its natural topology (Theorem 4), and any algebraic isomorphism between two local rings is clearly a homeomorphism when they are naturally topologized. Conversely, if B is a compact principal ideal domain, $B[[X_1, \ldots, X_p]]$, equipped with its natural topology, is a compact local ring (Theorem 11). Any proper ideal $\mathfrak{a}$ in $B[[X_1, \ldots, X_p]]$ is therefore closed (Lemma 2), so $B[[X_1, \ldots, X_p]]/\mathfrak{a}$ is a Hausdorff and hence a compact local ring; thus the quotient topology of $B[[X_1, \ldots, X_p]]/\mathfrak{a}$ is its natural topology (Theorem 4).

Bibliography

[1] Bourbaki, N.: Algèbre, Chap. IV—V, Act. sci. ind. 1102. Paris 1950.

[2] Bourbaki, N.: Topologie générale, Chap. I—II, Act. sci. ind. 858—1142. Paris 1951.

[3] Bourbaki, N.: Topologie générale, Chap. III—IV, Act. sci. ind. 916—1143. Paris 1951.

[4] Bourbaki, N.: Topologie générale, Chap. IX, Act. sci. ind. 1045. Paris 1958.

[5] Chevalley, C.: On the local theory of rings. Ann. Math. **44**, 690—708 (1943).

[6] Cohen, I. S.: On the structure and ideal theory of complete local rings. Trans. Amer. Math. Soc. **59**, 54—106 (1946).

[7] Kaplansky, I.: Topological rings. Amer. J. Math. **69**, 153—183 (1947).

[8] Northcott, D. G.: Ideal theory. Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics no. 42. London 1953.

[9] Warner, S.: Characters of Cartesian products of algebras. Can. J. Math. **11**, 70—79 (1959).

[10] Zariski, O., and P. Samuel: Commutative algebra. Vol. 1. Princeton 1958.

(Received March 12, 1960)

ABHYANKAR, S.
Math. Annalen 141, 171—192 (1960)

Concepts of order and rank on a complex space, and a condition for normality

By

SHREERAM ABHYANKAR*) in Baltimore, Maryland

§ 1. Introduction

K. OKA has proved a lemma to the effect that if a complex space X is a hypersurface in a domain in a complex number space then X is normal if and only if the singular locus of X is of dimension at least two less than the dimension of X[1]). We generalize this from the hypersurface case to the case of a complete intersection (12.3); we do not presuppose the hypersurface case which then follows as a corollary. Contrary to Oka's, our proof is relatively algebraic. For an analytic set V in any complex space X and a point p of V at which V is irreducible, we introduce the quotient ring $R(p, V, X)$ of V on X at p. By means of this local ring, for a finite set A of holomorphic functions on X we introduce the concept of $\mathrm{rnk}_{p,V,X} A$ (§ 6) and show that it is upper semicontinuous on V (7.2). We also show that if V is not contained in the singular locus of X at p then $R(p, V, X)$ is a regular local ring (9.2). Together with some purely algebraic properties of local rings, these two results then yield the said generalization of Oka's lemma[1a]). In § 12 we also make some other incidental remarks on complete intersections in analytic geometry (12.4) and algebraic geometry (12.5).

It seemed to us of interest to study this concept of rank further than was necessary for the above two purposes and also to study related concepts of order and embedding dimension. In this connection we prove that if V is irreducible then the "rank" and "embedding dimension" remain invariant as p varies on V (11.1, 11.2); and under the additional assumption that V is not contained in the singular locus of X, so does "order" (11.3). We also show that V is not contained in the singular locus of X, if and only if, $R(p, V, X)$ is regular

---

*) This work was supported in part by an Alfred P. Sloan Foundation Research Fellowship.

1) Lemma 1 on page 261 in: K. OKA, "Sur les fonctions analytique de plusieurs variables VIII", J. Math. Soc. (Japan) 3, (1951). In the proof of this lemma, Oka uses H. Cartan's theorem on three annuli.

1a) After this paper was written, it was brought to my attention that W. THIMM has, in the following two recent papers in these Annalen, given a proof of this generalization of Oka's lemma by an entirely different method than ours: „Über Moduln und Ideale von holomorphen Funktionen mehrerer Variablen", vol. 139, pp. 1—13 (1959); and „Untersuchungen über das Spurproblem von holomorphen Funktionen auf analytischen Mengen", vol. 139, pp. 95—114 (1959).

for any $p \in V$ (9.3). As an application of (9.3), in (9.4) we give alternative proofs of the known results to the effect that the singular locus of a complex space is analytic and for a normal space it is at least of codimension two. Further questions are discussed in (10.2) and § 11. In general we have been motivated by corresponding situations in algebraic geometry.

Since our results deal with analytic geometry, to make the paper easily understandable to an interested reader, in § 2, § 3 and § 4 we have spelled out rather explicitly some elementary algebraic observations concerning local rings. Also we have tried to separate out the material necessary for the proof of the generalization of Oka's lemma; this material is: the preliminary sections § 2 to § 6 omitting all reference to "order" and then 7.2, 9.1, 9.2, and § 12.

In an Appendix (§ 13) we shall give an elementary proof (without using homological algebra) of the regularity of quotient rings of (formal or *convergent*) power series rings over an (respectively: abstract or *complete nondiscrete valued*) perfect infinite field.

My thanks are due to Professor R. Remmert and Professor J. P. Serre for valuable discussions.

§ 2. Algebraic conventions and notations

By a ring we shall always mean a commutative ring with identity. By a proper ideal we shall mean an ideal different from the unit ideal. By an integral domain we shall mean a ring without zero divisors. By a local ring R we shall mean a noetherian ring having a unique maximal ideal M; we shall express this by saying that (R, M) is a local ring; a set of generators of M (as an ideal in R) from which no element can be omitted will be called a minimal set of generators of M. For a nonempty set A in a ring H, we shall denote by AH the ideal in H generated by A. A ring, which is integrally closed in its total quotient ring, will be said to be normal. We note that if a local ring is normal then it is an integral domain.

In the rest of this section, H will denote a noetherian ring. For a proper prime ideal P in H, by definition

$$\dim_H P = \max e \text{ such that there exist distinct prime ideals}$$
$$P_0, \ldots, P_e \text{ in } H \quad \text{for which} \quad P \subset P_0 \subset P_1 \cdots \subset P_e$$

and

$$\operatorname{dimdft}_H P = \max e \text{ such that there exist distinct prime ideals}$$
$$P_0, \ldots, P_e \text{ in } H \quad \text{for which} \quad P_0 \subset P_1 \subset \cdots P_e \subset P\text{[2]}).$$

For a proper ideal A in H, a normal decomposition of A (in H) is a decomposition $A = Q_1 \cap \cdots \cap Q_h$ from which no Q_i can be omitted and where $Q_1, \ldots, Q_h$ are primary ideals in H whose associated prime ideals $P_1, \ldots, P_h$ are all

[2]) dimdft = dimensiondefect. This is Krull's original term and is sometimes called the "rank". We prefer to use Krull's original term partly because we wish to reserve the term "rank" for a different concept (§ 3) which is related to the usual notion of "Jacobian rank" (see proof of 9.3).

distinct; $P_1, \ldots, P_h$ are uniquely determined by A and they will be called the associated prime ideals of A; each P_i which is not contained in any P_j $(j \neq i)$ is called an associated minimal prime ideal of A; furthermore by definition

$$\dim_H A = \max \dim_H P_i \quad \text{and} \quad \operatorname{dimdft}_H A = \min \operatorname{dimdft}_H P_i\,;$$

note that

$$\dim_H A = \max e \text{ such that there exist distinct prime ideals}$$
$$P_0, \ldots, P_e \text{ in } H \quad \text{for which} \quad A \subset P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_e\,.$$

For a local ring (R, M), by definition

$$\dim R = \operatorname{dimdft}_R M = \dim_R \{0\}\,;$$

observe that for any proper ideal A in R we have

(2.1) $\dim R/A = \dim_R A$.

Let P be a proper prime ideal in H. Let $\{0\} = Q_1 \cap \cdots \cap Q_k$ be a normal decomposition of $\{0\}$, labelled so that for the associated prime ideals $P_1, \ldots, P_k$ of $Q_1, \ldots, Q_k$ we have $P \supset P_j$ for $j = 1, \ldots, h$ and $P \not\supset P_j$ for $j = h+1, \ldots, k$. Then $Q_1 \cap \cdots \cap Q_h$ depends only on P. *$Q_1 \cap \cdots \cap Q_h$ will be called the isolated P-component of $\{0\}$ in H and will be denoted by $J[P]$*[3]. Let f be the natural epimorphism $H \to \mathfrak{H} = H/J[P]$. Then the complement of $f(P)$ in $\mathfrak{H}$ is multiplicatively closed and contains no zerodivisor of $\mathfrak{H}$, and hence we can consider the ring of all elements of the total ring of quotients of $\mathfrak{H}$ which can be written as $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ with $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{H}$, $\mathfrak{b} \notin f(P)$. This ring will be called the quotient ring of H with respect to P and will be denoted by H_P. *For any nonempty subset B of H we shall sometimes write BH_P for $f(B)H_P$.* Note that (H_P, PH_P) is a local ring[4]).

Again let P be a proper prime ideal in H and let A be an ideal in H contained in P. Let $R = H_P$, $R^* = R/AR$, $\overline{H} = H/A$, $\overline{P} = P/A$, $\overline{R} = \overline{H}_{\overline{P}}$. Let $f: H \to \mathfrak{H} = H/J[P]$, $g: R \to R^*$, $h: H \to \overline{H}$, $\bar{f}: \overline{H} \to \overline{\mathfrak{H}} = \overline{H}/J[\overline{P}]$ be natural epimorphisms. *Define $F: R^* \to \overline{R}$ as follows:* Let $\mathfrak{a}^* \in R^*$ be given. Take $\mathfrak{a} \in R$ such that $g(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}^*$. We can write $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}/\mathfrak{c}$ with $\mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in \mathfrak{H}$, $\mathfrak{c} \notin f(P)$. Take $b, c \in H$ such that $f(b) = \mathfrak{b}$, $f(c) = \mathfrak{c}$. Then $c \notin P$. Hence $h(b), h(c) \in \overline{H}$, $h(c) \notin \overline{P}$. Therefore $\bar{f}h(b)/\bar{f}h(c) \in \overline{R}$. *Define $F(\mathfrak{a}^*) = \bar{f}h(b)/\bar{f}h(c)$.* Let $\mathfrak{a}_1 \in R$ such that $g(\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{a}^*$; let $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1 \in \mathfrak{H}$, $\mathfrak{c}_1 \notin f(P)$ such that $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}_1/\mathfrak{c}_1$; let $b_1, c_1 \in H$ such that $f(b_1) = \mathfrak{b}_1$, $f(c_1) = \mathfrak{c}_1$. Then $g(\mathfrak{a}) - g(\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{a}^* - \mathfrak{a}^* = 0$. Hence $(\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1 - \mathfrak{b}_1\mathfrak{c})/\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{a} - \mathfrak{a}_1 \in AR$. Also $A \subset P$ implies that $f(A) \subset f(P)$ and hence $AR \cap \mathfrak{H} = f(A)R \cap \mathfrak{H} = f(A)$. Therefore $\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1 - \mathfrak{b}_1\mathfrak{c} \in f(A)$, i.e., $bc_1 - b_1c \in A$. Hence $\bar{f}h(b)\bar{f}h(c_1) - \bar{f}h(b_1)\bar{f}h(c) = 0$. Also $\bar{f}h(c)$, $\bar{f}h(c_1) \notin \bar{f}(\overline{P})$ and hence $\bar{f}h(c)\bar{f}h(c_1) \notin \bar{f}(\overline{P})$. Therefore $\bar{f}h(b)/\bar{f}h(c) = \bar{f}h(b_1)\bar{f}h(c_1)$. *Thus $F(\mathfrak{a}^*)$ is uniquely determined by $\mathfrak{a}^*$.* Next, given $\bar{\mathfrak{u}} \in \overline{R}$, write $\bar{\mathfrak{u}} = \bar{\mathfrak{v}}/\bar{\mathfrak{w}}$ with $\bar{\mathfrak{v}}, \bar{\mathfrak{w}} \in \overline{\mathfrak{H}}$, $\bar{\mathfrak{w}} \notin \bar{f}(\overline{P})$. Take $\bar{v}, \bar{w} \in \overline{H}$ such that $\bar{f}(\bar{v}) = \bar{\mathfrak{v}}$, $\bar{f}(\bar{w}) = \bar{\mathfrak{w}}$. Then $\bar{w} \notin \overline{P}$. Take $u, v \in H$ such that $h(v) = \bar{v}$, $h(w) = \bar{w}$.

---

[3]) In the notation $J[P]$ we do not explicitly refer to the containing ring H since this will always be clear from the context.

[4]) For basic properties of quotient rings which we shall tacitly use, we refer to Chapter II in: D. G. Northcott, "Ideal Theory". Cambridge 1953.

Then $w \notin P$. Hence $g(f(v)/f(w)) \in R^*$. It is clear that $F\big(g(f(v)/f(w))\big) = \bar{u}$. *Therefore $g(f(v)/f(w))$ is uniquely determined by $\bar{u}$, and defining $\overline{F}(\bar{u}) = g(f(v)/f(w))$ we get $F\overline{F}$ = identity on $\overline{R}$.* Finally, it is easily verified that F is a homomorphism of R^* into $\overline{R}$. Thus we conclude with

(2.2) *F is an isomorphism of R^* onto $\overline{R}$, and $\overline{F} = F^{-1}$. F and $\overline{F}$ will be called natural isomorphisms.*

§ 3. Order and rank in local rings

Let (R, M) be a local ring. For any nonempty subset A of R *we define*

$$\operatorname{ord}_R A = \max e \quad \textit{such that} \quad A \subset M^e.$$

We note the following: $\operatorname{ord}_R AR = \operatorname{ord}_R A$; $\operatorname{ord}_R A = \infty$, if and only if, $A = \{0\}$; $\operatorname{ord}_R A = 0$, if and only if $A \not\subset M$.

Next, recall that in a natural way M/M^2 can be considered to be a (finite dimensional) vector space over the field R/M; its dimension will be called the *embedding dimension* of R and will be denoted by $\operatorname{emdim} R$. Recall the following.

(3.1) $\operatorname{emdim} R$ = *the number of elements in any minimal set of generators of M.*
$\geqq \dim R$.

By definition, R is regular, if and only if, $\operatorname{emdim} R = \dim R$.

(3.2) *If R is regular, if $u_1, \ldots, u_r$ is a minimal set of generators of M, if $x = \sum_{i_1+\cdots+i_r=e} a_{i_1\ldots i_r} u_1^{i_1} \cdots u_r^{i_r}$ where $a_{i_1\ldots i_r}$ are elements of R at least one of which is not in M, then* $\operatorname{ord}_R x = e$.

Now let A be any nonempty subset of M. Then $(AR + M^2)/M^2$ is a subspace of the above vector space and *we define*

$\operatorname{rnk}_R A$ = *the vector space dimension of the vector space $(AR + M^2)/M^2$ over R/M.* Note that

(3.3) $\operatorname{emdim} R = \operatorname{rnk}_R M$.

Now let $x_1, \ldots, x_f \in A \subset M$. In accordance with the usual situation in vector spaces, we introduce the following terminology. We shall say that $x_1, \ldots, x_f$ *are linearly independent* mod M^2, if and only if, $a_1x_1 + \cdots + a_fx_f \in M^2$ with $a_i \in R$ implies that $a_1, \ldots, a_f \in M$. We shall say that $x_1, \ldots, x_f$ *generate* A mod M^2, if and only if, for each $x \in A$ there exist $a_1, \ldots, a_f \in R$ such that $x - a_1x_1 - \cdots - a_fx_f \in M^2$. We shall say that $x_1, \ldots, x_f$ *form a basis* of A mod M^2, if and only if, they generate A mod M^2 and are linearly independent mod M^2. We observe the following.

(3.4) For any nonempty subset A of M we have the following. A set of elements in A generate A mod M^2, if and only if, they generate AR mod M^2. $\operatorname{rnk}_R A$ = maximum number of elements in A which are linearly independent mod M^2 = minimum number of elements in A which generate A mod M^2. If $\operatorname{rnk}_R A = e$ and if certain e elements in A are linearly independent mod M^2 then they generate A mod M^2. If $z_1, \ldots, z_h$ are elements in M which are linearly independent mod M^2 then there exist elements $z_1^*, \ldots, z_{h^*}^*$ in M such

that $z_1, \dots, z_h, z_1^*, \dots, z_{h^*}^*$ form a basis of $M \bmod M^2$. $\mathrm{rnk}_R A = 0$, if and only if, $\mathrm{ord}_R A > 1$.

Next, we prove the following.

(3.5) *Let A be an ideal in R with $A \subset M$. Then* $\mathrm{rnk}_R A = \mathrm{emdim}\, R - \mathrm{emdim}\, R/A$; *and if furthermore R is regular then* $\mathrm{rnk}_R A = \dim R - \mathrm{emdim}\, R/A \leqq \dim R - \dim R/A$.

Proof. Let $u_1, \dots, u_r$ be a basis of $A \bmod M^2$. We can find elements $v_1, \dots, v_s$ in M such that $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s$ form a basis of $M \bmod M^2$, i.e., they form a minimal set of generators of M. Let F be the canonical epimorphism $R \to \overline{R} = R/A$. It is clear that $F(v_1), \dots, F(v_s)$ generate $F(M)$ and hence we shall be through if we show that $F(v_1), \dots, F(v_s)$ are linearly independent $\bmod F(M)^2$. Let $\bar b_i, \bar b_{i_1 \dots i_s}$ be any elements in $\overline{R}$ such that

$$\sum_{i=1}^{s} \bar b_i F(v_i) = \sum_{i_1 + \dots + i_s = 2} \bar b_{i_1 \dots i_s} F(v_1)^{i_1} \cdots F(v_s)^{i_s}.$$

Fix elements $b_i, b_{i_1 \dots i_s}$ in R such that $F(b_i) = \bar b_i$ and $F(b_{i_1 \dots i_s}) = \bar b_{i_1 \dots i_s}$, and let

$$w = \sum_{i=1}^{s} b_i F(V_i) - \sum_{i_1 + \dots + i_s = 2} b_{i_1 \dots i_s} v_1^{i_1} \cdots v_s^{i_s}.$$

Then $w \in A$. Since $u_1, \dots, u_r$ form a basis $A \bmod M^2$, we can find elements $a_1, \dots, a_r$ in R such that $w - a_1 u_1 - \dots - a_r u_r \in M^2$. Consequently, $-a_1 u_1 - \dots - a_r u_r + b_1 v_1 + \dots + b_s v_s \in M^2$. Since $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s$ are linearly independent $\bmod M^2$, all the elements a_i, b_i must be in M, and hence in particular $b_1, \dots, b_s \in M$ and therefore $\bar b_1, \dots, \bar b_s \in F(M)$. Thus $F(v_1), \dots, F(v_s)$ are linearly independent $\bmod F(M)^2$.

For the rest of this section let H be a noetherian ring, let P be a proper prime ideal in H, let $R = H_{\mathfrak{p}}$, and let $M = PR$. *For elements in H, the concepts of* ord_R, rnk_R, *and generators and linear dependence and basis* $\bmod M^2$ *are to be meant as for the images of these elements under the natural epimorphism* $H \to H/J[P]$. From the above observations and from elementary properties of quotient rings we deduce the following.

(3.6) *Let $w_1, \dots, w_t$ be a set of generators of P and let A be a nonempty subset of H. Then* $\mathrm{ord}_R A = \max e$ *such that: Given $x \in A$, there exists $a \in H$, $a \notin P$ for which $ax \in J[P] + P^e$, i.e.,*

$$ax = \alpha + \sum_{i_1 + \dots + i_t = e} a_{i_1 \dots i_t} w_1^{i_1} \cdots w_t^{i_t}; \quad \text{with } \alpha \in J[P],\ a_{i_1 \dots i_t} \in H.$$

(3.7) Elements $x_1, \dots, x_f$ in P are linearly independent $\bmod M^2$, if and only if: $a_1 x_1 + \dots + a_f x_f \in J[P] + P^2$ implies that $a_1, \dots, a_f \in P$.

(3.8) *Let $x_1, \dots, x_f \in A \subset P$. Then $x_1, \dots, x_f$ generate $A \bmod M^2$, if and only if: Given $x \in A$ there exist $\alpha \in J[P]$, $a \in H$, $a \notin P$, $a_i \in H$, $b \in P^2$ for which* $ax = \alpha + a_1 x_1 + \dots a_f x_f + b$.

§ 4. Further preliminaries on local rings

We shall use the following five (4.1 to 4.5) well known results[5]).

(4.1) *For any proper prime ideal P in the ring of convergent complex power series in N variables, the local ring R_P is regular.*

(4.2) Let R be a regular local ring and let A be a proper ideal in R such that A is generated by k elements and $\operatorname{dimdft}_R A = k$. Then for every associated prime ideal P of A we have $\operatorname{dimdft}_R P = k$.

(4.3) Let R be a regular local ring and let A be a proper ideal in R. Then $(\dim_R A) + (\operatorname{dimdft}_R A) = \dim R$.

(4.4) Let A be a proper ideal in a noetherian ring H such that A is generated by k elements. Then for every associated minimal prime ideal P of A we have $\operatorname{dimdft}_H P \leqq k$.

(4.5) A one dimensional local ring is regular, if and only if, it is a normal integral domain.

(4.6) *Let A be a proper ideal in a regular local ring R. Assume that A is an intersection of prime ideals, A is generated by k elements, and* $\dim S = (\dim R) - k$ *where $S = R/A$. Then for every nonunit nonzero-divisor a in S, each associated prime ideal of aS has* dimdft *one.*

Proof. Let F be the epimorphism $R \to S$. By (2.1, 4.3, 4.4), the assumptions on A imply that $A = P_1 \cap \cdots \cap P_h$ is a normal decomposition of A where $P_1, \ldots, P_h$ are distinct prime ideals such that $\operatorname{dimdft}_R P_j = k$ for $j = 1, \ldots, h$. From this we deduce that $F(P_1), \ldots, F(P_h)$ are exactly all the prime ideals in S having dimdft zero, $\{0\} = F(P_1) \cap \cdots \cap F(P_h)$ is the (unique) normal decomposition of $\{0\}$ and $F(P_1) \cup \cdots \cup F(P_h)$ is the set of all zero-divisors in S. Fix $b \in F^{-1}(a)$ and let $B = (A, b)R$. Since a is a nonunit nonzerodivisor in S we get $B \neq R$ and $B \not\subset P_j$ for $j = 1, \ldots, h$. Let $B = Q_1^* \cap \cdots \cap Q_t^*$ be a normal decomposition of B and let P_i^* be the prime ideal of Q_i^*. Since $A \subset B \not\subset P_j$ for $j = 1, \ldots, h$, we get $\operatorname{dimdft}_R P_i^* \geqq k + 1$ for $i = 1, \ldots, t$, and hence $\operatorname{dimdft}_R B \geqq k + 1$. Since B is generated by $k + 1$ elements, (4.4) yields that $\operatorname{dimdft}_R B = k + 1$ and then (4.2) yields that $\operatorname{dimdft}_R P_i^* = k + 1$ for $i = 1, \ldots, t$. Our assertion now follows by applying F.

(4.7) Let R be a noetherian integral domain (which is not a field) and let Z be the set of all proper prime ideals in R having dimdft one. Assume that for every nonzero nonunit a in R, each associated prime ideal of aR has dimdft one. Then $R = \bigcap_{P \in Z} R_P$.

[5]) For (4.2) see Theorem 21 on page 99 in: I. S. COHEN, "On the structure and ideal theory of complete local rings", Trans. Amer. Math. Soc. **59**, (1946); and also see Remark (13.14) in our Appendix. For (4.3) see Theorem 11 in: W. KRULL, „Dimensionstheorie in Stellenringe", Crelle J. **179**, (1938). For (4.4) and (4.5) see respectively Theorem 7 on page 60 and Theorem 8 on page 76 in: D. G. NORTHCOTT, "Ideal Theory". Cambridge 1953. (4.1) has been proved for an arbitrary regular local ring R by AUSLANDER, BUCHSBAUM, and SERRE, by using homological algebra; see Theorem 1.11 on page 396 in: M. AUSLANDER and D. A. BUCHSBAUM, "Homological dimension in local rings", Trans. Amer. Math. Soc. **85** (1957). In the special case of (formal or convergent) power series rings over a (respectively: abstract or complete nondiscrete valued) perfect infinite field, we shall, in our Appendix (§ 13), give a direct elementary proof (13.13). Note that (4.1) will not be used until § 8.

Proof. Let $S = \bigcap_{P \in Z} R_P$. It is clear that $R \subset S$. Now let $0 \neq a \in S$. Then $a = b/c$ with $b, c \in R$ and $b, c \neq 0$. By our assumption we have $cR = R \cap \cap Q_1 \cap \cdots \cap Q_h$ where $Q_1, \ldots, Q_h$ are primary ideals in R whose associated prime ideals are all distinct and have dimdft one, and $bR = R \cap Q'_1 \cap \cdots \cap Q'_{h'}$, where $Q'_1, \ldots, Q'_{h'}$ are primary ideals in R whose associated prime ideals $P'_1, \ldots, P'_{h'}$ are all distinct and have dimdft one.

Let i be any fixed integer with $1 \leq i \leq h$. Since $a \in S$, we have $a \in R_{P_i}$, i.e., $bR_{P_i} \subset cR_{P_i}$. Also $cR_{P_i} \neq R_{P_i}$ and hence $bR_{P_i} \neq R_{P_i}$. If P_i were different from P'_j for $j = 1, \ldots, h'$ then we would have the contradiction $bR_{P_i} = R_{P_i}$. Therefore P_i equals one and hence only one of the prime ideals $P'_1, \ldots, P'_{h'}$.

From the above paragraph it follows that we can relabel $Q'_1, \ldots, Q'_{h'}$ so that $P'_i = P_i$ for $i = 1, \ldots, h$. Then for $i = 1, \ldots, h$ we get: $Q'_i = R \cap bR_{P'_i} = R \cap bR_{P_i} \subset R \cap cR_{P_i} = Q_i$. Therefore $bR \subset cR$, i.e., $a \in R$.

(4.8) Let the assumption be as in (4.7) and assume further that for each P in Z, R_P is regular. Then R is normal.

Proof. Follows from (4.5, 4.7).

(4.9) *Let the assumptions be as in* (4.6). *Let* $\{0\} = N_1 \cap \cdots \cap N_h$ *be the (unique) normal decomposition of* $\{0\}$ *in* S. *Then each* N_i *is a prime ideal of* dimdft *zero. Assume that* S *is not an integral domain, i.e.,* $h > 1$. *Then there exist* $i \neq j$ *such that* $\operatorname{dimdft}_S(N_i + N_j) = 1$, *i.e., there exists a prime ideal* P *in* S *of* dimdft *one such that* $N_i + N_j \subset P$, *and hence* S_P *is not an integral domain.*

*Proof**). The first assertion is contained in the proof of (4.6). From the definition of S_P it follows that if $N_i + N_j \subset P$, then S_P is not an integral domain. Thus it is enough to prove that $h = 1$ under the assumption that *the quotient ring of* S *with respect to any prime ideal of* dimdft *one is an integral domain.*

Let K be the total quotient ring of S and let $N_i^* = N_i K$. Then $N_1^*, \ldots, N_h^*$ are exactly all the distinct prime ideals in K and they are all maximal (i.e., of dim zero). Since $N_1^* \not\subset N_j^*$ for any $j > 1$, there exists $a \in K$ such that $a \notin N_1^*$ and $a \in N_j^*$ for all $j > 1$. Since N_1^* is maximal, K/N_1^* is a field and hence there exists $b \in K$ such that $ab - 1 \in N_1^*$. Let $c = ab$. Then $c - 1 \in N_1^*$ and $c \in N_j^*$ for all $j > 1$. We can write $c = d/e$ with $d, e \in S$ where e is a nonzero-divisor in S. Now $N_j^* \cap S = N_j$ for any j. Hence $d - e \in N_1$ and $d \in N_j$ for all $j > 1$.

By (4.6), $eS = S \cap Q_1 \cap \cdots \cap Q_t$ where $Q_1, \ldots, Q_t$ are primary ideals whose prime ideals $P_1, \ldots, P_t$ are all distinct and have dimdft one. Fix any one of the ideals $Q_1, \ldots, Q_t$ and call it Q and let P be the corresponding prime ideal. We then get $(d - e)\, S_P \subset N_1 S_P$ and $d S_P \subset N_j S_P$ for all $j > 1$. By the above italicized assumption, exactly one of the ideals $N_1, \ldots, N_h$ is contained in P, say $N_g \subset P$, and then $N_g S_P = \{0\}$. Let F be the natural epimorphism $S \to \bar{S} = S/N_g \subset S_P$. If $g = 1$, then $F(d - e) = 0$ and hence $F(d) \subset F(eS)$; and if $g > 1$, then $F(d) = 0$ and again $F(d) \subset F(eS)$. Thus in any case, $F(d) \subset \subset F(eS) \subset eS_P$. Now $F^{-1}(eS_P \cap \bar{S}) = Q$ and hence $d \in Q$. Thus $d \in Q_1, \ldots, d \in Q_t$, i.e., $d \in eS$, i.e., there exists $u \in S$ such that $d = eu$. Now $d - e \in N_1$, $d \in N_j$

*) Due to Serre.

for all $j > 1$, e is a nonzerodivisor in S, and $N_1 \cup \cdots \cup N_h$ is the set of all zero divisors in S. From this we deduce that $u - 1 \in N_1$ and $u \in N_j$ for all $j > 1$. Since S is a local ring, $u - 1 \in N_1$ implies that $u - 1$ belongs to the maximal ideal in S, i.e., that u is a unit in S and hence u is a nonzerodivisor. Therefore we must have $h = 1$.

(4.10) *Let the assumption be as in* (4.6) *and assume further that for every proper prime ideal P in S having* dimdft *one, S_P is regular. Then S is a normal integral domain.*

Proof. Follows from (4.6, 4.8, 4.9).

§ 5. Analytic preliminaries

By a neighbourhood we shall always mean an open neighbourhood. By a domain we shall mean an open connected set. For an object A defined in a neighbourhood of a point p in a topological space, we shall denote the germ of A at p by $A_{(p)}$. By C^N we shall denote the N-dimensional complex number space. By a complex space we shall mean a complex space in the sense of SERRE[7]). By the dimension of a complex space we shall always mean the complex dimension.

Let X be a complex space, let p be a point of X, and let V be an analytic set in a neighbourhood of p in X. Recall that p is said to be a simple point of X, if and only if, some neighbourhood of p in X can be mapped biholomorphically onto a domain in C^N $(N = \dim X_{(p)})$; p is said to be a singular point of X if and only if p is not a simple point of X. We shall use the following notations.

$R(p, X)$ = the ring of holomorphic function germs on X at p.

$I(p, V, X) = I(p, V_{(p)}, X)$ = the ideal of elements in $R(p, X)$ which vanish on $V_{(p)}$.

$J[p, V, X] = J[p, V_{(p)}, X]$ = union of all those irreducible components of $X_{(p)}$ which contain $V_{(p)}$.

$S(X)$ = the set of singular points of X.

We shall say that $V_{(p)}$ *is simple for* $X_{(p)}$, if and only if, $V_{(p)} \not\subset S(X)_{(p)}$. Furthermore, if V is an analytic set in X then we shall say that V *is simple for* X or that V *is a simple subvariety of* X, if and only if, $V \not\subset S(X)$. Also we shall say that X is *normal at* p, or that $X_{(p)}$ is normal, if and only if, $R(p, X)$ is normal.

The following are noteworthy properties, which we shall use, of an analytic set V in a complex space X[8]).

(5.1) Let p be a point at which V is irreducible. Then $J[I(p, V, X)] = I(p, J[p, V, X], X)$. Next, there exists a neighbourhood X_1 of p in X such that $X_1 \cap V$ is irreducible and hence pure dimensional. Now let x be a holo-

[7]) See § 1 in: J. P. SERRE, «Géométrie algébrique et géométrie analytique», Ann. Inst. Four., VI, (1956).

[8]) (5.1, 5.2, 5.2a, 5.2b) readily follow from the results in: R. REMMERT and K. STEIN, „Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen", Math. Ann. **126**, 263—306 (1953). (5.2c, 5.2d, 5.4) are in H. CARTAN, «Séminaire», 1951—52, 1953—54. We shall not use (5.2c, 5.2d) until § 9 where in (9.4) they will be deduced as corollaries of (9.3).

morphic function on a neighbourhood X^* of p in X. If $x_{(p)} \in J[I(p, V, X)]$ then there exists a neighbourhood X_2 of p in X^* such that for each $q \in X_2 \cap V$ and for every irreducible component V' of $V_{(q)}$ we have $x_{(q)} \in J[I(q, V', X)]$. If $x_{(p)} \notin I(p, V, X)$ then there exists a neighbourhood X_3 of p in X^* such that for each $q \in X_3 \cap V$ and for every irreducible component V' of $V_{(q)}$ we have $x_{(q)} \notin I(q, V', X)$.

(5.2) $S(X)$ is closed and nowhere dense in X.

(5.2a) For any $p \in X$, $S(X)_{(p)}$ is contained in an analytic set germ in X at p other than $X_{(p)}$.

(5.2b) X is irreducible, if and only if, $X - S(X)$ is arcwise connected.

(5.2c) $S(X)$ is an analytic set in X.

(5.2d) If X is normal at a point p then $\dim S(X)_{(p)} \leqq (\dim X_{(p)}) - 2$.

(5.3) Assume that X is irreducible. For each p in X let $Y(p)$ be a neighbourhood of p in X, let p' and p^* be given points in X, and let X' and X^* be irreducible components of $X_{(p')}$ and $X_{(p^*)}$ respectively. Then there exists a finite number of points $p' = p_1, p_2, \ldots, p_n = p^*$ in X; a neighbourhood Z_i of p_i in $Y(p_i)$, and irreducible component X_i of Z_i; such that $p_i \in X_i$ and $X_{i(p_i)}$ is irreducible for $i = 1, \ldots, n$; $X_{1(p')} = X'$, $X_{n(p^*)} = X^*$; $p_{i+1} \in X_i$ for $i = 1, \ldots, n-2$; and $p_{n-1} \in X_n$.

Proof. By (5.1) there exists a neighbourhood Z' of p' in $Y(p')$ and an irreducible component $\overline{X}'$ of Z' such that $\overline{X}'_{(p')} = X'$; and a neighbourhood Z^* of p^* in $Y(p^*)$ and an irreduzible component of $\overline{X}^*$ of Z^*, such that $\overline{X}^*_{(p^*)} = X^*$. By (5.2), there exist simple points q' and q^* of X such that $q' \in \overline{X}'$ and $q^* \in \overline{X}^*$. By (5.2b) there exists an arc Q in $X - S(X)$ joining q' to q^*. Using the compactness of Q we can now show that there exist points $q' = p_2, p_3, \ldots, p_{n-1} = q^*$ on Q, and irreducible neighbourhood Z_i of p_i in $Y(p_i)$ for $i = 2, \ldots, n-1$ such that $p_{i+1} \in Z_i$ for $i = 2, \ldots, n-2$.

(5.4) (to be referred to as "coherence"). The sheaf with stalk $I(p, V, X)$ at each p in X is a coherent sheaf on X.

§ 6. Definition of order and rank on a complex space

Let p be a point in a complex space X and let V be an irreducible analytic set germ in X at p. *We define*

$R(p, V, X) =$ *quotient ring of* V *at* p *on* $X = R(p, X)_{I(p, V, X)}$.

$M(p, V, X) = I(p, V, X)\, R(p, V, X)$.

From (2.2) we get (6.1) and from other elementary considerations we get (6.2) below.

(6.1) *For any analytic set germ* W *in* X *at* p *containing* V, $R(p, V, W)$ *is isomorphic to* $R(p, V, X)/I(p, W, X)\, R(p, V, X)$.

(6.2) *If* B *is any ideal in* $R(p, X)$ *contained in* $I(p, V, X)$ *and by* W *we denote the zero set germ of* B, *then we have:* $\dim(R(p, V, X)/BR(p, V, X)) = \dim J[p, V, W] - \dim V$. In particular taking $B = \{0\}$ *we get* $\dim R(p, V, X) = \dim J[p, V, X] - \dim V$.

Now let A be a nonempty subset of $R(p, V, X)$. *We define*

$\operatorname{ord}_{p, V, X} A = \operatorname{ord}_{R(p, V, X)} A$;

and in case $A \subset M(p, V, X)$, we define

$$\operatorname{rnk}_{p, V, X} A = \operatorname{rnk}_{R(p, V, X)} A .$$

For an analytic set V^* in a neighbourhood of p in X such that $V^*_{(p)}$ is irreducible and for any nonempty set A^* of holomorphic functions on a neighbourhood of p in X we carry over all the above definitions to V^* and A^* by taking for them $V^*_{(p)}$ and $A^*_{(p)}$ respectively; thus for instance

$$\operatorname{ord}_{p, V^*, X} A^* = \operatorname{ord}_{p, V^*_{(p)}, X} A^* = \operatorname{ord}_{p, V^*_{(p)}, X} A^*_{(p)}.$$

In the rest of the paper X will denote a complex space and V will denote an analytic set in X.

§ 7. Semicontinuity of order and rank

Let p be a point of V at which V is irreducible and let $A = (x_1, \ldots, x_f)$ be a nonempty finite set of holomorphic functions on X.

(7.1) *(Lower semicontinuity of order). There exists a neighbourhood X^* of p in X such that for every point q in $X^* \cap V$ and every irreducible component V' of $V'_{(q)}$ we have* $\operatorname{ord}_{p, V, X} A \leqq \operatorname{ord}_{q, V', X} A$.

Proof. Let $\operatorname{ord}_{p, V, X} A = e$. For $e = \infty$ the assertion being trivial let us assume that $e < \infty$. We can find holomorphic functions $w_1, \ldots, w_t$ in a neighbourhood of p in X such that $(w_{1(p)}, \ldots, w_{t(p)}) R(p, X) = I(p, V, X)$. On some neighbourhood X_1 of p in X, $w_1, \ldots, w_t$ are holomorphic and vanish on $X_1 \cap V$. By (3.6), there exist holomorphic functions $\alpha_j, a_j, a_{j i_1 \cdots i_t}$ in a neighbourhood X_2 of p in X_1 such that $\alpha_{j(p)} \in J[I(p, V, X)]$, $a_{j(p)} \notin I(p, V, X)$ and

$$a_{j(p)} x_{j(p)} = \alpha + \sum_{i_1 + \cdots + i_t = e} a_{j i_1 \cdots i_t (p)} w^{i_1}_{1(p)} \ldots w^{i_t}_{t(p)} \quad \text{for} \quad j = 1, \ldots, f.$$

By (5.1) there exists a neighbourhood X_3 of p in X_2 such that for every q in $X_3 \cap V$ and for every irreducible component V' of $V_{(q)}$ we have $\alpha_{j(q)} \in J[I(q, V', X)]$ and $a_{j(q)} \notin I(q, V', X)$ for $j = 1, \ldots, f$. Finally, there exists a neighbourhood X^* of p in X_3 such that for every $q \in X^*$ the above equations hold with q replacing p; and now again invoke (3.6).

(7.2) *(upper semicontinuity of rank). Assume that $A_{(p)} \subset I(p, V, X)$. Then there exists a neighbourhood X^* of p in X such that for every q in $X^* \cap V$ and for every irreducible component V' of $V_{(q)}$ we have* $\operatorname{rnk}_{p, V, X} A \geqq \operatorname{rnk}_{q, V', X} A$.

Proof. We can relabel the element x_j so that $x_{1(p)}, \ldots, x_{e(p)}$ form a basis of $A_{(p)}$ mod $M(p, V, X)^2$. Let $w_1, \ldots, w_t$ be holomorphic functions on a neighbourhood X_1 of p in X such that $(w_{1(p)}, \ldots, w_{t(p)}) R(p, X) = I(p, V, X)$. By (3.8), there exist holomorphic functions $\alpha_j, a_j, a_{ji}, a_{j i_1 \cdots i_t}$ on a neighbourhood X_2 of p in X_1 such that $\alpha_{j(p)} \in J[I(p, V, X)]$, $a_{j(p)} \notin I(p, V, X)$ and

$$a_{j(p)} x_{j(p)} = \alpha_{j(p)} + \sum_{i=1}^{e} a_{j i(p)} x_{i(p)} + \sum_{i + \cdots + i_t = 2} a_{j i_1 \cdots i_t(p)} w^{i_1}_{1(p)} \ldots w^{i_t}_{t(p)} \text{ for } j = 1, \ldots, f.$$

By (5.1) there exists a neighbourhood X_3 of p in X_2 such that for every q in $X_3 \cap V$ and for every irreducible component V' of $V_{(q)}$ we have $\alpha_{j(q)} \in J[I(q, V', X)]$, $a_{j(q)} \notin I(q, V', X)$ for $j = 1, \ldots, f$. Finally, there exists

a neighbourhood X^* of p in X_3 such that for every $q \in X^*$ the above equations hold with q replacing p; and now again invoke (3.8).

§ 8. Continuity of rank and of embedding dimension

Let p be a point of V at which V is irreducible and let $A = (x_1, \ldots, x_f)$ be a nonempty finite set of holomorphic functions on X such that $A_{(p)} \subset I(p, V, X)$.

(8.1) *Let $u_1, \ldots, u_r$ be holomorphic functions in a neighbourhood X_1 of p in X such that $(u_{1(p)}, \ldots, u_{r(p)}) R(p, V, X) = M(p, V, X)$. Then there exists a neighbourhood X^* of p in X such that for every q in $X^* \cap V$ and for every irreducible component V' of $V_{(q)}$ we have $(u_{1(q)}, \ldots, u_{r(q)}) R(q, V', X) = M(q, V', X)$,* i.e., *$u_{1(q)}, \ldots, u_{r(q)}$ generate $M(q, V', X) \bmod M(q, V', X)^2$.*

Proof. By coherence (5.4), there exist holomorphic functions $v_1, \ldots, v_s$ on a neighbourhood X_2 of p in X_1 such that for every $q \in X_2 \cap V$ we have $(v_{1(q)}, \ldots, v_{s(q)}) R(q, X) = I(q, V, X)$. For any $q \in X_2 \cap V$ and for any irreducible component V' of $V_{(q)}$, denoting the irreducible components of $V_{(q)}$ other than V' by $V'_1, \ldots, V'_h$ we have $I(q, V, X) = I(q, V', X) \cap \cap I(q, V'_1, X) \cap \cdots \cap I(q, V'_h, X)$ and $I(q, V', X) \not\supset I(q, V'_i, X)$ for $i = 1, \ldots, h$; and hence $(v_{1(q)}, \ldots, v_{s(q)}) R(q, V', X) = M(q, V', X)$.

Since $v_{j(p)} \in I(p, V, X)$, there exist holomorphic functions α_j, a_j, a_{ji} in a neighbourhood X_3 of p in X_2 such that $\alpha_{j(p)} \in J[I(p, V, X)]$, $a_{j(p)} \notin I(p, V, X)$ and

$$a_{j(p)} v_{j(p)} = \alpha_{j(p)} + \sum_{i=1}^{r} a_{ji(p)} u_{i(p)} \quad \text{for} \quad j = 1, \ldots, s\,.$$

By (5.1) there exists a neighbourhood X_4 of p in X_3 such that for every q in $X_4 \cap V$ and for every irreducible component V' of $V_{(q)}$ we have $\alpha_{j(p)} \in \in J[I(q, V', X)]$, $a_{j(q)} \notin I(q, V', X)$ for $j = 1, \ldots, s$. Next, there exists a neighbourhood X_5 of p in X_4 such that for every $q \in X_5$ the above equations hold with q replacing p. Finally, there exists a neighbourhood X^* of p in X_5 such that $u_1, \ldots, u_r$ vanish on $X^* \cap V$. For every q in $X^* \cap V$ and for every irreducible component V' of $V_{(q)}$ we have

$$(u_{1(q)}, \ldots, u_{r(q)}) R(q, V', X) = (v_{1(q)}, \ldots, v_{s(q)}) R(q, V', X) = M(q, V', X)\,.$$

(8.2) *There exists a neighbourhood X^* of p in X such that for every $q \in X^* \cap V$ and for every irreducible component V' of $V_{(q)}$ we have:*

(i) $\operatorname{emdim} R(p, V, X)/A_{(p)} R(p, V, X) = \operatorname{emdim} R(q, V', X)/A_{(q)} R(q, V', X)$,

(ii) $\operatorname{emdim} R(p, V, X) = \operatorname{emdim} R(q, V', X)$ and

(iii) $\operatorname{rnk}_{p, V, X} A = \operatorname{rnk}_{q, V', X} A$.

Proof. (ii) follows from (i) by taking $A = \{0\}$; and then in view of (3.5), (iii) follows from (i) and (ii). Consequently, it is enough to prove (i).

Replacing X by a small enough neighbourhood of p in X we may assume that X is an analytic set in a domain D in C^N, and that x_j is the restriction to X of a holomorphic function $\bar{x}_j$ on D for $j = 1, \ldots, f$. By coherence (5.4),

there exist holomorphic functions $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_h$ on a neighbourhood D_1 of p in D such that for every $q \in D_1$, $(\bar{z}_{1(q)}, \ldots, \bar{z}_{h(q)}) R(q, D) = I(q, X, D)$. Let $\bar{A} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_f, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_h)$. For any $q \in D_1 \cap V$ and any irreducible component V' of $V_{(q)}$ consider

$$R(q, V', D) = R(q, D)_{I(q, V', D)} \xrightarrow{E} R(q, V', D)/I(q, X, D)\, R(q, V', D) \xrightarrow{F}$$
$$\rightarrow (R(q, D)/I(q, X, D))_{(I(q, V', D)/I(q, X, D))} \xrightarrow{G} R(q, V', X)$$

where E is the "residue class" epimorphism, F is the natural isomorphism described in (2.2), and G is the isomorphism obtained from the "restriction to X" isomorphism of $R(q, D)/I(q, X, D)$ onto $R(q, X)$. It is clear that $\bar{A}_{(q)} R(q, V', D) \supset I(q, X, D)\, R(q, V', D) = E^{-1}(0)$ and $GFE(\bar{A}_{(q)} R(q, V', D)) = A_{(q)} R(q, V', X)$. Consequently, $R(q, V', D)/\bar{A}_{(q)} R(q, V', D)$ and $R(q, V', X)/A_{(q)} R(q, V', X)$ are isomorphic. Therefore it is enough to prove our assertion with D_1 replacing X and $\bar{A}$ replacing A. In other words, *without loss of generality, we may assume that X is a domain in C^N.*

In view of (5.1), after replacing X by a small enough neighbourhood of p in X, we may assume that V is pure dimensional. Since X is a domain in C^N, in view of (3.5, 4.1, 6.2) what we have to show is the existence of a neighbourhood X^* of p in X such that for every q in $X^* \cap V$ and for every irreducible component V' of $V_{(q)}$ the equality $\mathrm{rnk}_{p, V, X} A = \mathrm{rnk}_{q, V', X} A$ holds. In view of (7.2), it is enough to obtain the inequality $\mathrm{rnk}_{p, V, X} A \leqq \mathrm{rnk}_{q, V', X} A$.

Let $\mathrm{rnk}_{p, V, X} A = e$. Relabel the element x_j so that $x_{1(p)}, \ldots, x_{e(p)}$ form a basis of $A_{(p)} \bmod M(p, V, X)^2$. We can find holomorphic functions $x_1^*, \ldots, x_{e^*}^*$ on a neighbourhood X_1 of p in X such that $x_{1(p)}, \ldots, x_{e(p)}, x^*_{1(p)}, \ldots, x^*_{e^*(p)}$ form a basis of $M(p, V, X) \bmod M(p, V, X)^2$, i.e., a minimal set of generators of $M(p, V, X)$. By (8.1), there exists a neighbourhood X^* of p in X_1 such that for every point q in $X^* \cap V$ and for every irreducible component V' of $V_{(q)}, \ldots, x_{e(q)}, x_1^*, \ldots, x^*_{e^*(q)}$ generate $M(q, V', X) \bmod M(q, V', X)^2$. Since V is pure dimensional, by (3.1, 4.1, 6.2) we get $\mathrm{emdim}\, R(p, V, X) = \mathrm{emdim}\, R(q, V', X)$. Also by construction, $\mathrm{emdim}\, R(p, V, X) = e + e^*$. Therefore $x_{1(q)}, \ldots, x_{e(q)}, x^*_{1(q)}, \ldots, x^*_{e^*(q)}$ are linearly independent $\bmod M(q, V', X)^2$ and hence in particular so are $x_{1(q)}, \ldots, x_{e(q)}$. Therefore $\mathrm{rnk}_{p, V, X} A = e \leqq \mathrm{rnk}_{q, V', X} A$.

§ 9. Characterization of simple subvarieties

Let p be a point of V at which V is irreducible.

(9.1) *Assume that X is an analytic set in a domain D in C^N and that $V_{(p)} \not\subset S(X)_{(p)}$. Let $n = \dim J[p, V, X]$. Then $\mathrm{rnk}_{p, V, D} I(p, X, D) = N - n$.*

Proof. Successively by (5.4, 7.2, 5.1), after replacing D by a small enough connected neighbourhood of p in D, we may assume that for every $q \in D \cap V$ and for every irreducible component V' of $V_{(q)}$ we have:

(i)[9] $\mathrm{rnk}_{p, V, D} I(p, X, D) \geqq \mathrm{rnk}_{q, V', D} I(q, X, D)$ and

(ii) $n = \dim J[q, V', X]$. Also (3.5, 4.1, 6.2) imply that:

---

[9]) The proof can be simplified by at once asserting equality here by invoking (8.2). However, we wanted to make § 12 independent of § 8.

(iii) $N-n \geqq \mathrm{rnk}_{p,V,D} I(p,X,D)$ and $\mathrm{rnk}_{q,V',d} I(q,X,D) = (N-\dim V')-$ $-\operatorname{emdim}((R(q,V',D)/I(q,X,D)\,R(q,V',D))$.

Finally, (i) and (iii) yield:

(iv) $N-n \geqq \mathrm{rnk}_{p,V,D} I(p,X,D) \geqq (N-\dim V') - \operatorname{emdim}(R(q,V',D)/$ $I(q,X,D)\,R(q,V',D))$.

Since $V_{(p)} \not\subset S(X)_{(p)}$, there exists $q \in V$ such that q is a simple point of X. Let V' be an irreducible component of $V_{(q)}$. By (6.1), $R(q,V',D)/I(q,X,D)\,R(q,V',D)$ is isomorphic to $R(q,V',X)$ and by (4.1), the latter is regular. Hence by (ii, 3.1, 6.2): $(N-\dim V') - \operatorname{emdim}(R(q,V',D)/I(q,X,D)\,R(q,V',D) = (N-\dim V')-$ $-(\dim X_{(q)} - \dim V') = N - \dim X_{(q)} = N-n$. Consequently by (iv), we must have $\mathrm{rnk}_{p,V,D} I(p,X,D) = N-n$.

(9.2) *If $V_{(p)} \not\subset S(X)_{(p)}$ then $R(p,V,X)$ is regular.*

Proof. After replacing X by a small enough neighbourhood of p in X, we may assume that X is an analytic set in a domain D in C^N. By (9.1), $\mathrm{rnk}_{p,V,D} I(p,X,D) = N - \dim J[p,V,X]$. Hence by (3.5, 4.1, 6.2), dim and emdim of the local ring $R(p,V,D)/I(p,X,D)\,R(p,V,D)$ coincide; consequently by (3.1) it is regular and by (6.1) it is isomorphic to $R(p,V,X)$.

(9.3) *$V_{(p)} \not\subset S(X)_{(p)}$, if and only if, $R(p,V,X)$ is regular.*

Proof. The "only if" part is proved in (9.2). To prove the "if" part, we may assume that X is an analytic set in a domain D in C^N. We want to show that, given any neighbourhood E_1 of p in D there exists $q \in E_1 \cap V$ such that $q \notin S(X)$. By (5.1, 5.4, 6.2, 8.2) there exists a neighbourhood E_2 of p in E_1 such that for any $p' \in E_2 \cap V$ and any irreducible component V' of $V_{(q)}$ we have that dim and emdim of $R(p',V',D)/I(p',X,D)\,R(p',V',D)$ are equal respectively to dim and emdim of $R(p,V,D)/I(p,X,D)\,R(p,V,D)$; by (6.1) these local rings are isomorphic respectively to $R(p',V',X)$ and $R(p,V,X)$; $R(p,V,X)$ is given to be regular and hence $R(p',V',X)$ is also regular. By (5.2) there exists $p^* \in E_2 \cap V$ and a neighbourhood E_3 of p^* in E_2 such that every point of $E_3 \cap V$ is simple for V. Since $R(p^*,V,X)$ is regular, it is an integral domain and hence from the definition of a quotient ring it follows that only one irreducible component of $X_{(p^*)}$ contains $V_{(p^*)}$. In view of (5.1), we then conclude that there exists $p' \in E_3 \cap V$ and a neighbourhood E_4 of p' in E_3 such that $X \cap E_4$ is pure dimensional. Now $E_4 \subset E_1$, and $R(p',V,X)$ is regular. Thus without loss of generality, replacing D by E_4 and p by p', *we may assume that p is a simple point of V, and X is pure dimensional.*

Let $m = N - \dim X_{(p)}$, $n = N - \dim V_{(p)}$, and let D_1 be any given neighbourhood of p in D. Since p is a simple point of V there exist coordinate functions $z_1, \ldots, z_N$ in a neighbourhood D_2 of p in D_1 such that p is at the origin and $D_2 \cap V$ consists exactly of those points of D_2 at which $z_1, \ldots, z_n$ have value zero. Since $R(p,V,D)$ and $R(p,V,X)$ are regular, by (3.1, 3.5, 6.1, 6.2) we have $\mathrm{rnk}_{p,V,D} I(p,X,D) = m$. Consequently, there exist convergent power series $u_1, \ldots, u_m$ in $z_1, \ldots, z_N$ such that $u_{1(p)}, \ldots, u_{m(p)}$ is a basis of $I(p,X,D) \bmod M(p,V,D)^2$. We can write $u_j = v_j + w_j$ where

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} v_{ji} z_i \quad \text{and} \quad w_j = \sum_{i_1+\cdots+i_n>1} w_{j i_1 \ldots i_n} z_1^{i_1} \ldots z_n^{i_n}$$

where $v_{ji}, w_{ji_1\ldots i_n}$ are convergent power series in $z_{n+1}, \ldots, z_N$. For any element x in $M(p, V, D)$ let us denote the residue class of x in $M(p, V, D)/M(p, V, D)^2$ by $\bar{x}$. Then $\bar{u}_{j(\lambda)} = \bar{v}_{j(\lambda)}$. Considering that $M(p, V, D)/M(p, V, D)^2$ is a vector space over the field $R(p, V, D)/M(p, V, D)$ having $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n$ as a basis; after suitably relabelling $z_1, \ldots, z_n$ we obtain that $\det(\bar{v}_{ji})_{j,i=1,\ldots,m} \neq 0$ and hence $\det(v_{ji})_{j,i=1,\ldots,m} \neq 0$. Now there exists a neighbourhood D_3 of p in D_2 in which all the power series under consideration converge and where $u_1, \ldots, u_m$ have zero value at each point of X. By the last inequality we conclude that there exists a point q in $D_3 \cap V$ at which $\det(v_{ji})$ has a nonzero value. From this it follows that the Jacobian

$$\partial(u_1, \ldots, u_m)/\partial(z_1, \ldots, z_m)$$

has a nonzero value at q. Since $\dim X_{(q)} = N - m$ we conclude that q is a simple point of X.

(9.4) *Alternative proofs of* (5.2c, 5.2d). Until now we have not used (5.2c, 5.2d) and now we deduce them from (9.3) in a purely algebraic manner. (5.2d) immediately follows from (9.3) and (4.5). For (5.2c) we use a result of M. NAGATA[10]). Let p be any point of X. For any given prime ideal P in $R(p, X)$, denoting by Y the analytic set germ in X at p for which $I(p, Y, X) = P$ and taking Y for X in (5.2a) and (9.3), we deduce that the singular locus of $S(R(p, X)/P)$ is contained in a proper closed subset of $S(R(p, X)/P)$ (in NAGATA's sense). Thus $R(p, X)$ satisfies NAGATA's condition (3)[10]) (characteristic being zero, there are no pure inseparable extensions), and hence by NAGATA's result[10]), $R(p, X)$ has property (1) of that result, i.e., the singular locus of $S(R(p, X))$ is closed, and hence by our (9.3), $S(X)_{(p)}$ is analytic.

§ 10. Continuity of order on a simple subvariety

Let p be a point of V at which V is irreducible, and let $A = (x_1, \ldots, x_f)$ be a finite nonempty set of holomorphic functions on X. Now using (8.1, 9.2) we shall strengthen (7.1) in case $V_{(p)}$ is simple for $X_{(p)}$ as follows.

(10.1) *Assume that* $V_{(p)} \not\subset S(X)_{(p)}$. *Then there exists a neighbourhood* X^* *of* p *in* X *such that for every* q *in* $X^* \cap V$ *and for every irreducible component* V' *of* $V_{(q)}$ *we have* $\operatorname{ord}_{p, V, X} A = \operatorname{ord}_{q, V', X} A$.

Proof. In view of (7.1), it is enough to obtain the inequality $\operatorname{ord}_{p, V, X} A \geq \operatorname{ord}_{q, V', X} A$. Let $e = \operatorname{ord}_{p, V, X} A$. The cases $e = \infty$ or $e = 0$ being trivial, let us assume that $e \neq 0, \infty$. Fix $x \in A$ such that $\operatorname{ord}_{p, V, X} x = e$. Let $u_1, \ldots, u_r$ be holomorphic functions on a neighbourhood X_1 of p in X such that $u_{1(p)}, \ldots, u_{r(p)}$ form a basis of $M(p, V, X) \bmod M(p, V, X)^2$. Let $v_1, \ldots, v_E$, where $E = \binom{r+e-1}{e}$, be all the monomials in $u_1, \ldots, u_r$ of degree e. Then there exist holomorphic functions α, a, a_i in a neighbourhood X_2 of p in X_1 such that $\alpha_{(p)} \in J[I(p, V, X)]$, $a_{(p)} \notin I(p, V, X)$ and $a_{(p)} x_{(p)} = \alpha_{(p)} + a_{1(p)} v_{1(p)} + \cdots + a_{E(p)} v_{E(p)}$. For some j, $a_{j(p)} \notin I(p, V, X)$. Relabel the elements v_j so that $a_{1(p)} \notin I(p, V, X)$. By (5.1), there exists a neighbourhood X_3 of p in X_2 such that for every

[10]) Theorem 1 on page 29 in: M. NAGATA, "On the closedness of singular loci", Inst. des Hautes Études Scientifiques, Publications Mathematique, No. 2 (1959).

$q \in X_3 \cap V$ and for every irreducible component V' of $V_{(q)}$ we have $\alpha_{(q)} \in \in J[I(q, V', X)]$, and $a_{(q)}, a_{1(q)} \notin I(q, V', X)$. Next, there exists a neighbourhood X_4 of p in X_3 such that $a_{(q)} x_{(q)} = \alpha_{(q)} + a_{1(q)} v_{1(q)} + \cdots + a_{E(q)} v_{E(q)}$ for every q in X_4. By (8.1), there exists a neighbourhood X_5 of p in X_4 such that for every $q \in X_5 \cap V$ and for every irreducible component V' of $V_{(q)}$, $u_{1(q)}, \ldots, u_{r(q)}$ generate $M(q, V', X) \bmod M(q, V', X)^2$. Since $V_{(p)} \not\subset S(X)_{(p)}$, by (5.1, 5.2c) there exists a neighbourhood X^* of p in X_5 such that for every $q \in X^* \cap V$ and for every irreducible component V' of $V_{(q)}$ we have $\dim J[p, V, X] = \dim J[q, V', X]$, $\dim V_{(p)} = \dim V'$ and $V' \not\subset S(X)_{(q)}$. Then $\dim R(p, V, X) = \dim R(q, V', X)$; $u_{1(q)}, \ldots, u_{r(q)}$ is a set of generators of $M(q, V', X)$; $\alpha_{(q)} \in J[I(q, V', X)]$, $a_{(q)}$, $a_{1(q)} \notin I(q, V', X)$ and $a_{(q)} x_{(q)} = \alpha_{(q)} + a_{1(q)} v_{1(q)} + \cdots \cdots + a_{E(q)} v_{E(q)}$. By (9.2), $R(p, V, X)$ and $R(q, V', X)$ are regular and hence by (3.1), $u_{1(q)}, \ldots, u_{r(q)}$ is a minimal set of generators of $M(q, V', X)$. Since $\alpha_{(q)} \in J[I(q, V', X)]$ and $a_{1(q)} \notin M(q, V', X)$, by (3.2), $\mathrm{ord}_{q, V', X} a x = e$. Since $a_{(q)} \notin I(q, V', X)$, $\mathrm{ord}_{q, V', X} x = e$. Therefore $\mathrm{ord}_{p, V, X} A = e = \mathrm{ord}_{q, V', X} \geqq x \geqq \mathrm{ord}_{q, V', X} A$.

(10.2) ***Remark.*** Referring to the above proof, without the assumption that $V_{(p)} \not\subset S(X)_{(p)}$, by (8.1, 8.2) we can still arrange matters so that $u_{1(q)}, \ldots, u_{r(q)}$ is a minimal set of generators of $M(q, V', X)$. However, if $V_{(p)} \subset S(X)_{(p)}$ then, by (9.3), $R(q, V', X)$ is not regular and hence we cannot invoke (3.2) to conclude that $\mathrm{ord}_{q, V', X} a x = e$. Whether (10.1) holds without the assumption that $V_{(p)} \not\subset S(X)_{(p)}$ remains a question.

§ 11. Invariance of embedding dimension, rank and order; discussion

Assume that V is *irreducible* and let A be either a finite nonempty set of holomorphic functions on X or (more generally) a coherent sheaf of ideals on X (in which case, for any p in X, we take the stalk of A at p for $A_{(p)}$). In view of (5.3), from (8.2) and (10.1) we at once get the following.

(11.1) $\mathrm{emdim}\, R(p, V', X)$ *does not depend on which point p of V and which irreducible component V' of $V_{(p)}$ we take.*

(11.2) *If $A_{(q)} \subset I(q, V, X)$ for some $q \in V$, then $A_{(p)} \subset I(p, V', X)$ for every $p \in V$ and every irreducible component V' of $V_{(p)}$ and* $\mathrm{emdim}\, R(p, V', X)/A_{(p)} R(p, V', X)$ *and* $\mathrm{rnk}_{p, V', X} A$ *do not depend on p and V'.*

(11.3) *If V is simple for X then* $\mathrm{ord}_{p, V', X} A$ *does not depend on which point $p \in V$ and which irreducible component V' of $V_{(p)}$ we take.*

Consequently, these common values can respectively be called: the embedding dimension of X along V, the embedding dimension of A along V, the rank of A along V, and the order of A along V. For any analytic set W in X, in view of coherence (5.4), we can take $I(p, W, X)$ for $A_{(p)}$ and introduce the concepts of: the embedding dimension of W in X along V, the rank of W in X along V, and the order of W in X along V. Note that for the first two we are assuming $W \supset V$ and for the third we are assuming that V is simple for X. Also by (6.1), (emdim of W in X along V) = (emdim of W along V).

The above results naturally suggest the following questions in which for the sake of brevity we shall assume that V is everywhere irreducible: (i) Are

$R(p, V, X)$ and $R(q, V, X)$ isomorphic for any $p, q \in V$? If so, then as p moves along V, does $R(p, V, X)$ vary by a "compatible" isomorphism in some "good" sense? Note that in any case, by taking $R(p, V, X)$ as stalk at $p \in V$ and defining cross sections in an obvious manner, we get a certain sheaf on V, which however is not in general a constant sheaf. Perhaps the more interesting part of (i) is this: (ii) Is for any n, the dimension of $M(p, V, X)^n/M(p, V, X)^{n+1}$ as a vector space over $R(p, V, X)/M(p, V, X)$ invariant as p varies on V? If so, then does this vector space move "nicely" along V? Note that (11.1) answers (ii) affirmatively for $n = 1$, and (9.3) answers (ii) affirmatively for all n in case V is simple for X.

§ 12. Complete intersections

Let p be a point of X. We shall say that X is a *formal complete intersection at p*, if and only if, there exists an exact sequence (of homomorphisms): $0 \to A \to R \to R(p, X) \to 0$ where R is a regular local ring and A is a proper ideal in R generated by $(\dim R - \dim X_{(p)})$ elements. We shall say that X is a *complete intersection* at p, if and only if, there exists a biholomorphic map F of a neighbourhood Y of p in X onto an analytic set in a domain D in C^N such that $I(F(p), F(Y), D)$ is generated by $(N - \dim X_{(p)})$ elements. Note that then we get the exact sequence $0 \to I(F(p), F(Y), D) \to R(F(p), D) \to \to R(F(p), F(Y)) \to 0$ where $R(F(p), D)$ is regular and $R(F(p), F(Y))$ is isomorphic to $R(p, X)$. Now let $u_1, \ldots, u_k$ be holomorphic functions in a neighbourhood D_1 of $F(p)$ in D such that $k = N - \dim X_{(p)}$ and

$$(u_{1(p)}, \ldots, u_{k(p)})\, R(F(p), D) = I(F(p), F(Y), D).$$

Then by (5.1, 5.4) there exists a neighbourhood D_2 of $F(p)$ in D_1 such that for any $q \in D_2 \cap F(Y)$ we have $\dim F(Y)_{(q)} = \dim F(Y)_{(p)}$, and

$$(u_{1(q)}, \ldots, u_{k(q)})\, R(q, D) = I(q, F(Y), D).$$

Thus we get (12.1) and (12.2) below.

(12.1) *If X is a complete intersection at p then X is a formal complete intersection at p.*

(12.2) *If X is a complete intersection at p then X is a complete intersection at every point in some neighbourhood of p.*

Now (4.10, 5.2d, 9.2) at once yield

(12.3) *(Generalization of a lemma of* OKA*). If X is a formal complete intersection at p, then $X_{(p)}$ is normal, if and only if, $\dim S(X)_{(p)} \leqq \dim X_{(p)} - 2$. If X is a complete intersection at p, then $X_{(p)}$ is normal, if and only if, $\dim S(X)_{(p)} \leqq \dim X_{(p)} - 2$; and then X is everywhere normal in some neighbourhood of p.*

Also note that from (4.9) we get

(12.4) *If X is a formal complete intersection at p then $X_{(p)}$ is pure dimensional. If furthermore $X_{(p)}$ is reducible then some two distinct irreducible components of $X_{(p)}$ intersect in codimension one.*

(12.5) *Remark.* Replacing (9.2) by ZARISKI's corresponding characterization of a simplete subvariety of an algebraic variety[11]), for an algebraic variety Z, in affine or projective space over an arbitrary ground field, which is a complete intersection (obvious analogous definition), (4.10, 4.9) respectively yield the following: Z is everywhere normal if and only if the singular locus of Z is of codimension at least 2[12]). Z is pure dimensional, and if Z is reducible then some two distinct irreducible components of Z intersect in codimension one.

§ 13. Appendix

As mentioned in footnote 5, we give here an elementary proof (without using homological algebra) of the regularity of quotient rings of (formal or convergent) power series rings over a (respectively: abstract or complete non-discrete valued) perfect infinite field (13.13).

For an ideal A in a ring R we set

$$\mathrm{Rad}_R A = \{a \in R : a^q \in A \text{ for some positive integer } q\}.$$

When the reference to R is clear from the context, we may write $\mathrm{Rad}\, A$ for $\mathrm{Rad}_R A$.

By $y = (y_1, \ldots, y_n)$ we shall denote indeterminates.

For the sake of completeness, we start by giving an elementary proof of the following known result (13.4).

(13.1) *Let K^* be a field and K a subfield of K^*. Then, any finite number of elements of K^* which are linearly independent over K are linearly independent over $K(y)$.*

Proof. Obvious.

(13.2) *In the notation of* (13.1), *for any ideal A in $K[y]$ we have*: $AK^*[y] \cap K[y] = A$.

Proof. Let $u \in AK^*[y] \cap K[y]$. $u \in AK^*[y]$ implies that $u = \sum_i a_i b_i$ with $a_i = a_i(y) \in K^*[y]$, $b_i \in A$. Let W be the set of all the coefficients of all the elements $a_i(y)$. If W contains only the zero element then $u \in A$. Now assume that W contains nonzero elements. Let $1 = d_1, \ldots, d_e$ be a K-basis of the K-vector space spanned by W. Then $a_j = \sum_i d_i a_{ij}^*$ with $a_{ij}^* \in K[y]$. Let $b_i^* = \sum_j a_{ij}^* b_j$. Then $b_i^* \in A$ and $u = \sum_i d_i b_i^*$. By (13.1), $d_1, \ldots, d_e$ are linearly independent over $K(y)$. Since $u, b_1^*, \ldots, b_e^* \in K(y)$ and $d_1 = 1$, we get $u = b_1^* \in A$.

(13.3) *Let K be a field. Let $g_i(y_i) \in K[y_i]$ be of positive degree and let $B = (g_1(y_1), \ldots, g_n(y_n))\, K[y]$. Then*: (i) $B \neq K[y]$; (ii) *there are only a finite number of proper prime ideals $P_1, \ldots, P_h$ in $K[y]$ which contain B*; (iii) *each P_i is maximal in $K[y]$; and for the natural epimorphism $F_i : K[y] \to H_i = K[y]/P_i$ we*

---

[11]) ZARISKI, O.: "The concept of a simple point of an abstract algebraic variety", Trans. Amer. Math. Soc. **62**, pp. 1–52 (1947).

[12]) In this connection reference should be made to Theorem 3 on page 363 in: A. SEIDENBERG: "The hyperplane sections of normal varieties". Trans. Amer. Math. Soc. **69**, (1950).

have that (iv) H_i *is a finite algebraic extension of* K *and* $H_i = K[F_i y_1, \ldots, F_i y_n]$, *(since* $P_i \cap K = \{0\}$, *we identify* $F_i K$ *with* K*).*

Proof. Let K^* be an algebraic closure of K. Dividing $g_i(y_i)$ by its leading coefficient, we may assume that it is monic. If (i) were not true, we could write $1 = \sum g_i(y_i) f_i(y)$ with $f_i(y) \in K[y]$; let a_i be a root of $g_i(y_i)$ in K^*; then $1 = \sum g_i(a_i) f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0$ which is a contradiction. This proves (i). Now let P be a proper prime ideal in $K[y]$ containing B and let F be the natural epimorphism $K[y] \to H = K[y]/P$. Then $H = K[Fy_1, \ldots, Fy_n]$ and Fy_i is algebraic over K since $g_i(Fy_i) = 0$. Therefore H is a finite algebraic extension of K. The rest is now obvious.

(13.4) *In the notation of* (13.3) *assume that for* $i = 1, \ldots, n$, *the discriminant of* $g_i(y_i)$ *with respect to* y_i *is non-zero. Then*: $\operatorname{Rad} B = B$.

Proof. Let K^* be an algebraic closure of K. Dividing $g_i(y_i)$ by its leading coefficient, we may assume that it is monic. Note that the discriminant of $g_i(y_i)$ is the same whether $g_i(y_i)$ is considered as an element of $K[y_i]$ or of $K^*[y_i]$. If $\operatorname{Rad}(AK^*[y]) = AK^*[y]$, then $\operatorname{Rad} A \subset (\operatorname{Rad}(AK^*[y])) \cap K[y] = (AK^*[y]) \cap K[y] = A$, by (13.2). Thus it is enough to show that $\operatorname{Rad}(AK^*[y]) = AK^*[y]$; i.e., *we may assume that* K *is algebraically closed.* Then by (13.3), $H_i = K$. Let $a_{ij} = F_j y_i \in K$. Then $y_i - a_{ij} \in P_j$. Now, $(y_1 - a_{1j}, y_2 - a_{2j}, \ldots, y_n - a_{nj}) K[y]$ is a maximal ideal in $K[y]$ contained in P_j and hence it equals P_j. For any $f(y_i) \in K[y_i]$, $F_j f(y_i) = f(a_{ij})$, and hence $f(y_i) \in P_j$, if and only if, $f(a_{ij}) = 0$. Now $g_i(y_i) = (y_i - a_{ij}) f_i(y_i)$ with $f_i(a_{ij}) \neq 0$. Therefore $B(K[y]_{P_j}) = P_j(K[y]_{P_j})$. Therefore $B = \operatorname{Rad} B$.

From the "lying over" and "going up" theorems of COHEN-SEIDENBERG[13]) we get

(13.5) *Let* S *and* R *be local rings such that* R *is a subring of* S, *and* S *is integral over* R. *Then* $\dim S = \dim R$.

Proof. There exists a chain $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_h$ of distinct proper prime ideals in R, where $h = \dim R$. Successively applying Theorem 3 of COHEN-SEIDENBERG[13]) to $P_0, \ldots, P_h$ we find prime ideals $Q_0, \ldots, Q_h$ in S such that $Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_h$ and $Q_i \cap R = P_i$ for $i = 0, 1, \ldots, h$. $P_i \neq R$ implies that $Q_i \neq S$. By theorem 4 of COHEN-SEIDENBERG[13]), $Q_0, Q_1, \ldots, Q_h$ are all distinct. Therefore $\dim S \geqq h = \dim R$.

There exists a chain $Q_0^* \subset \cdots \subset Q_t^*$ of distinct proper prime ideals in S, where $t = \dim S$. Then $(Q_0^* \cap R) \subset \cdots \subset (Q_t^* \cap R)$ is a chain of proper prime ideals in R and by Theorem 4 of COHEN-SEIDENBERG[13]) they are all distinct. Therefore $\dim R \geqq t = \dim S$. *This completes the proof of* (13.5).

For a field k, *we set*

$k[[x_1, \ldots, x_N]]$ = ring of formal power series in $x_1, \ldots, x_N$ with coefficients in k.

$k[\langle x_1, \ldots, x_N \rangle]$ = ring of convergent power series in $x_1, \ldots, x_N$ with coefficients in k, provided k is complete nondiscrete valued (for instance, k = real or complex number field).

[13]) § 1 in: I. S. COHEN and A. SEIDENBERG: "Prime ideals and integral dependence". Bull. Amer. Math. Soc. 52, pp. 252–261 (1946).

(13.6) *Let* $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $S = k[[x]]$ *or* $k[\langle x\rangle]$, $R = k[[x, y]]$ *or* $k[\langle x, y\rangle]$ *respectively, and* $R^* = S[y]$. *Let* A^* *be an ideal in* R^* *which is generated by polynomials in* $y_1, \ldots, y_n$ *having coefficients in* S *and having nonunits in* S *as constant terms. Then* $A^*R \cap R^* = A^*$.

Proof. Let $M = (x, y)R^*$. Then M is a maximal ideal in R^*, and $k[[x, y]]$ is a completion of R^*_M; consequently $A^*R^*_M = A^*k[[x, y]] \cap R^*_M$. Now $R^*_M \subset R \subset k[[x, y]]$ and hence $A^*R^*_M = A^*R \cap R^*_M$. Since $M \supset A^*$, we get $A^*R^*_M \cap R^* = A^*$. Therefore $A^* = A^*R \cap R^*$. *This completes the proof of* (13.6).

Now let

$k =$ a field.

$R_N = k[[x_1, \ldots, x_N]]$ or $k[\langle x_1, \ldots, x_N\rangle]$ provided k is complete nondiscrete valued.

$A =$ a proper nonzero ideal in R_N.

A is said to be *regular relative to* $(x_1, \ldots, x_m; x_{m+1}, \ldots, x_N)$, if and only if, $A \cap R_m = \{0\}$ and for every $h > m$ there exists $u_h \in A \cap R_h$ such that u_h is a distinguished polynomial in x_h of positive degree with coefficients in R_{h-1}.

(13.7) *If* k *is infinite then by a generic homogeneous nonsingular* k*-linear transformation on* $(x_1, \ldots, x_N)$ *it can be arranged that* A *is regular relative to* $(x_1, \ldots, x_m; x_{m+1}, \ldots, x_N)$, *(some* m *with* $0 < m < N$*). Here, by "generic" we mean that given* $0 \neq H(\ldots, Z_{ij}, \ldots) \in k[\ldots, Z_{ij}, \ldots]$ *where* $Z_{ij} (i, j = 1, \ldots, N)$ *are indeterminates, the transformation* $x_i \to \sum a_{ij}x_j$ *(*a_{ij} *in* k *with* $\det|a_{ij}| \neq 0$*) can be chosen so that* $H(\ldots, a_{ij}, \ldots) \neq 0$.

Proof. Fix $0 \neq u_N \in A$. By Weierstrass preparation theorem, after making a linear transformation on $(x_1, \ldots, x_N)$ and multiplying U_N by a unit in R_N, it can be arranged that u_N is distinguished in x_N. If $A \cap R_{N-1} = \{0\}$ then we are through. If not, then fix $0 \neq u_{N-1} \in A \cap R_{N-1}$. By Weierstrass preparation theorem, after making a linear transformation on $(x_1, \ldots, x_{N-1})$ and multiplying u_{N-1} by a unit in R_{N-1}, it can be arranged that u_{N-1} is distinguished in x_{N-1}; and so on. From the choice we have in choosing the linear transformation at each stage, it can be arranged that for the final linear transformation we have $H(\ldots, a_{ij}, \ldots) \neq 0$.

Now assume that, by a homogeneous nonsingular k-linear transformation on $(x_1, \ldots, x_N)$, it has been arranged that A *is regular relative to* $(x_1, \ldots, x_m; x_{m+1}, \ldots, x_N)$, (some m with $0 < m < N$). *We set* $y_i = x_{m+i}$, $n = N - m$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$. $S = k[[x]]$ or $k[\langle x\rangle]$ respectively. $R = k[[x, y]]$ or $k[\langle x, y\rangle]$ respectively. $K =$ quotient field of S. $R^* = S[y] \subset R$.

$F: R \to \bar{R} = R/A$ (natural epimorphism); $\bar{y}_i = Fy_i$.

Since $A \cap S = \{0\}$, we may identify S with FS.

By noether homomorphism theorem it follows that $\bar{R}$ is a local ring and F^{-1} maps the maximal ideal in $\bar{R}$ onto the maximal ideal in R.

(13.8) $\bar{R} = S[\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n]$ *and* $\bar{R}$ *is integral over* S.

Proof. By induction on h we shall show that $FR_{m+h} = S[\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_h]$ and $S[\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_h]$ is integral over S. The equation $u_{m+1}(\bar{y}_1) = 0$ shows that $\bar{y}_1$ is integral over S, and hence $S[\bar{y}_1]$ is integral over S. By Weierstrass preparation

theorem, any element a in R_{m+1} can be written as $a = u_{m+1}(y_1)q + r$ with $q \in R_{m+1}$ and $r \in R_m[y_1] = S[y_1]$; hence $Fa \in S[y_1]$. Now let $h > 1$ and assume that our assertion is true for $h-1$. From the equations $u_{m+h}(\bar{y}_h) = 0$ and $FR_{m+h-1} = S[\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{h-1}]$ we deduce that $\bar{y}_h$ is integral over $S[\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{h-1}]$; hence $S[\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_h]$ is integral over S. By Weierstrass preparation theorem, any element a in R_{m+h} can be written as $a = u_{m+h}(y_h)q + r$ with $q \in R_{m+h}$ and $r \in R_{m+h-1}[y_h]$, hence $Fa \in S[\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{h-1}][\bar{y}_h] = S[\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_h]$. Thus the induction is complete and now it is enough to take $h = n$.

From (13.5) and (13.8) we get

(13.9) $\dim \bar{R} = \dim S = m$.

Now assume that A is a prime ideal in R. Then $\bar{R}$ is an integral domain. Let K^* be the quotient field of $\bar{R}$. Then K^*/K is finite algebraic.

(13.10) *Let z be any element in the maximal ideal of R. Let $\bar{z} = Fz$, and let $g(Z)$ be the minimal monic polynomial of $\bar{z}$ over K[14]. Then $g(Z)$ is a distinguished polynomial in Z with coefficients in S.*

Proof. Since S is a regular local ring, it is normal. Therefore, $g(Z) \in S[Z]$. Since $g(\bar{z}) = 0$, $g(z) \in A$. Since A and z are contained in the maximal ideal of R, so is $g(0)$; hence $g(0)$ is a nonunit in S. Consequently, in view of Weierstrass preparation theorem, if $g(Z)$ were not distinguished, it would factor into two monic polynomials of positive degree in $S[Z]$ and this would contradict the fact that $g(Z)$ is the minimal polynomial of z over K.

We shall say that A is *strictly regular relative to* $(x_1, \ldots, x_m; x_{m+1}, \ldots, x_N)$, if and only if, K^*/K is separable.

(13.11) *If k is a perfect field of characteristic $p \neq 0$, then $S = S^p[x_1, \ldots, x_m]$, $K = K^p(x_1, \ldots, x_m)$, $K^* = K^{*p}(Fx_1, \ldots, Fx_N)$, and $[K : K^p] = p^m$.*

Proof. Each f in $k[[x_1, \ldots, x_m]]$ can be written as

$$f = \sum_{0 \leq i_j < p} f_{i_1 \ldots i_m} x_1^{i_1} \ldots x_m^{i_m} \quad \text{with} \quad f_{i_1 \ldots i_m} \in k[[x_1^p, \ldots, x_m^p]]$$

and by majorization it follows that if $f \in k[\langle x_1, \ldots, x_m \rangle]$ then $f_{i_1 \ldots i_m} \in k[\langle x_1, \ldots, x_m \rangle]$. Since k is perfect, we can write $f_{i_1 \ldots i_m} = (g_{i_1 \ldots i_m})^p$ with $g_{i_1 \ldots i_m} \in k[[x_1, \ldots, x_m]]$. From this it will follow that $S = S^p[x_1, \ldots, x_m]$ if we show that for any

$$h = \sum_{i_1, \ldots, i_m \geq 0} h_{i_1 \ldots i_m} x_1^{i_1} \ldots x_m^{i_m} \in k[[x_1, \ldots, x_m]] \quad \text{with} \quad h_{i_1 \ldots i_m} \in k,$$

if $h^p = \sum (h_{i_1 \ldots i_m})^p x_1^{p i_1} \ldots x_m^{p i_m} \in k[\langle x_1, \ldots, x_m \rangle]$ then $h \in k[\langle x_1, \ldots, x_m \rangle]$. If h^p is convergent then there exist positive real numbers $a_1, \ldots, a_m, b$ such that

$$|(h_{i_1 \ldots i_m})^p| a_1^{p i_1} \ldots a_m^{p i_m} < b \quad \text{for all} \quad i_1, \ldots, i_m;$$

consequently

$$|h_{i_1 \ldots i_m}| a_1^{i_1} \ldots a_m^{i_m} < c \quad \text{for all} \quad i_1, \ldots, i_m$$

where c is the real p-th root of b; hence h is convergent. This proves that $S = S^p[x_1, \ldots, x_m]$ and from this it follows that $K = K^p(x_1, \ldots, x_m)$ and $[K : K^p] = p^m$. Applying the equation $S = S^p[x_1, \ldots, x_m]$ to R, we get

[14]) Here Z denotes an indeterminate.

$R = R^p[x_1, \ldots, x_N]$ and hence via F we get $\overline{R} = \overline{R}^p[Fx_1, \ldots, Fx_N]$ and hence $K^* = K^{*p}(Fx_1, \ldots, Fx_N)$.

(13.12) *If k is an infinite perfect field then by a generic homogeneous non-singular k-linear transformation on $(x_1, \ldots, x_N)$ it can be arranged that A is strictly regular relative to $(x_1, \ldots, x_m; x_{m+1}, \ldots, x_N)$.*

Proof. In the formal case the proof given by CHEVALLEY[15]) when k is algebraically closed applies. In view of (13.7) and (13.11), CHEVALLEY's proof also applies in the convergent case.

(13.13) *Assume that k is a perfect infinite field and let P be a proper prime ideal in R_N. Then $(R_N)_P$ is regular.*

Proof. This is trivial for $P = \{0\}$, so let $P \neq \{0\}$. By (13.12), we may assume that P is strictly regular relative to $(x_1, \ldots, x_m; x_{m+1}, \ldots, x_N)$. Let $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y_i = x_{m+i}$, $n = N - m$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $R = R_N$, $S = k[[x]]$ or $k[\langle x \rangle]$ respectively, $R^* = S[y]$, K = quotient field of S, and $G: R \to R/P$ the natural epimorphism. By (13.10), the minimal monic polynomial $g_i(Z)$ of Gy_i over K is a distinguished polynomial of positive degree in Z with coefficients in S[14]). Let $A^* = (g_1(y_1), \ldots, g_n(y_n))R^*$ and $A = A^*R$. Since $P \supset A$ and $P \cap S = \{0\}$, A is regular relative to $(x; y)$. Let $F: R \to \overline{R} = R/A$ be the natural epimorphism, and let $\overline{y}_i = Fy_i$. By (13.9), $\dim_R A = m = \dim_R P$. Hence $A = Q \cap Q_1 \cap \cdots \cap Q_t$ where Q is primary for P, Q_i is primary for P_i, and $P_i \not\subset P$ for $i = 1, \ldots, t$. Let $F^*: R^* \to \overline{R}^* = R^*/A^*$ be the natural epimorphism. By (13.8), $FR = S[\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n] = FR^*$; and by (13.6), $A \cap R^* = A^*$. Therefore, we may identify $\overline{R}^*$ with $\overline{R}$. Let $P^* = F^{*-1}FP$, $Q^* = F^{*-1}FQ$, $P_i^* = F^{*-1}FP_i$, $Q_i^* = F^{*-1}FQ_i$. Then $A^* = Q^* \cap Q_1^* \cap \cdots \cap Q_t^*$, Q^* is primary for P^*, Q_i^* is primary for P_i^*, $P_i^* \not\subset P^*$ for $i = 1, \ldots, t$; and $P^* \cap S = \{0\}$. Since $P_i^* \not\subset P^*$, there exists $a_i \in Q_i^*$ such that $a_i \notin P^*$. Let $a = a_1 \ldots a_t$. Then $a \in Q_1^* \cap \cdots \cap Q_t^*$ and $a \notin P^*$. *Let u be any element of P^*.* Then $ua \in \operatorname{Rad} A^*$. Since P is strictly regular relative to $(x; y)$, the discriminant of $g_i(Z)$ relative to Z is nonzero. Therefore, by (13.4), $\operatorname{Rad}(A^*K[y]) = A^*K[y]$. Since $\operatorname{Rad} A^* \subset \operatorname{Rad}(A^*K[y])$, we get $ua \in A^*K[y]$. Hence, there exists $0 \neq b \in S$ such that $uab \in A^* \subset Q^*$. Since $0 \neq b \in S$ and $S \cap P^* = \{0\}$, we get $b \notin P^*$ and hence $ab \notin P^*$. Therefore $u \in Q^*$. This shows that $P^* = Q^*$ and hence $P = Q$. Consequently, $PR_P = AR_P$ and hence the maximal ideal PR_P in the local ring R_P is generated by the n elements $g_1(y_1), \ldots, g_n(y_n)$. Now $\dim R_P = \operatorname{dimdft}_R P$. Since R is regular, by (4.3), $\operatorname{dimdft}_R P = \dim R - \dim_R P = N - m = n$. Therefore $\dim R_P = n$. Hence R_P is regular.

(13.14) *Remark.* Now refer to Theorem 20 on page 97 (which proves that R_P is regular when R is a certain type of *complete* regular local ring) and to Theorem 21 on page 99 (which proves that in any regular local ring R the Macaulay unmixedness theorem, i.e., our (4.2), holds) of COHEN's paper cited in our footnote 5. In proving Theorem 21, COHEN uses Theorem 20. Theorem 20 for $k[[x_1, \ldots, x_N]]$ in case of zero characteristic is contained in (13.13). This

[15]) Lemma 2 on page 32 in: C. CHEVALLEY: "Intersections of algebraic and algebroid varieties". Trans. Amer. Math. Soc. 57 (1945).

gives Theorem 21 when the residue field of R is of characteristic zero. This is the only case of (4.2) which is relevant in the previous sections of our paper.

Using (4.2), we now get the following result which is perhaps of interest.

(13.15) *Assume that k is an infinite field. Let $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $S = k[[x]]$ or $k[\langle x \rangle]$, $R = k[[x, y]]$ or $k[\langle x, y \rangle]$ respectively, and $R^* = S[y]$. Let $g_i(y_i)$ be a distinguished polynomial in y_i of positive degree with coefficients in S. Let $A = (g_1(y_1), \ldots, g_n(y_n))R$. Then* (i) $A \cap S = \{0\}$. *Now assume that the discriminant of $g_i(y_i)$ relative to y_i is nonzero. Then* (ii) $A = P_1 \cap \cdots \cap P_t$ *where $P_1, \ldots, P_t$ are distinct prime ideals in R with $\dim_R P_i = m$, and hence $AR_P = P_i R_{P_i}$ for $i = 1, \ldots, t$.*

Proof. Let $A^* = (g_1(y_1), \ldots, g_n(y_n))R^*$. By (13.6), to prove (i) it is enough to show that $A^* \cap S = \{0\}$. This we do by induction on n. It is trivial for $n = 1$, so let $n > 1$ and assume it is true for $n - 1$. Let $u_i \in R^*$ such that $u_1 g_1(y_1) + \cdots + u_n g_n(y_n) = a \in S$. Let the degree of $g_1(y_1)$ in y_1 be q, $(q > 0)$. Since $g_1(y_1)$ is monic, for all $i > 1$ we can write $u_i = v_i g_1(y_1) + e_i$ with $v_i, e_i \in R^*$ such that the degree of e_i in y_1 is less than q. Let $e_1 = u_1 + v_2 g_2(y_2) + + v_3 g_3(y_3) + \cdots + v_n g_n(y_n)$. Then $a = e_1 g_1(y_1) + \cdots + e_n g_n(y_n)$. If e_1 were not zero, then the degree of $e_1 g_1(y_1) + \cdots + e_n g_n(y_n)$ in y_1 would be positive and this would contradict the fact that the degree of a in y_1 is zero. Therefore $e_1 = 0$, i.e., $a = e_2^* g_2(y_2) + \cdots + e_n^* g_n(y_n)$ with $e_i^* \in S[y_2, \ldots, y_n]$. Hence, by the induction hypothesis, $a = 0$. This proves (i).

Now assume that the discriminant of $g_i(y_i)$ is nonzero for $i = 1, \ldots, n$. In view of (13.9), (i) implies that $\dim_R A = m$. Since A is generated by $N - m = n$ elements, by (4.2, 4.3) we deduce that $AR = Q_1 \cap \cdots \cap Q_t$ where Q_i is primary for P_i, and $P_1, \ldots, P_t$ are distinct prime ideals in R, and $\dim_R P_i = m$ for $i = 1, \ldots, t$. Suppose if possible that $P_1 \cap S \neq \{0\}$ and fix $0 \neq u \in P_1 \cap S$. By a linear transformation on $x_1, \ldots, x_m$ followed by Weierstrass preparation theorem we can arrange that u is a distinguished polynomial in x_m. Continuing in this way we could then arrange that P_1 is regular relative to $(x_1, \ldots, x_h; x_{h+1}, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ with $h < m$; by (13.9), $\dim_R P_1 = h < m$ which is a contradiction. Therefore $P_1 \cap S = \{0\}$ and similarly $P_i \cap S = \{0\}$ for $i = 1, \ldots, t$. Consequently, in the proof of (13.13), we can substitute P_i for P and deduce that $Q_i = P_i$ for $i = 1, \ldots, t$.

(Received February 16, 1960)

BOSBACH, B.
Math. Annalen 141, 193—209 (1960)

Charakterisierungen von Halbgruppen mit eindeutigen Halbprimfaktorzerlegungen* unter Berücksichtigung der Verbände und Ringe

Von

BRUNO BOSBACH in Köln

Einleitung

Im folgenden werden wir uns öfter auf die 1. Mitteilung [3] beziehen, welche wir mit I zitieren wollen. Die einzelnen Aussagen jener Note bezeichnen wir mit I, (n), oder ähnlich, ihre Definitionen setzen wir als bekannt voraus. Es wurden die Begriffe *halbprimkanonisches*, *primkanonisches*, *kanonisches* und *halbkanonisches Holoid* erklärt, und es konnten charakteristische Bedingungen für diese Holoide gegeben werden. Es zeigte sich u. a., daß die Begriffe halbprimkanonisches und primkanonisches Holoid gleichbedeutend sind, weshalb wir uns im folgenden des kürzeren Wortes primkanonisch bedienen wollen. In dieser Note werden zunächst zwei weitere Zerlegungssätze für Holoide gegeben und sodann unter Auswertung dieser Sätze die *primkanonischen (kanonischen, halbkanonischen) Verbände* verbandstheoretisch, die *primkanonischen (kanonischen, halbkanonischen) Ringe* ringtheoretisch charakterisiert werden. Was unter diesen Strukturen zu verstehen ist, wird in den §§ 2 und 3 erklärt. — Es ist nun ein Verband genau dann primkanonisch, wenn er kanonisch ist, und ein Ring genau dann primkanonisch, wenn er kanonisch oder halbkanonisch ist, was später gezeigt wird, weshalb wir uns in der Einleitung bei Verbänden und Ringen des kurzen Wortes kanonisch bedienen wollen. Wir gehen zunächst in möglichst großer Allgemeinheit aus von Holoiden, in denen zu je zwei Primelementen der größte gemeinsame Teiler existiert. Diese Bedingung ist nicht einmal in jedem primkanonischen Halbverband erfüllt, was sich leicht zeigen läßt, wird aber direkt oder indirekt außer in I in allen zitierten Arbeiten für die eindeutige „*Zerlegung in Primelemente*" gefordert. Holoide, die die oben angeführte Zusatzbedingung erfüllen, bezeichnen wir als $^+$*Holoide*. Zu ihnen gehören u. a. die Verbände und die regulären Holoide, was man sich leicht klar macht. Aber auch die endlichen Holoide sind $^+$Holoide. Denn sind $a_1, a_2, \ldots, a_n$ alle gemeinsamen Teiler der Primelemente p und q, so ist $\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu$ der größte gemeinsame Teiler von p und q. Schließlich sei erwähnt, daß auch die Ringe in gewisser Weise als $^+$Holoide angesehen werden können. Ein Kriterium für primkanonische $^+$Holoide liefert Satz 1. Er ist immer noch eine gemeinsame Verallgemei-

* 2. Mitteilung.

nerung der von CLIFFORD in [4], von DUBREIL in [6], von HINTZEN in [8], von FRITZ KLEIN in [10] und von SKOLEM in [11] gegebenen Zerlegungssätze für die Elemente kommutativer Halbgruppen, aber selbstverständlich spezieller als I, Satz 1, der sich seinerseits als der speziellste Satz der 1. Mitteilung erwies. Eine Auswertung der Ergebnisse des § 1, der neben Satz 1 noch eine neue Charakterisierung der halbkanonischen Holoide bringt (Satz 2), liefert die verbandstheoretischen Sätze 3 und 4 und den ringtheoretischen Satz 5. — Satz 3 ist eine gemeinsame echte Verallgemeinerung der Zerlegungsergebnisse von BALACHANDRAN in [1], von BIRKHOFF in [2] und HERMES in [7], von FRITZ KLEIN in [9], sowie von WARD in [13], während Satz 4 sogar noch zusätzlich allgemeiner ist als der Zerlegungssatz von DILWORTH in [5]. Das liegt darin begründet, daß Satz 4 beliebige halbkanonische Verbände charakterisiert, während in jenen Noten spezielle Verbände (vollständige in [1], längenendliche mit 0 in [5], Verbände mit absteigender Teilerkettenbedingung in [2], [7], [9], [13]) untersucht werden, wobei die dortigen Zerlegungen alle zumindest halbkanonisch sind. Satz 4 zeigt außerdem recht anschaulich, um wieviel die halbkanonischen Verbände schwächer sind als die kanonischen. — Satz 5 enthält als echte Sonderfälle die Korollare 1 und 2 aus [4] und damit die bekannten Zerlegungssätze für Hauptidealintegritätsbereiche und endliche Boolesche Ringe. — Im letzten Paragraphen weisen wir die Verträglichkeit und Unabhängigkeit der aufgestellten Systeme nach.

§ 1. Weiteres über primkanonische und halbkanonische Holoide

Im folgenden sei H ein Holoid. Existiert dann zu der nicht leeren Teilmenge A ein kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV), so ist dieses eindeutig bestimmt und wir bezeichnen es mit $\bigcup A$. Entsprechendes gilt für den größten gemeinsamen Teiler (ggT), falls er existiert, den wir mit $\bigcap A$ bezeichnen. Ist speziell $A = a_1, a_2, \ldots, a_n$ eine endliche Teilmenge von H, so schreiben wir auch $\bigcup\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu$ oder $a_1 \cup a_2 \ldots \cup a_n$ für $\bigcup A$ und $\bigcap\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu$ oder $a_1 \cap a_2 \ldots \cap a_n$ für $\bigcap A$. —Wir bringen nun einige Sätze über das kgV und den ggT in (prim-) kanonischen Holoiden, die zum Teil für die Charakterisierung der primkanonischen Holoide von Bedeutung sind.

(1) *Ist H ein halbkanonisches Holoid, so existiert zu je endlich vielen Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aus H das kgV.*

Es seien zunächst a, b zwei Elemente aus H und $a = \prod\limits_{\sigma=1}^{s} a_\sigma^{n_\sigma}$, $b = \prod\limits_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa^{m_\varkappa}$ ihre halbkanonischen Zerlegungen. Ist dann P die Menge der in $\prod\limits_{\sigma=1}^{s} a_\sigma^{n_\sigma}$ und $\prod\limits_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa^{m_\varkappa}$ vorkommenden verschiedenen Potenzen¹), so ist das Produkt v^* der maximalen Elemente aus P gleich $a \cup b$. Denn aus der Konstruktion von v^* folgt nach I, (18), $a \mid v^*$ & $b \mid v^*$. Gilt weiter $a \mid v$ & $b \mid v$, so folgt, wieder nach

¹) Zwei Potenzen a^n, b^m heißen genau dann verschieden, wenn gilt: $a^n \neq b^m$.

I, (18), $v^* \mid v$. Der Rest der Behauptung ergibt sich aus ordnungstheoretischen Gründen.

(1) kann auch so formuliert werden:

($C_\cup$) *Zu jedem n-tupel* (a_ν) *eines halbkanonischen Holoides* H *existiert* $\bigcup_{\nu=1}^{n} a_\nu$ *in* H.

(2) *Ist* H *ein primkanonisches* $^+$*Holoid, so existiert zu je endlich vielen Elementen* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *aus* H *der ggT.*

Denn zunächst existiert zu je zwei Primfaktorpotenzen p^m, q^n der ggT. Gilt nämlich $p \mid q \vee q \mid p$, so folgt die Behauptung unmittelbar. — Es sei deshalb $p \nmid q \,\&\, q \nmid p$. Dann gilt $p \cap q \mid p^m \,\&\, p \cap q \mid q^n$ und ferner $t \mid p^m \,\&\, t \mid q^n \rightarrow t \mid p \cap q$. Ist nämlich $t = \prod_{\varrho=1}^{r} t_\varrho^{l_\varrho}$ die primkanonische Zerlegung von t, so besteht für jedes ϱ die Implikation: $t_\varrho \leqq p \,\&\, t_\varrho \leqq q \rightarrow t_\varrho < p \,\&\, t_\varrho < q \rightarrow t_\varrho^{l_\varrho} < p \,\&\, t_\varrho^{l_\varrho} < q \rightarrow t_\varrho^{l_\varrho} < p \cap q$. Hieraus ergibt sich nach I, (18), $t \mid p \cap q$, also $p \cap q = p^m \cap q^n$. — Sind nun a, b zwei beliebige Elemente aus H und $a = \prod_{\sigma=1}^{s} a_\sigma^{n_\sigma}$, $b = \prod_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa^{m_\varkappa}$ ihre primkanonischen Zerlegungen und bilden wir die nicht leere Menge Q aller $a_\sigma^{n_\sigma} \cap b_\varkappa^{m_\varkappa}$ und anschließend das kgV von Q, so ist $\bigcup Q = t^* = a \cap b$. Denn es gilt $t^* \mid a \,\&\, t^* \mid b$ und es folgt aus I, (17′), und I, (18), unter Berücksichtigung der Konstruktion von t^*: $t \mid a \,\&\, t \mid b \rightarrow t \mid t^*$. — Der Rest der Behauptung ergibt sich aus ordnungstheoretischen Gründen.

(2) kann auch so formuliert werden:

($C_\cap$) *Zu jedem n-tupel* (a_ν) *eines primkanonischen* $^+$*Holoides* H *existiert* $\bigcap_{\nu=1}^{n} a_\nu$ *in* H.

Neben ($C_\cap$) formulieren wir noch als eine Verschärfung die Bedingung

($C'_\cap$) *Zu jeder nicht leeren Teilmenge* A *von* H *existiert* $\bigcap A$ *in* H.

($C'_\cap$) ist in primkanonischen Holoiden genau dann erfüllt, wenn zu jeder nicht leeren Teilmenge von Primelementen aus H der größte gemeinsame Teiler existiert, was ohne Beweis erwähnt sei. Die Formulierung von ($C'_\cap$) wird uns an einigen Stellen Umständlichkeiten ersparen.

Wir zeigen weiter:

(3) *Ist* H *ein primkanonisches* $^+$*Holoid, so bildet* H *bezüglich* $\cup$ *und* $\cap$ *einen distributiven Verband, d. h. es gilt:*

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c) \quad \textit{und} \quad a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)\,.$$

Daß H bezüglich $\cup$ und $\cap$ einen Verband bildet, ist unmittelbar klar. Es bleibt (vgl. [7], S. 41) $a \cap (b \cup c) \leqq (a \cap b) \cup (a \cap c)$ nachzuweisen. Es gilt zunächst $a \leqq b \cup c \rightarrow a \cap (b \cup c) \leqq (a \cap b) \cup (a \cap c)$. Denn ist $a \leqq b \cup c$ und sind $a = \prod_{\sigma=1}^{s} a_\sigma^{n_\sigma}$. und $b \cup c = \prod_{\varrho=1}^{r} d_\varrho^{l_\varrho}$ die primkanonischen Zerlegungen von a und $b \cup c$, so ist nach I, (17′), jedes $a_\sigma^{n_\sigma}$ ein Vorgänger von mindestens einem $d_\varrho^{l_\varrho}$, also nach Konstruktion des kgV von b oder c. Hieraus folgt weiter $a_\sigma^{n_\sigma} \leqq a \cap b \vee a_\sigma^{n_\sigma} \leqq a \cap c$ und damit $a_\sigma^{n_\sigma} \leqq (a \cap b) \cup (a \cap c)$, d. h. $a \cap (b \cup c) = a \leqq (a \cap b) \cup (a \cap c)$. Hieraus ergibt sich nun für jedes Tripel a, b, c:

$a \cap (b \cup c) = [a \cap (b \cup c)] \cap (b \cup c) \leqq [a \cap (b \cup c) \cap b] \cup [a \cap (b \cup c) \cap c]$
$= (a \cap b) \cup (a \cap c)$.

(4) *Ist H ein halbkanonisches Holoid, so gilt $a(b \cup c) = ab \cup ac$.*

Man findet leicht: $ab \cup ac \leqq a(b \cup c)$. — Es sei weiter $a(b \cup c) = \prod_{\varrho=1}^{r} d_\varrho^{l_\varrho}$ die halbkanonische Zerlegung von $a(b \cup c)$. Besinnen wir uns dann auf die Konstruktion des $b \cup c$ aus den halbkanonischen Zerlegungen von b und c, so erkennen wir, daß für jedes ϱ notwendig gilt: $d_\varrho^{l_\varrho} | ab \vee d_\varrho^{l_\varrho} | ac$, d. h. $d_\varrho^{l_\varrho} | ab \cup ac$, woraus sich nach I, (18), $a(b \cup c) \leqq ab \cup ac$ ergibt, also insgesamt $a(b \cup c) = ab \cup ac$ wie behauptet.

(5) *Ist H ein Holoid, das (C_1)[1]) und $(C'_\cap)$, bzw. $(C_\cap)$ erfüllt, so gilt:*
$a \cap B = \cap aB$, *bzw.* $a(b \cap c) = ab \cap ac$.

Gilt $(C'_\cap)$, so findet man leicht $\cap aB \geqq a \cap B$ und $a \leqq \cap aB$. Ist nun t der Infimalpartner zu a in $\cap aB$, so folgt $at \leqq ab$ für jedes $b \in B$, also auch $t \leqq b$ für jedes $b \in B$ und damit $t \leqq \cap B$, was $at \leqq a \cap B$ und damit $a \cap B = \cap aB$ nach sich zieht. — Für $(C_\cap)$ folgt der Beweis analog.

Wir bringen nun ein Ergebnis, das die Operationen $\cdot$, $\cup$, $\cap$ miteinander in Beziehung setzt:

(6) *Ist H ein primkanonisches $^+$Holoid, so gilt:* $(a \cup b)(a \cap b) = ab$.

Dies folgt nach (4) und (5) so: $(a \cup b)(a \cap b) = (a \cup b)a \cap (a \cup b)b \geqq ab \geqq (a \cap b)a \cup (a \cap b)b = (a \cap b)(a \cup b)$.

Aus I, Satz 1, (1) und (2), er gibt sich:

(7) *Ist H ein primkanonisches $^+$Holoid, so erfüllt H die Bedingungen* (C_1), (C_2), $(C_\cup)$, $(C_\cap)$.

Wir wollen (C_1), $(C_\cup)$, $(C_\cap)$ ersetzen durch eine einzige Bedingung. Dazu erklären wir:

Def. 1. *Es seien A, B zwei nicht leere Teilmengen von H. Dann verstehen wir unter der Residualmenge*[2]) *von A bezüglich B in H die Menge M aller x, für die mit jedem $a \in A$ ax gemeinsames Vielfaches aller gemeinsamen Teiler von B ist. — Für M, das natürlich Obermenge von B ist, schreiben wir auch $A * B$.*

Def. 2. *Wir nennen H ein C^*-Holoid, wenn H neben (C_2) noch die folgende Bedingung erfüllt:*

(C_1^*) *Sind A, B zwei nicht leere endliche Teilmengen von H, so besitzt $A * B$ ein Minimumelement, welches wir mit $(A * B)$ bezeichnen.*

(8) *Erfüllt das Holoid H die Bedingungen* (C_1), $(C_\cup)$, $(C_\cap)$, *so erfüllt H auch die Bedingung* (C_1^*).

Sind die endlichen Mengen A, B vorgegeben, so betrachte man den Infimalpartner t zu $\cap A$ in $\cap A \cup \cap B$. Es gilt $(\cap A)t \geqq \cap B$, und ist für jedes $a \in A$ $ax \geqq \cap B$, so folgt $\cap Ax = (\cap A)x \geqq \cap B \rightarrow (\cap A)x \geqq \cap A \cup \cup \cap B = (\cap A)t \rightarrow x \geqq t$, womit dann $t = (A * B)$ bewiesen ist.

(9) *Erfüllt das Holoid H die Bedingung (C_1^*), so erfüllt H auch die Bedingungen* (C_1), $(C_\cup)$, $(C_\cap)$.

---

[1]) Wir übernehmen die Bedingungen aus I mit den dort für sie eingeführten Bezeichnungen.

[2]) Wir wählen diesen Ausdruck in Anlehnung an den Terminus „*residual*", vgl. [13].

Gilt $t \leqq a$ und $tt' = a$, so betrachte man $(t * a)$. Es gilt $a = tt' \to (t * a) \leqq t' \to t(t * a) \leqq tt' = a$, also wegen $t(t * a) \geqq a$ insgesamt $t(t * a) = a$. Weiter gilt $t(t * a) \leqq tt'' \to a \leqq tt'' \to (t * a) \leqq t''$, weshalb (C_1) erfüllt ist.

Sind weiter a, b zwei Elemente aus H und betrachten wir $a(a * b)$, so gilt $a(a * b) \geqq a$ & $a(a * b) \geqq b$ und ist $c \geqq a$ & $c \geqq b$ und etwa $c = ax$, so folgt $ax \geqq b \to x \geqq (a * b) \to ax = c \geqq a(a * b)$, also insgesamt $a(a * b) = a \cup b$.

Betrachten wir aber $(e * a, b)$, so gilt $a \geqq (e * a, b)$ & $b \geqq (e * a, b)$ und ferner ist $e(e * a, b) = (e * a, b)$ nach Def. 1 gemeinsames Vielfaches aller gemeinsamen Teiler von a und b, weshalb dann gilt: $(e * a, b) = a \cap b$.

Aus (8) und (9) ergibt sich:

(10) *Das Holoid H erfüllt genau dann die Bedingungen* (C_1), $(C_\cup)$, $(C_\cap)$, *wenn es die Bedingung* (C_1^*) *erfüllt.*

Das Holoid H erfüllt genau dann die Bedingungen (C_1), (C_2), $(C_\cup)$, $(C_\cap)$, *wenn es ein C^*-Holoid ist.*

Wir beweisen weiter:

(11) *Erfüllt das Holoid H die Bedingung* (C_1^*), *so ist jedes Halbprimelement ein Primelement.*

Ist p ein Halbprimelement mit $p \mid ab$, so folgt nach (9) und (5): $p \mid p(p \cap a \cap b) \cap ab = pp \cap ap \cap pb \cap ab = (p \cap a)(p \cap b)$. Wegen $p \cap a < p$ & $p \cap b < p \to (p \cap a)(p \cap b) < p$ folgt hieraus $p \cap a = p \vee p \cap b = p$, d. h. $p \mid a \vee p \mid b$.

(12) *Erfüllt das Holoid H die Bedingung* (C_1) *und sind p, q zwei Primelemente aus H, so gilt:* $p^m \mid aq^n$ & $p^m \nmid q^n \to p \mid a$.

Gilt $n = 0$, so ist nichts zu zeigen. — Es sei deshalb $n \geqq 1$. Gilt dann $p \nmid q$, so folgt $p \mid a$, da p ein Primelement ist. Gilt aber $p \mid q$, also wegen $p^m \nmid q^n$ sogar $p = q$, so muß p^{n+1} unverkürzbar und aus diesem Grunde p Infimalpartner zu p^n in p^{n+1} sein, woraus folgt: $p^n p \mid p^n a \to p \mid a$.

Aus (11) und (12) ergibt sich analog zu I, (15):

(13) *Ist H ein C^*-Holoid, so ist H primkanonisch.*

(7), (10) und (13) liefern zusammen den

Satz 1: *Es sind die beiden Aussagen äquivalent:*

1. *H ist ein C^*-Holoid und* 2. *H ist ein primkanonisches* $^+$*Holoid.*

Satz 1 soll später ringtheoretisch ausgewertet werden. Hierzu empfiehlt es sich, schon an dieser Stelle die Auswertung vorzubereiten und den in [4] gegebenen Idealbegriff einzuführen. Um seine Formulierung zu erleichtern, verallgemeinern wir die Teilerrelation, indem wir festsetzen: Ist a ein Element aus H und A eine nicht leere Teilmenge von H, so setzen wir $a \mid A$, wenn a ein gemeinsamer Teiler von A ist.

Def. 3. *Eine nicht leere Teilmenge $\mathfrak{a}$ einer kommutativen Halbgruppe mit Einselement heißt ein Ideal, wenn sie jedes Element c enthält, das die folgende Eigenschaft besitzt: Für alle Paare s, t aus H mit $s \mid at$ gilt $s \mid ct$. — Ist speziell H ein kommutativer Ring mit* 1, *so heißt $\mathfrak{a}$ ein v-Ideal*[4]).

[4]) Einen Überblick über die historische Entwicklung des Idealbegriffes gibt CLIFFORD in der Einleitung zu [4]. — Daß jedes v-Ideal ein Dedekindsches Ideal ist, macht man sich leicht klar.

Ist A eine nicht leere Teilmenge von H, so bildet offenbar die Menge aller c mit der Eigenschaft: $s, t \in H \,\&\, s \mid At \rightarrow s \mid ct$ ein A umfassendes Ideal, welches wir das von A *erzeugte Ideal* nennen und mit $\{A\}$ bezeichnen. A heißt dann auch eine *Basis* von $\{A\}$. Als *Hauptideal* bezeichnen wir jedes von einem einzelnen Element erzeugte Ideal. Die Struktur der Hauptideale ist einfach. Ist $\{a\}$ ein Hauptideal, so besteht $\{a\}$ aus der Menge der Vielfachen von a. Denn, daß die Vielfachen von a zu $\{a\}$ gehören, ist klar. Gilt umgekehrt $b \in \{a\}$, so folgt wegen $a \mid a1$ auch $a \mid b1$, also $a \mid b$. Auf das Operieren mit Idealen soll hier nicht näher eingegangen werden, doch sei erwähnt, daß sich der oben definierte Idealbegriff in der Cliffordschen Arbeit bei der Konstruktion idealer Primfaktorzerlegungen als sehr fruchtbar erwiesen hat.

Wir zeigen nun:

(14) *Jede Residualmenge $A * B$ eines Holoides H ist ein Ideal, das wir als das von A bezüglich B erzeugte Residualideal bezeichnen wollen.*

Denn hat c die Eigenschaft, daß für alle s, t aus H mit $s \mid A * Bt$ gilt: $s \mid ct$, so gilt ja auch für alle gemeinsamen Teiler g von B und alle $a \in A$ $g \mid ca$, also $c \in A * B$.

Nach (14) ist (C_1^*) gleichbedeutend mit der Forderung: Sind A, B zwei nicht leere endliche Teilmengen von H, so ist das von A bezüglich B erzeugte Residualideal ein Hauptideal.

Für die ringtheoretische Auswertung von Satz 1 sind nun folgende Ergebnisse wichtig:

(15) *Ist H ein Holoid, das die absteigende Teilerkettenbedingung erfüllt und in dem jedes Ideal ein Hauptideal ist, so ist H primkanonisch.*

Denn es ist H unter den gemachten Voraussetzungen nach (14) erst recht ein C^*-Holoid.

(16) *Ist H ein primkanonisches $^+$Holoid, das die absteigende Teilerkettenbedingung erfüllt, so ist jedes Ideal ein Hauptideal.*

Gilt die absteigende Teilerkettenbedingung, so existiert zunächst zu jeder nicht leeren Teilmenge M von H der ggT. Betrachtet man nämlich die Menge M' der gemeinsamen Vielfachen aller gemeinsamen Teiler von M, so genügt der Existenznachweis von $\bigcap M'$. — Auf Grund der absteigenden Teilerkettenbedingung besitzt M' nun zumindest ein minimales Element. Sind ferner a, b zwei solcher minimaler Elemente aus M', so ist auch $a \frown b$ ein solches und es muß $a = a \frown b = b = \bigcap M'$ sein. Ist weiter $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus H, so gilt $s \mid \mathfrak{a}t \rightarrow$ $\rightarrow s \mid \bigcap \mathfrak{a}t \rightarrow s \mid (\bigcap \mathfrak{a})t$. Somit muß $\bigcap \mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{a}$ gehören und $\mathfrak{a}$ das von $\bigcap \mathfrak{a}$ erzeugte Ideal, also Hauptideal sein.

Daß in primkanonischen $^+$Holoiden nicht notwendig jedes Ideal ein Hauptideal ist, beweist folgendes Beispiel: Betrachtet man die Menge der von 0 verschiedenen reellen Zahlen bezüglich $ab = \max(a, b)$ und bezeichnet mit A die Menge der negativen, mit B die Menge der positiven Zahlen, so gilt $A * B = B$ und es ist B kein Hauptideal. — Hiermit verlassen wir die Untersuchung primkanonischer Holoide und wenden uns noch einmal den halbkanonischen Holoiden zu.

In I, § 3, wurde behauptet, daß nicht jedes A′-Holoid halbkanonisch ist. Diese Behauptung wird bewiesen durch Abb. 1. Doch können wir durch eine Zusatzforderung erreichen, daß das A′-System in ein System übergeht, welches halbkanonische Holoide charakterisiert.

Fig. 1

Def. 4. *Wir nennen H ein A^*-Holoid, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(A_1^*) *Ist $tt' = a \in H$, so existiert ein Minimalpartner $\bar{t} \leq t'$ zu t in a.*

(A_2) *Es gilt die absteigende Teilerkettenbedingung bezüglich $<$.*

(A_3^*) *Gilt $a \lesssim bc$ und sind a, c minimalfremd, so folgt $a \lesssim b$.*

(A_3^*) ist also gleichbedeutend mit (A_3'). — Bevor wir nun nachweisen, daß das A^*-System charakteristisch ist für halbkanonische Holoide, erwähnen wir, daß (A_1^*) und (A_2) stets erfüllt sind, wenn die absteigende Teilerkettenbedingung bezüglich $<$ gilt. Ferner sei — vgl. den Beweis zu (29) — erwähnt, daß A′-Halbverbände stets A^*-Halbverbände sind. Daß alle B′-Holoide A^*-Holoide sind, ist fast unmittelbar klar.

Wir zeigen nun:

(17) *Ist (A_3^*) in H erfüllt und ist p ein Halbprimelement, sowie $a = \prod_{\nu=1}^{n} p_\nu$ ein Halbprimfaktorprodukt aus H mit $p \lesssim a$, so gibt es mindestens ein $p_\mu (1 \leq \mu \leq n)$ mit $p \mid p_\mu$.*

Denn dies folgt analog zu I, (12).

(18) *Ist H ein A^*-Holoid und $a = \prod_{\nu=1}^{n} p_\nu$ ein unverkürzbares Halbprimfaktorprodukt, so gilt für jedes ν $(1 \leq \nu \leq n)$: $p_\nu \lesssim a$.*

Denn dies folgt analog zu I, (26), unter Berücksichtigung von (A_1^*).

(19) *Ist H ein A^*-Holoid und a ein Element aus H, so besitzen alle unverkürzbaren Halbprimfaktorzerlegungen von a dieselben Basiselemente.*

Denn dies folgt aus (17) und (18).

(20) *Ist H ein A^*-Holoid und p^n eine unverkürzbare Halbprimfaktorpotenz, so sind höchstens die Elemente p^ν mit $0 \leq \nu \leq n$ Minimalteiler von p^n.*

Zu p^n ist nur $p^0 = e$, zu $p^0 = e$ nur p^n Minimalpartner in p^n. Es sei deshalb $e < t < p^n$, sowie $\bar{t}$ ein Minimalpartner zu t in p^n. Ist dann $\prod_{\varrho=1}^{r} t_\varrho$ eine Halbprimfaktorzerlegung von t und $\prod_{\sigma=1}^{s} \bar{t}_\sigma$ eine solche von $\bar{t}$, so läßt sich die wegen (19) eindeutig bestimmte unverkürzbare Halbprimfaktorzerlegung von p^n durch sukzessives Streichen aus $\prod_{\varrho=1}^{r} t_\varrho \prod_{\sigma=1}^{s} \bar{t}_\sigma$ gewinnen. Wegen $t < p^n$ muß daher p wenigstens einmal unter den $\bar{t}_\sigma$ vorkommen und somit $\bar{t}$ ein p^ν mit $1 \leq \nu \leq n$ sein, da für jedes σ gilt: $\bar{t}_\sigma \lesssim p^n \rightarrow \bar{t}_\sigma \leq p$.

(21) *Ist H ein A^*-Holoid und q^n eine unverkürzbare Halbprimfaktorpotenz, so gilt für jedes Halbprimelement p: $p \mid q^n \,\&\, pq^n > q^n \rightarrow p = q$.*

Ist etwa $pb = q^n$ und $b = \prod_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa$ eine Halbprimfaktorzerlegung von b, so läßt sich die nach (19) eindeutig bestimmte unverkürzbare Halbprimfaktorzerlegung von q^n durch sukzessives Streichen aus $p \prod_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa$ gewinnen. Wäre nun $p \neq q$, so ergäbe sich $pq^n = q^n$ mit Widerspruch zu $pq^n > q^n$.

(22) *Ist H ein A^*-Holoid und $a = \prod_{\sigma=1}^{s} p_\sigma^{n_\sigma}$ ein unverkürzbares Halbprimfaktorpotenzprodukt, so gilt für jedes $\sigma(1 \leqq \sigma \leqq s)$: $p_\sigma^{n_\sigma} \precsim a$.*

Wir können $s \geqq 2$ und $\sigma = s$ annehmen. Ist dann $b \leqq p_s^{n_s}$ und $b \prod_{\varrho=1}^{s-1} p_\varrho^{n_\varrho} = a$, sowie $\prod_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa$ eine Halbprimfaktorzerlegung von b, so läßt sich in $\prod_{\varrho=1}^{s-1} p_\varrho^{n_\varrho} \prod_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa$ natürlich kein p_ϱ streichen, da sonst $\prod_{\sigma=1}^{s} p_\sigma^{n_\sigma}$ verkürzbar wäre. Ferner muß aus diesem Grunde wenigstens ein $b_\varkappa$ stehen bleiben, wenn wir aus $\prod_{\varrho=1}^{s-1} p_\varrho^{n_\varrho} \prod_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa$ durch sukzessives Streichen eine unverkürzbare Halbprimfaktorzerlegung von a erzeugen. Wir dürfen daher eine unverkürzbare Halbprimfaktorzerlegung $a = \prod_{\varrho=1}^{s-1} p_\varrho^{n_\varrho} \prod_{\varkappa'=1}^{k'} b_{\varkappa'}$ annehmen, in der jedes $b_{\varkappa'}$ ein $b_\varkappa$ ist. Nach (19) ist weiter jedes $b_{\varkappa'}$ ein $p_\sigma(1 \leqq \sigma \leqq s)$, und ferner gilt für jedes $b_{\varkappa'}$: $b_{\varkappa'} \mid p_s^{n_s}$. Daher folgt nach (21) für alle $\varkappa'$: $b_{\varkappa'} = p_s$, was dann nach sich zieht: $p_s^{k'} = b' \leqq b \leqq p_s^{n_s}$ und damit $k' = n_s$, also $b = p_s^{n_s}$, da $\prod_{\sigma=1}^{s} p_\sigma^{n_\sigma}$ ja unverkürzbar ist. Die letzte Gleichung beweist dann unsere Behauptung.

Nun können wir zeigen:

(23) *Ist H ein A^*-Holoid, so ist H halbkanonisch.*

Sind $\prod_{\nu=1}^{n} p_\nu$ und $\prod_{\mu=1}^{m} q_\mu$ zwei unverkürzbare Halbprimfaktorzerlegungen desselben $a \in H$, so können wir nach (19) für diese Zerlegungen die Formen $\prod_{\sigma=1}^{s} p_\sigma^{m_\sigma}$ und $\prod_{\sigma=1}^{s} p_\sigma^{n_\sigma}$ annehmen. Hierbei gilt nun nach (22) für jedes σ: $p_\sigma^{m_\sigma} \precsim a$ und $p_\sigma^{n_\sigma} \precsim a$ und ferner sind nach (20) und (21) für jedes Paar $\sigma' \neq \sigma''$ die Potenzen $p_{\sigma'}^{m_{\sigma'}}, p_{\sigma''}^{n_{\sigma''}}$ minimalfremd. Hieraus folgt für jedes σ: $p_\sigma^{m_\sigma} = p_\sigma^{n_\sigma}$, also wegen der Unverkürzbarkeit von $p_\sigma^{m_\sigma}$ und $p_\sigma^{n_\sigma}$: $m_\sigma = n_\sigma$.

(24) *Ist H ein halbkanonisches Holoid, so ist H ein A^*-Holoid.*

Dies folgt aus der Tatsache, daß jedes halbkanonische Holoid ein B'-Holoid ist.

Wir formulieren nun den

Satz 2: *Es sind die beiden Aussagen äquivalent:*

1. *H ist ein A^*-Holoid und* 2. *H ist ein halbkanonisches Holoid.*

Satz 2 liefert ein 2. Kriterium für halbkanonische Holoide. Obwohl die Verschärfung (A_1^*) von (A_1) nur beim Beweis von (18) direkt herangezogen

wurde, ist sie entscheidend, was Fig. 1 beweist. — Es liegt noch die Frage nahe, ob die Bedingungen (A_1^*), (A_2), (A_3'') ein kanonisches Holoid charakterisieren. Daß dies nicht der Fall ist, lehrt I, Abb. 5, wodurch noch einmal die Bedeutung der Beweismethode von I, (27), herausgestellt wird.

§ 2. Verbandstheoretische Auswertung

Im folgenden sei V ein Verband mit 0, betrachtet bezüglich $\cup$. Da die Operation $\cup$ idempotent ist, ist ein Verband mit 0 genau dann $\cup$primkanonisch, wenn er $\cup$kanonisch ist. $\cup$Halbprimelemente bezeichnen wir in diesem Paragraphen in Anlehnung an die Literatur als *$\cup$irreduzible Elemente*.

Es folgt nun fast unmittelbar aus (13) und Satz 1:

(25) *Ein Verband mit* 0 *ist genau dann $\cup$kanonisch, wenn er die Bedingungen* (C_1) *und* (C_2) *erfüllt.*

Birkhoff nennt einen Verband *relativ $\cup$pseudokomplementär*, wenn zu je zwei Elementen a, b aus V ein $(a * b) = c$ existiert mit $a\,x \geqq b \leftrightarrow x \geqq c$. Aus (8) und dem Beweis von (9) folgt dann, daß ein Verband mit 0 genau dann relativ $\cup$pseudokomplementär ist, wenn er (C_1) erfüllt. Hiernach gilt der

Satz 3: *Ein Verband mit* 0 *ist genau dann $\cup$kanonisch, wenn er die Bedingung* (C_2) *erfüllt und relativ $\cup$pseudokomplementär ist.*

Wir beweisen einen weiteren Hilfssatz:

(26) *Erfüllt der Verband V das Gesetz* (M) *der Modularität und die Bedingung* (B_1) *oder aber das Gesetz* (D) *der Distributivität und die Bedingung* (A_1), *so erfüllt V auch die Bedingung* (C_1).

Gelten (M) und (B_1) und ist $\bar{t}$ der Minimumpartner zu t in a, so folgt: $t \cup \bar{t} \leqq t \cup t' \to t \cup \bar{t} = (t \cup \bar{t}) \cap (t \cup t') = t \cup [(t \cup \bar{t}) \cap t'] \to \bar{t} \leqq t'$.

Gelten (D) und (A_1) und ist $\bar{t}$ ein Minimalpartner zu t in a, so folgt: $t \cup \bar{t} \leqq t \cup t' \to t \cup \bar{t} = (t \cup \bar{t}) \cap (t \cup t') = t \cup (\bar{t} \cap t') \to \bar{t} \cap t' = \bar{t} \to \bar{t} \leqq t'$.

Aus (5) folgt, daß jeder $\cup$kanonische Verband distributiv, also auch modular ist. Somit gilt der

Satz 3': *Ein Verband mit* 0 *ist genau dann $\cup$kanonisch, wenn er die Bedingungen* (B_1), (C_2), (M) *oder aber die Bedingungen* (A_1), (C_2), (D) *erfüllt.*

Eine verbandstheoretische Charakterisierung der $\cup$halbkanonischen Verbände wird uns nicht in dem Maße gelingen, wie dies in Satz 3 für die $\cup$kanonischen Verbände möglich war, doch können wir den Begriff der Minimumfremdheit ersetzen durch ein mehr verbandstheoretisches Kriterium. Hierzu geben wir:

Def. 5. *Wir nennen zwei Elemente a, b eines Verbandes halbfremd, wenn das Gleichungssystem* (G) $\begin{matrix} (a \cap b) \cup x = a \\ (a \cap b) \cup y = b \end{matrix}$ *nur die triviale Lösung* $\begin{matrix} x = a \\ y = b \end{matrix}$ *hat.*

Es gilt nun:

(27) *Erfüllt der Verband V die Bedingung* (B_1), *so sind zwei Elemente a, b genau dann halbfremd, wenn sie minimumfremd sind.*

Zunächst folgt aus (B_1) die Existenz einer 0. Ist nämlich etwa t Minimumpartner zu a in a, so ist t natürlich ein minimales Element von V, also auch $t = 0$. Sind nun a, b minimumfremd, so kann (G) nur die triviale Lösung $\begin{matrix} x = a \\ y = b \end{matrix}$ haben. Denn wäre etwa $(a \cap b) \cup t = a$ mit $t < a$, so besäße t in a einen Minimumpartner $\bar{t} \neq 0$ mit $\bar{t} \leqq a \cap b$, also $0 \neq \bar{t} \lneqq a \;\&\; \bar{t} \leqq b$. — Sind a, b halbfremd, so kann außer 0 kein Teiler von a Minimumteiler von b sein und außer 0 kein Teiler von b Minimumteiler von a sein. Wäre nämlich etwa $0 \neq t \lneqq a \;\&\; t \leqq b$, also auch $t \leqq a \cap b$, so würde für den Minimumpartner $\bar{t}$ zu t in a folgen: $a = t \cup \bar{t} \leqq$ $\leqq (a \cap b) \cup \bar{t} \leqq (a \cap b) \cup a = a$, also $(a \cap b) \cup \bar{t} = a$ mit $\bar{t} < a$, da t ja Minimumpartner zu einem $t' < a$ in a ist.

(27′) *Zwei $\cup$irreduzible Elemente p, q sind in jedem Verband mit 0 genau dann halbfremd, wenn sie minimum-, bzw. minimalfremd sind.*

Sind p, q halbfremd, so kann nur dann $p \leqq q \vee q \leqq p$ gelten, wenn $p = 0 \vee q = 0$ ist. Wäre nämlich etwa $p \leqq q \;\&\; p \neq 0$, so gäbe es ein $a < p$ mit $(p \cap q) \cup a = p$. — Sind p, q minimum-, bzw. minimalfremd und gilt $p = 0 \vee q = 0$, so hat (G) nur die triviale Lösung. Sonst gilt $p \nleqq q \;\&\; q \nleqq p$, also $p \cap q < p \;\&\; p \cap q < q$, weshalb auch in diesem Falle (G) nur die triviale Lösung hat, da p, q $\cup$irreduzibel sind.

Wir beweisen nun eine wichtige Beziehung:

(28) *Erfüllt der Verband V das Gesetz der Distributivität, so erfüllt er auch die beiden folgenden Gesetze:*

(A_v) *Gilt $a \lesssim b \cup c$ und sind a, c halbfremd, so folgt $a \lesssim b$*[5];

(B_v) *Gilt $a \lneqq b \cup c$ und sind a, c halbfremd, so folgt $a \lneqq b$.*

Es folgt aus (D): $\begin{matrix} a \lesssim b \cup c \\ a \lneqq b \cup c \end{matrix} \to a \cap (b \cup c) = a = (a \cap b) \cup (a \cap c)$, also da a, c halbfremd sind: $a = a \cap b$, d. h. $a \leqq b$. Es sei nun a $\begin{matrix}\text{Minimal-} \\ \text{Minimum-}\end{matrix}$ partner zu t in $b \cup c$. Dann gilt weiter: $a \cup (b \cap t) = (a \cup b) \cap (a \cup t) = b \cap (b \cup c) = b$ und ist a' irgendein Partner zu $b \cap t$ in b, so folgt: $a \cup t = a \cup (b \cap t) \cup t$ $= a' \cup (b \cap t) \cup t = a' \cup t$, also $\begin{matrix} a' \nless a \\ a \leqq a' \end{matrix}$ und damit $\begin{matrix} a \lesssim b \\ a \lneqq b \end{matrix}$.

Weiter folgt:

(29) *Ist V ein Verband mit 0, in dem die Bedingungen (A_1), (A_2), (A_v) erfüllt sind, so gelten in V auch die Bedingungen (B_1), (B_2), (B_v).*

Wir weisen zunächst die Gültigkeit von (B_1) nach. Für $t = a$ ist nichts zu zeigen. Es sei deshalb $t < a$ und $\bar{t} \neq 0$ ein Minimalpartner zu t in a, sowie $\bar{t} = \bigcup_{\varrho=1}^{r} \bar{t}_\varrho$ eine Zerlegung gemäß I, (11). Dann kann, da $\bigcup_{\varrho=1}^{r} \bar{t}_\varrho$ unverkürzbar und $\bar{t}$ ein Minimalpartner zu t in a ist, für kein $\bar{t}_\varrho$ gelten: $\bar{t}_\varrho \leqq t$. Also muß nach (17) und (27′) für alle $\bar{t}_\varrho$ die Relation erfüllt sein: $\bar{t}_\varrho \leqq t'$, woraus dann $\bar{t} \leqq t'$ und damit die Gültigkeit von (B_1) folgt. (B_2) ergibt sich aus (A_2), das Erfülltsein von (B_v) aus (B_1) und (A_v).

---

[5]) Der Leser möge beachten, daß $\lesssim$ nicht die "*cover-relation*" ist.

Aus (27) und (29) folgt unter Berücksichtigung von I, Satz 2, der

Satz 4: *Ein Verband mit 0 ist genau dann* $\cup$*halbkanonisch, wenn er die Bedingungen* (A_1), (A_2), (A_v) *oder aber die Bedingungen* (B_1), (B_2), (B_v) *erfüllt.*

Ein $\cup$kanonischer Verband ist u. a. charakterisiert durch die Eigenschaften (A_1), (A_2), (D), ein $\cup$halbkanonischer Verband durch die Eigenschaften (A_1), (A_2), (A_v). Ferner gilt (D) $\to$ (A_v). Durch diese Beziehungen dürfte das Verhältnis zwischen den $\cup$kanonischen und den $\cup$halbkanonischen Verbänden am klarsten zum Ausdruck kommen. — Ein $\cup$kanonischer Verband ist stets distributiv, ein $\cup$halbkanonischer Verband ist nicht einmal notwendig modular (vgl. I, Abb. 4). Doch gilt:

(30) *Ist V ein* $\cup$*halbkanonischer Verband, so ist jeder modulare Unterverband distributiv. Genauer folgt dies schon aus* (B_1).

Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es einen modularen, nicht distributiven Unterverband von V, also (vgl. [7], S. 43 und 46) einen Unterverband von V, wie er in Abb. 2 dargestellt ist. In diesem würde dann für den Minimumpartner t von b in s gelten: $t \leqq a \mathbin{\&} t \leqq c \to t \leqq a \cap c = r \to b \cup t = b$ mit Widerspruch zu $b \cup t = s$.

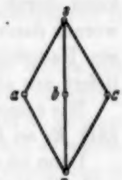
Fig. 2

Abschließend erwähnen wir die fast selbstverständliche Tatsache, daß ein Verband ohne 0 genau dann $\cup$(halb-) kanonisch ist, wenn der um 0 erweiterte Verband es ist, und daß die Betrachtungen dieses Paragraphen natürlich analog bezüglich $\cap$ gelten.

§ 3. Ringtheoretische Auswertung

Um Satz 1 auf Ringe übertragen zu können, gehen wir aus von *speziellen Ringen*, d. h. von kommutativen Ringen mit Einselement. Ring schlechthin werde im folgenden stets als spezieller Ring verstanden. Sei R ein Ring. Dann nennen wir $a \in R$ einen *Einsteiler*, wenn es ein x aus R gibt mit $a x = 1$. Bekanntlich bilden die Einsteiler eines Ringes eine abelsche Gruppe. Wir nennen $a \in R$ einen *Nullteiler*, wenn es ein $y \neq 0$ aus R gibt mit $a y = 0$. Ist $a \in R$ kein Nullteiler, so heißt a *regulär* und es gilt bekanntlich für jedes reguläre $a \in R$: $a x = a y \to x = y$. — Einsteiler bezeichnen wir vorzugsweise mit ε oder ähnlich. Gibt es einen Einsteiler mit $a\varepsilon = b$, so schreiben wir $a = b$ und sagen, a und b seien *assoziiert*; gilt $a \mid b \mathbin{\&} b \mid a$, so schreiben wir $a \sim b$ und sagen, a und b seien *äquivalent*. Man bestätigt leicht, daß assoziierte Elemente stets äquivalent sind und daß $=$ und $\sim$ *Kongruenzrelationen* bezüglich der Multiplikation des Ringes sind. Gilt $a \mid b \mathbin{\&} a \nsim b$, so schreiben wir $a \parallel b$ und sagen, a sei *echter Teiler* von b. Als *Halbprimelement* bezeichnen wir jedes $p \in R$ mit $p \sim ab \to p \sim a \vee p \sim b$; als *Primelement* bezeichnen wir jedes $p \in R$ mit $p \mid ab \to p \mid a \vee p \mid b$. Analog I, Def. 1, folgt: $a \parallel p \to ap \sim p$ und damit der Zusammenhang: $p \in R$ ist genau dann ein Halbprimelement, wenn gilt: $a \parallel p \mathbin{\&} b \parallel p \to ab \parallel p$. Weiter folgt fast unmittelbar, daß jedes Primelement ein Halbprimelement ist. Als *nicht triviale* Teiler von $a \in R$ bezeichnen wir alle $b \in R$ mit $1 \parallel b \parallel a$. Besitzt das Halbprimelement p einen nicht trivialen Teiler, so nennen wir es *reduzibel*, sonst *irreduzibel*. Mit p ist auch jedes zu p äquivalente $a \in R$

ein (ir-)reduzibles Halbprimelement. — Die Klasse von $a \in R$ bezüglich $\sim$ bezeichnen wir mit $\boldsymbol{a}$, das von $\sim$ erzeugte, bezüglich der Multiplikation homomorphe Bild von R mit $\boldsymbol{R}$. Allgemein bezeichnen wir mit $\boldsymbol{A}$ die Menge der Bilder von A in $\boldsymbol{R}$, wenn A eine nicht leere Teilmenge von R ist. $\boldsymbol{R}$ ist offenbar ein Holoid, und es gilt: $a \mid b \leftrightarrow \boldsymbol{a} \leqq \boldsymbol{b}$ sowie $a \parallel b \leftrightarrow \boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$. Ersichtlich gehört zu $\boldsymbol{0}$ lediglich die 0, während zu $\boldsymbol{1}$ genau alle Einsteiler aus R gehören. — Bezüglich der Halbprimelemente gilt nun weiter: $p \in R$ ist genau dann ein (ir-) reduzibles (Halb-) Primelement in R, wenn $\boldsymbol{p}$ ein solches in $\boldsymbol{R}$ ist. — Für die Ideale von R und $\boldsymbol{R}$ gilt: Ist a ein v-Ideal von R, so ist $\boldsymbol{a}$ ein Ideal von $\boldsymbol{R}$; ist $\boldsymbol{a}$ ein Ideal aus $\boldsymbol{R}$, so bildet die Menge der Urbilder der Elemente aus $\boldsymbol{a}$ in R ein v-Ideal. — Wir nennen nun einen Ring R genau dann *primkanonisch (kanonisch, halbkanonisch)*, wenn $\boldsymbol{R}$ primkanonisch (kanonisch, halbkanonisch) ist, und wir werden zeigen, daß schon jeder halbkanonische Ring primkanonisch ist, daß also in R gilt: (pk) $\leftrightarrow$ (hpk) $\leftrightarrow$ (k) $\leftrightarrow$ (hk) und daß in diesen Ringen die Relationen $\sim$ und $\equiv$ gleichbedeutend sind. Ferner können wir beweisen, daß (C_2) in $\boldsymbol{R}$ ersetzt werden kann durch die Forderung der absteigenden Teilerkettenbedingung in $\boldsymbol{R}$, woraus dann nach (16) folgt, daß in (prim-) kanonischen Ringen jedes v-Ideal ein Hauptideal ist. Eine Verschmelzung der beiden letzten Eigenschaften liefert uns ein Kriterium für kanonische Ringe.

Wir zeigen nun:

(31) *Es sei R ein Ring. Gilt dann $a^2 \mid a$ und $a \sim b$, so folgt $a \equiv b$.*

Denn ist etwa $a^2 x = a$ und $au = b$, so folgt für $c = ax - 1 + axu : ac = b$ und $c \mid c \,\&\, c \mid b \mid a \rightarrow c \mid 1$.

(31′) *Es sei R ein Ring. Gilt dann $a^n \mid a^m \,\&\, n > m$, so folgt $a^m \equiv a^n$.*

Es ergibt sich aus unserer Voraussetzung $a^{m+1} \mid a^m$ und damit $(a^m)^2 \mid a^m$, also wegen $a^n \sim a^m$ nach (31) $a^m \equiv a^n$.

(32) *Es sei R ein Ring. Dann besitzt jedes $a \in R$, das kein Halbprimelement ist, eine Zerlegung $a = a_1 a_2$ mit echten Teilern a_1 und a_2.*

Es gibt ein Produkt bc mit $a \sim bc$ und $b \parallel a \,\&\, c \parallel a$. Ist dann etwa $a = bcd$ und $cd \parallel a \vee bd \parallel a$, so sind wir fertig. Sonst gilt $a \sim cd$ und $a \sim bd$, etwa $au = cd$ und $av = bd$, woraus folgt: $a = bcd = bau$ und $a = cbd = cav$, was zusammen $a = bcavu = (bc)\, a(vu)$, also $a^2 \mid a$ und damit $a \equiv bc$, etwa $a = bc\varepsilon$ mit $b \parallel a \,\&\, c\varepsilon \parallel a$ ergibt.

(32) kann auch so formuliert werden:

(32′) *Es sei R ein Ring. Dann ist $p \in R$ genau dann ein Halbprimelement, wenn gilt: $p = ab \rightarrow p \sim a \vee p \sim b$.*

(33) *Es sei R ein Ring. Ist dann p ein reduzibles Halbprimelement aus R, so ist p ein Nullteiler.*

Denn gilt $1 \parallel a \parallel p$, so ist $pa \sim p$, etwa $pax = p$ oder $p(ax - 1) = 0$ mit $ax - 1 \neq 0$ wegen $a \nmid 1$.

(34) *Es sei R ein Ring, sowie p ein Halbprimelement aus R. Dann ist jeder echte Teiler von p regulär.*

Ist $a \parallel p$, so gilt $ap \sim p$ und etwa $apx = p$. Ist weiter $ad = 0$, so gilt: $p \sim ap = a(p + d)$, also $p \mid p + d$ und somit $p \mid d$, etwa $d = py$. Dann folgt aber $d = py = axpy = axd = 0$.

(35) *Es sei R ein endlicher Ring. Dann ist jedes Halbprimelement irreduzibel.*

Denn ist p ein Halbprimelement, so bilden die endlich vielen regulären echten Teiler von p eine abelsche Gruppe, selbstverständlich mit der 1 des Ringes als Einheit.

(36) *Es sei R ein Ring. Dann ist $\boldsymbol{R}$ ein $^{+}$Holoid.*

Sind $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ zwei Primelemente aus $\boldsymbol{R}$, so genügt der Nachweis, daß aus $\boldsymbol{p} \not\leq \boldsymbol{q}$ & $\boldsymbol{q} \not\leq \boldsymbol{p}$ die Existenz von $\boldsymbol{p} \cap \boldsymbol{q}$ folgt, was sich so zeigen läßt: Ist $\boldsymbol{d}$ ein gemeinsamer Teiler von $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{q}$, also $\boldsymbol{d} < \boldsymbol{p}$ & $\boldsymbol{d} < \boldsymbol{q}$, so gilt in R: $d \| p$ & $d \| q$ und damit etwa $p = pdx$ oder $p(1-dx) = 0$, was $q \mid 1-dx$ bewirkt, etwa $qy = 1-dx$ oder $dx + qy = 1$, woraus sich wegen $d \mid q$ dann $d \mid 1$ oder $\boldsymbol{d} = 1$ ergibt.

(37) *Es sei R ein Ring. Dann gilt in $\boldsymbol{R}$:* $(B_1) \to (C_1)$.

Ist $\boldsymbol{t} \leq \boldsymbol{a}$ und $\bar{\boldsymbol{t}}$ der Minimumpartner zu $\boldsymbol{t}$ in $\boldsymbol{a}$, so gilt in R $t\bar{t} \sim a$. Gilt weiter $\boldsymbol{t}\bar{\boldsymbol{t}} \leq \boldsymbol{t}\boldsymbol{t}'$, so folgt $t\bar{t} \mid tt'$, also etwa $t\bar{t}x = tt'$ und damit $t(\bar{t}x - t' + \bar{t}) \sim a$. Hieraus ergibt sich $\bar{t} \mid \bar{t}x - t' + \bar{t}$, also $\bar{t} \mid t'$ und damit $\bar{\boldsymbol{t}} \leq \boldsymbol{t}'$.

(38) *Es sei R ein halbkanonischer Ring. Dann ist jedes Halbprimelement aus R ein Primelement.*

Es sei zunächst p reduzibel. Dann ist p nach (33) ein Nullteiler und es gilt in $\boldsymbol{R}$: $\boldsymbol{pc} = \boldsymbol{0}$ mit $\boldsymbol{c} < \boldsymbol{0}$. Hieraus folgt, daß $\boldsymbol{p}$ in der halbkanonischen Zerlegung von 0 als Faktor vorkommt. Es sei nun $p \mid ab$. Wäre dann $\boldsymbol{p} \not\subseteq \boldsymbol{ab}$, so käme $\boldsymbol{p}$ in der halbkanonischen Zerlegung von $\boldsymbol{ab}$ als Faktor nicht vor, und es würde gelten: $\boldsymbol{pab} = \boldsymbol{ab}$. Nun kann man aber die halbkanonische Zerlegung von 0 ausgehend von derjenigen von $\boldsymbol{ab}$ gewinnen, woraus der Widerspruch folgen würde, daß $\boldsymbol{p}$ in ihr nicht vorkäme. Es muß somit für reduzible Halbprimelemente gelten: $p \mid ab \to \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{ab} \to \boldsymbol{p} \subseteq \boldsymbol{ab} \to \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{b} \to p \mid a \vee p \mid b$. — Ist aber p ein irreduzibles Halbprimelement, so besitzt $\boldsymbol{p}$ höchstens den echten Teiler 1. Gilt dann $p \mid ab$ und $\boldsymbol{p} \subseteq \boldsymbol{ab}$, so sind wir fertig. Sonst folgt $\boldsymbol{pab} = \boldsymbol{ab}$ und damit $\boldsymbol{pb} \leq \boldsymbol{ab}$ und ist $\bar{\boldsymbol{t}}$ der nach (37) existierende Infimalpartner zu $\boldsymbol{b}$ in $\boldsymbol{bp}$, so gilt $\bar{\boldsymbol{t}} = 1$ oder $\bar{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{p}$, also $\boldsymbol{pb} = \boldsymbol{b}$ oder $\boldsymbol{bp} \leq \boldsymbol{ba} \to \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{a}$, in jedem Falle aber $p \mid a \vee p \mid b$.

Aus (37) und (38) folgt nun leicht:

(39) *Es sei R ein Ring. Dann sind die Aussagen äquivalent:*

1. *R ist primkanonisch*, 2. *R ist kanonisch*, 3. *R ist halbkanonisch.*

Wegen (37) und (38) kann (12) herangezogen werden, woraus dann die Behauptung folgt.

Die Vereinigungsmenge einer aufsteigenden Folge $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{a}_n \cdots$ von v-Idealen ist nicht notwendig wieder ein v-Ideal, was die unendlichen Booleschen Ringe zeigen, jedoch stets ein (Dedekindsches) Ideal.

Wir formulieren nun:

Def. 3'. *Es sei R ein Ring und $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus R. Dann nennen wir $\mathfrak{a}$ ein v^*-Ideal, wenn $\mathfrak{a}$ Vereinigungsmenge einer aufsteigenden Folge von v-Idealen ist.*

Dann lautet die entscheidende Definition dieses Paragraphen:

Def. 6. *Es sei R ein Ring. Dann nennen wir R einen Z-Ring, wenn R die folgende Bedingung erfüllt:*

(Z) *Jedes v^*-Ideal ist ein Hauptideal.*

Ist R ein Z-Ring, so ist jedes v-Ideal ein Hauptideal, und es gilt die aufsteigende Teilerkettenbedingung für Hauptideale, da jedes Hauptideal ein v-Ideal und jedes v^*-Ideal ein Hauptideal ist. Daraus ergibt sich wegen (15):

(40) *Ist R ein Z-Ring, so ist R kanonisch.*

(41) *Es sei R kanonisch und p ein reduzibles Halbprimelement aus R. Dann gilt $p^2 \mid p$.*

Da R ja primkanonisch ist, gilt für je zwei Halbprimelemente p, q: $p^m \mid aq^n \,\&\, p^m \nmid q^n \to p \mid a$. — Ist nun p ein reduzibles Halbprimelement, so existiert ein nicht trivialer Teiler a von p. Hieraus folgt $p \sim pa$, also etwa $p = pax$ oder $p(1-ax) = 0$. Wäre nun $p^2 \nmid p$, so hätten wir $p \mid 1 - ax$, etwa $py = 1 - ax$ oder $ax + py = 1$ und damit wegen $a \mid p$ auch $a \mid 1$ mit Widerspruch zur Voraussetzung.

(42) *Ist R ein kanonischer Ring, so ist R ein Z-Ring.*

Zunächst gilt in $\boldsymbol{R}$ die absteigende Teilerkettenbedingung bezüglich $<$, was so nachgewiesen werden kann: Ist $\boldsymbol{a} = \prod\limits_{\sigma=1}^{s} \boldsymbol{a}_\sigma^{n_\sigma}$ die (prim-) kanonische Zerlegung von $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}$ und sind $\boldsymbol{a}_{\sigma_1}, \boldsymbol{a}_{\sigma_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\sigma_r}$ genau alle reduziblen Elemente unter den $\boldsymbol{a}_\sigma$, so setzen wir $\sum\limits_{\varrho=1}^{r} n_{\sigma_\varrho} = \varrho(\boldsymbol{a})$ und es gilt wegen (41) $\varrho(\boldsymbol{a}) = r$. Weiter setzen wir $\sum\limits_{\sigma=1}^{s} n_\sigma - r = \varrho'(\boldsymbol{a})$. Ist nun $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{a}_1 > \boldsymbol{a}_2 \cdots > \boldsymbol{a}_n \cdots$ eine Kette von Elementen aus $\boldsymbol{R}$, so folgt aus $\varrho(\boldsymbol{a}_{\nu+1}) = \varrho(\boldsymbol{a}_\nu) \geqq 1$ notwendig $\varrho'(\boldsymbol{a}_{\nu+1}) < \varrho'(\boldsymbol{a}_\nu)$, weshalb spätestens $\varrho(\boldsymbol{a}_{\varrho'(\boldsymbol{a})+1}) < \varrho(\boldsymbol{a})$ gelten muß, da in R jeder echte Halbprimteiler eines Halbprimelementes nach (34) regulär und somit nach (33) irreduzibel ist. Bei sukzessiver Anwendung dieses Schlußverfahrens ergibt sich schließlich für ein m: $\varrho(\boldsymbol{a}_m) = 0$, weshalb die Kette dann spätestens bei $\boldsymbol{a}_{m+\varrho'(\boldsymbol{a}_m)}$ abbricht. — Aus dem Erfülltsein der absteigenden Teilerkettenbedingung in $\boldsymbol{R}$ folgt nach (16), daß jedes Ideal in $\boldsymbol{R}$, also auch jedes v-Ideal in R, ein Hauptideal ist, weshalb dann weiter die aufsteigende Teilerkettenbedingung für v-Ideale in R gilt, woraus insgesamt folgt, daß (Z) erfüllt ist.

Wir beweisen nun die angekündigte, für uns sehr wesentliche Eigenschaft von Z-Ringen:

(43) *Ist R ein Z-Ring, so sind die Relationen $\sim$ und $\equiv$ gleichbedeutend.*

Sind p, q zwei Primelemente mit $pa = q \,\&\, qb = p$, so gilt $a \mid 1$ oder nach (41) $p^2 \mid p$, in jedem Falle also — man berücksichtige (31) — $p \equiv q$. — Es seien weiter p^m, q^n zwei äquivalente Primfaktorpotenzen mit $m \geqq 1 \,\&\, n \geqq 1$. Dann gilt zunächst $p \equiv q$. Ist hierbei $m = n$, so folgt unmittelbar $p^m \equiv q^n$, gilt aber — etwa — $m > n$, so folgt $q^m \mid p^m \mid q^n \to (q^n)^2 \mid q^n \to p^m \equiv q^n$ nach (31). — Für den Rest des Beweises bemerken wir vorweg folgendes: Ist a ein Einsteiler, so ist nichts zu zeigen. Sonst besitzt a wegen (32) und (Z) eine Primfaktorzerlegung $a = \prod\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu$. Sind hierin $p_{\nu'}$, $p_{\nu''}$ zwei Faktoren mit $p_{\nu''} \parallel p_{\nu'}$, so kann man $p_{\nu''}$ durch ein geeignetes ε ersetzen. Gilt $p_{\nu'} \sim p_{\nu''}$, so läßt sich $p_{\nu''}$ mit einem geeigneten ε durch $p_{\nu'}\varepsilon$ ersetzen. Daher können wir $a = \prod\limits_{\sigma=1}^{s} p_\sigma^{n_\sigma}$ mit

$p_{\sigma'} \mid p_{\sigma''} \to p_{\sigma'} = p_{\sigma''}$ und $m_\sigma \geqq 1 \, (1 \leqq \sigma \leqq s)$ annehmen. Wegen (31′) darf hierbei für jedes σ angenommen werden $\nu < m_\sigma \to p_\sigma^{m_\sigma} \nmid p_\sigma^\nu$. — Es sei nun $a \sim b$ und $a \equiv \prod\limits_{\sigma=1}^{s} a_\sigma^{n_\sigma}$, $b \equiv \prod\limits_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa^{m_\varkappa}$ seien zwei zu a, bzw. b assoziierte Darstellungen der oben konstruierten Art. Dann gilt $\prod\limits_{\sigma=1}^{s} a_\sigma^{n_\sigma} \sim \prod\limits_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa^{m_\varkappa}$ und es gibt zu jedem σ ein $\varkappa$ und umgekehrt mit $a_\sigma^{n_\sigma} \sim b_\varkappa^{m_\varkappa}$; also, da die $a_\sigma^{n_\sigma}$, bzw. $b_\varkappa^{m_\varkappa}$ Primfaktorpotenzen mit $n_\sigma \geqq 1$, bzw. $m_\varkappa \geqq 1$ sind, mit $a_\sigma^{n_\sigma} \equiv b_\varkappa^{m_\varkappa}$, woraus $a \equiv b$ folgt.

Aus (39), (40), (42) und (43) folgt nun der

Satz 5: *Es sind je zwei der folgenden Aussagen äquivalent:*

1. R ist ein Z-Ring; 2. R ist halbkanonisch; 3. R ist kanonisch; 4. R ist halbprimkanonisch; 5. R ist primkanonisch und 6. Es gilt in R $a \sim b \leftrightarrow a \equiv b$ und es existiert zu jedem Nichteinsteiler a aus R eine Halbprimfaktorzerlegung $a = \prod\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu$, in der sich kein p_ν durch ein ε ersetzen läßt. Ist weiter $a = \prod\limits_{\mu=1}^{m} q_\mu$ eine zweite Zerlegung von a dieser Art, so gilt $n = m$ und es gibt eine umkehrbar eindeutige Abbildung der p_ν auf die q_μ, so daß jedes p_ν assoziiert ist zu seinem Bild.

Für endliche Ringe gilt nun noch:

(44) *Ein endlicher Ring ist genau dann ein Z-Ring, wenn er ein Hauptidealring ist.*

Es genügt zu zeigen, daß in einem endlichen Z-Ring je zwei Elemente a, b ein Hauptideal erzeugen, woraus dann der Rest der Behauptung durch Induktion folgt. Dies ergibt sich so: Es existiert $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ und es sind die Relationen $\sim$ und $\equiv$ gleichbedeutend, so daß etwa $a'c = a$ und $b'c = b$ mit teilerfremden a', b' angenommen werden darf, was aus der Konstruktion des ggT in R folgt, da jedes Halbprimelement in R nach (35) irreduzibel ist. Gilt nun $a' \mid 1 \vee b' \mid 1$, so gibt es a fortiori eine Darstellung $a's + b't = 1$. Sonst gibt es ein n mit $a'^{n+1} \mid a'^n$, etwa $a'^n = a'^n a' u$ oder $a'^n(1 - a'u) = 0$. Da a', b' teilerfremd sind, folgt hieraus $b' \mid 1 - a'u$, etwa $b'v = 1 - a'u$ oder $a'u + b'v = 1$. In jedem Falle gibt es also eine Darstellung $a'x + b'y = 1$, was $a'cx + b'cy = ax + by = c$ nach sich zieht.

In (35) wurde gezeigt, daß jeder endliche Ring nur irreduzible Halbprimelemente besitzt. Wir wollen diesen Paragraphen abschließen mit einem Beispiel für einen Z-Ring mit reduziblen Halbprimelementen, wodurch sich Satz 5 als eine echte Verallgemeinerung des Cliffordschen Zerlegungsergebnisses für Ringe erweist.

Es sei $n \geqq 2$ eine natürliche Zahl und G^n der Ring der n-tupel ganzer Zahlen mit gliedweiser Addition, bzw. Multiplikation. Dann sind in G^n, wie man ohne Schwierigkeiten nachweist, genau alle diejenigen n-tupel reduzible Halbprimelemente, in denen genau eine Stelle von 0 besetzt ist, während alle übrigen von 1 oder —1 besetzt sind, und da G^n ein Hauptidealring ist, ist G^n erst recht ein Z-Ring.

§ 4. Verträglichkeit und Unabhängigkeit der aufgestellten Systeme

Über die Widerspruchsfreiheit der aufgestellten Systeme gilt das in I, § 4, Gesagte. Wir gehen in diesem Paragraphen noch kurz auf die Unabhängigkeit der herangezogenen Bedingungen ein. Hierzu geben wir zunächst eine Übersicht über die Beziehungen der einzelnen Bedingungen der $\cup$kanonischen Verbände untereinander. Es gilt:

$$\begin{array}{rl} & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad (\mathrm{A}_1) \leftarrow (\mathrm{B}_1) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \nearrow \\ (45) \qquad & (\mathrm{C}_1^*) \leftrightarrow (\mathrm{C}_1) \leftrightarrow \text{rpk.} \rightarrow (\mathrm{D}) \rightarrow (\mathrm{M}) \\ & (\mathrm{C}_2) \leftrightarrow (\mathrm{C}_2) \leftrightarrow (\mathrm{C}_2) \leftrightarrow (\mathrm{C}_2) \leftrightarrow (\mathrm{C}_2) \,. \end{array}$$

Schreiben wir für „A gilt nicht" $\bar{\mathrm{A}}$, so genügt es wegen (45) für den Unabhängigkeitsnachweis der für die Sätze 1, 3, 3′ aufgestellten Systeme, jeweils einen Verband anzugeben, der bezüglich $\cup$ gleichzeitig folgende Bedingungen erfüllt: (1.): (D) & (C_2) & $(\overline{\mathrm{A}_1})$; (2.): (B_1) & (C_2) & $(\overline{\mathrm{M}})$; (3.): (C_1) & $(\overline{\mathrm{C}_2})$.

Fig. 3

Ein Beispiel für (1.) liefert der Verband, der dargestellt wird durch I, Abb. 6.

Ein Beispiel für (2.) liefert der Verband der Fig. 3.

Ein Beispiel für (3.) liefert der Verband $P(N)$ aller Teilmengen der Menge der natürlichen Zahlen.

Daß das A*-System unabhängig ist, zeigen Fig. 1, denn hier gilt $(\overline{\mathrm{A}_1^*})$ & (A_2) & (A_3^*); $P(N)$, denn hier gilt (A_1^*) & $(\overline{\mathrm{A}_2})$ & (A_3^*); sowie Abb. 3, denn hier gilt (A_1^*) & (A_2) & $(\overline{\mathrm{A}_3^*})$ wegen $a \lesssim b \cup c$ & $a \not\lesssim b$ trotz der Minimalfremdheit von a, c.

Die Unabhängigkeit der für Satz 4 aufgestellten Systeme folgt so:

In I, Abb. 6, gelten die Bedingungen $\genfrac{}{}{0pt}{}{(\mathrm{A}_2)}{(\mathrm{B}_2)}$ und $\genfrac{}{}{0pt}{}{(\mathrm{D})}{(\mathrm{D})}$, also auch $\genfrac{}{}{0pt}{}{(\mathrm{A}_v)}{(\mathrm{B}_v)}$, nicht aber $\genfrac{}{}{0pt}{}{(\mathrm{A}_1)}{(\mathrm{B}_1)}$.

Weiter gelten im Beispiel zu (3.) die Bedingungen (C_1) und (daher auch) (D) und somit $\genfrac{}{}{0pt}{}{(\mathrm{A}_1)}{(\mathrm{B}_1)}$ und $\genfrac{}{}{0pt}{}{(\mathrm{A}_v)}{(\mathrm{B}_v)}$, nicht aber $\genfrac{}{}{0pt}{}{(\mathrm{A}_2)}{(\mathrm{B}_2)}$, da (C_2) nicht erfüllt ist.

Schließlich gelten im Verband der Abb. 3 die Bedingungen $\genfrac{}{}{0pt}{}{(\mathrm{A}_1)}{(\mathrm{B}_1)}$ und $\genfrac{}{}{0pt}{}{(\mathrm{A}_2)}{(\mathrm{B}_2)}$, nicht aber die Bedingungen $\genfrac{}{}{0pt}{}{(\mathrm{A}_v)}{(\mathrm{B}_v)}$. Denn es ist: $\genfrac{}{}{0pt}{}{a \lesssim b \cup c}{a \subseteq b \cup c}$ und es sind a, c halbfremd, doch gilt nicht $\genfrac{}{}{0pt}{}{a \lesssim b}{a \subseteq b}$.

Daß nicht jeder Ring ein Z-Ring ist, zeigen die unendlichen Booleschen Ringe, da in ihnen die aufsteigende Teilerkettenbedingung für Hauptideale nicht gilt.

Ist schließlich K der Restklassenkörper mod(2), so konstruiere man über K die Algebra mit der Multiplikationstafel $ee = e$, $ea = ae = a$, $eb = be = b$,

$aa = ab = ba = bb = 0$. Dann stellt man leicht fest, daß dieser Ring kein Hauptidealring ist[6]).

Berichtigung zur 1. Mitteilung

(Bd. 139, S. 184—196 (1960))

S. 186. 10. Z. v. u. lies $t'' \not\prec \bar{t}$ statt $t'' \not\prec t$;

S. 188. 8. Z. v. o. lies $t \leq \bar{\bar{t}}$ statt $t \leqq \bar{t}$;

S. 189. 9. Z. v. u. lies p^* statt p_*;

S. 192. 10. Z. v. u. lies a_0 ein $b_\varkappa$ statt a_0 genau ein $b_\varkappa$;

S. 195. 12. Z. v. o. lies $p|b$ statt $p|a$.

Literatur

[1] Balachandran, V. K.: On complete lattices. Proc. Am. Math. Soc. **6**, 548—553 (1955).

[2] Birkhoff, G.: Lattice theory. Am. Math. Soc. Coll. Publ. 129 und 142—143 (1948).

[3] Bosbach, B.: Charakterisierungen von Halbgruppen mit eindeutigen Halbprimfaktorzerlegungen. Math. Ann. **139**, 184—196 (1960).

[4] Clifford, A. H.: Arithmetic and idealtheory of commutative semigroups. Ann. Math. **39**, 594—610 (1938).

[5] Dilworth, R. P.: Lattices with unique irreducible decompositions. Ann. Math. **41**, 771—777 (1940).

[6] Dubreil, P.: Algèbre. Paris: Gauthier Villars 1954.

[7] Hermes, H.: Einführung in die Verbandstheorie. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1956.

[8] Hintzen, J.: Ein System von unabhängigen Axiomen für Halbgruppen mit eindeutigen Halbprimfaktorzerlegungen. Diss. Köln (1957).

[9] Klein, Fritz: Über einen Zerlegungssatz in der Theorie der abstrakten Verknüpfungen. Math. Ann. **106**, 114—130 (1931).

[10] Klein, Fritz: Gekoppelte Axiomensysteme in der Theorie der abstrakten Verknüpfungen. Math. Z. **37**, 39—60 (1933).

[11] Skolem, Th.: Theorems of divisibility in some semigroups. Norske Vid. Selsk. Forhdl. **24**, No. 10, 48—53 (1952).

[12] v. d. Waerden, B. L.: Algebra. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955.

[13] Ward, M.: Structure residuation. Ann. Math. **39**, 558—568 (1938).

(Eingegangen am 25. Dezember 1959)

---

[6]) Dieses Beispiel verdankt der Verfasser einer freundlichen Mitteilung von Herrn Prof. Dr. Pickert (Tübingen).

DEGEN, W.
Math. Annalen 141, 210—236 (1960)

Über konjugierte Netze, deren Tangentenkongruenzen in linearen Komplexen liegen

Von

WENDELIN DEGEN in Freiburg i. Br.

Die konjugierten Netze des dreidimensionalen projektiven Raumes mit der im Titel genannten Eigenschaft wurden 1911 von E. J. WILCZYNSKI[1]) entdeckt und untersucht; wir wollen sie deshalb kurz Wilczynski-Netze nennen. Seither waren sie immer wieder Gegenstand geometrischer Untersuchungen, so daß ihre wichtigsten Eigenschaften bekannt sind. Wenn wir uns dieser Figur erneut zuwenden, so deshalb, weil wir einige der vielfachen Beziehungen zu anderen Klassen konjugierter Netze aufzeigen wollen und dabei zu einer Reihe von Kennzeichnungen gelangen.

Zur analytischen Behandlung verwenden wir das halbinvariante Differentiationsverfahren von G. BOL[2]). Die Formeln sind im ersten Abschnitt zusammengestellt. Im zweiten geben wir einen Überblick über die hauptsächlichsten projektiven[3]) Eigenschaften der Wilczynski-Netze. Als neuer Gesichtspunkt ergibt sich dabei die Existenz der adjungierten[4]) Wilczynski-Netze, und zwar in sehr einfacher Weise als projektive Bilder des Ausgangsnetzes, wobei die Projektivitäten einer ausgezeichneten Gruppe angehören.

Im dritten Abschnitt wenden wir uns denjenigen konjugierten Netzen zu, deren erste Achsen einer linearen Kongruenz angehören. Es zeigt sich nämlich, daß nicht nur die Wilczynski-Netze diese Eigenschaft haben. Es ergibt sich außerdem eine interessante Beziehung zu bestimmten nichtkonjugierten Netzen auf einer Quadrik.

Der vierte Abschnitt ist solchen konjugierten Netzen gewidmet, deren Laplace-Transformierte spezielle Lagen einnehmen. Als Hauptergebnis erhalten wir: *Liegen die entsprechenden Punkte von mindestens fünf aufeinanderfolgenden Laplace-Transformierten gerader Ordnung auf einer Geraden, so sind (unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen) sämtliche Netze der betrachteten Laplace-Kette Netze von* WILCZYNSKI.

Schließlich wird im fünften Abschnitt eine mit einem beliebigen (nicht harmonischen) konjugierten Netz verknüpfte Flächenschar eingeführt, die für

---

[1]) Vgl. [18]. Die eckigen Klammern weisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit hin.

[2]) Siehe [1].

[3]) Metrische Eigenschaften werden in [7] bis [9] und [10] bis [13] behandelt.

[4]) Sie wurden im Spezialfall der SU-Netze von B. SU [16] eingeführt und "associated nets" genannt. Wegen der anderweitigen Verwendung der Bezeichnung „assoziiertes Netz" sollen sie „adjungiert" heißen.

die Wilczynski-Netze in die Schichtflächen[5]) der ersten Achsen übergeht. Unter anderem zeigen wir: *Die Eigenschaft, daß die dem Ausgangsnetz entsprechenden Netze auf diesen sogenannten Transversalflächen gemeinsame erste Achsen haben, charakterisiert diejenigen konjugierten Netze, deren Laplace-Transformierte (1. Ordnung) zweiseitig gerichtete Netze von* Rozet *im Sinne von* S. Finikow[6]) *sind.* Durch verschiedenartige Zusatzvoraussetzungen gelangen wir von hier aus zu Kennzeichnungen der Wilczynski-Netze.

1. Voraussetzungen und Kalkül. Es sei $\mathfrak{x}(u, v)$ ein nichtentartetes konjugiertes Netz in einem dreidimensionalen projektiven Raum, d. h. der Vektor $\mathfrak{x} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ beschreibt in Abhängigkeit der Parameter u, v ein Flächenstück $(\mathfrak{x})$[7]), auf dem zwei Scharen von Netzkurven gegeben sind, und es gelten folgende Bedingungen:

(a) $(\mathfrak{x})$ enthält keine parabolischen Punkte,

(b) durch jeden Punkt von $(\mathfrak{x})$ geht genau eine Kurve jeder Schar,

(c) die Netzkurven berühren an keiner Stelle die Asymptotenlinien,

(d) die Tangenten an die Netzkurven trennen die Schmiegtangenten harmonisch.

Ein Netz mit den Eigenschaften (a), (b), (c) heiße *nichtentartet*, ein solches mit der Eigenschaft (d) *konjugiert*.

Die Tangentenkongruenzen der beiden Kurvenscharen auf $(\mathfrak{x})$ besitzen außer der gemeinsamen Brennfläche $(\mathfrak{x})$ noch je eine weitere, von $(\mathfrak{x})$ verschiedene Brennfläche $(\mathfrak{x}_1)$ bzw. $(\mathfrak{x}_2)$. Da das Netz nach Voraussetzung nichtentartet ist, sind die Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ an jeder Stelle linear unabhängig; sie spannen die Tangentenebene von $(\mathfrak{x})$ auf.

Die dem Ausgangsnetz entsprechenden Netze auf $(\mathfrak{x}_1)$ und $(\mathfrak{x}_2)$ sind ebenfalls konjugiert; man nennt sie die Laplace-Transformierten (1. Ordnung) von $(\mathfrak{x})$. Wir wollen ein konjugiertes Netz *regulär* nennen, wenn es selbst und seine beiden Laplace-Transformierten nichtentartet sind. Im folgenden setzen wir immer voraus, daß die betrachteten Netze regulär sind.

Hiernach schneiden sich die beiden Tangentenebenen von $(\mathfrak{x}_1)$ und $(\mathfrak{x}_2)$ in einer Geraden durch $\mathfrak{x}$ — man nennt sie die erste Achse —, die nicht in der Tangentenebene von $(\mathfrak{x})$ liegt. Auf ihr bestimmen wir denjenigen Punkt $\mathfrak{y}$ (Punkt von Slotnick), der zusammen mit $\mathfrak{x}$ die beiden Brennpunkte dieser Geraden harmonisch trennt. Die vier Punkte $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}$ definieren an jeder Stelle ein mit unserm Netz projektiv invariant verbundenes Tetraeder, das wir als Begleittetraeder wählen.

---

[5]) Da die Wilczynski-Netze spezielle R-Netze sind, sind die beiden Achsenkongruenzen ein schichtbildendes Paar.

[6]) Vgl. [6] (oder Abschnitt 5 der vorliegenden Arbeit).

[7]) In der Ebene der Parameter u, v sei $\mathfrak{G}$ ein einfach zusammenhängendes offenes Gebiet, in dem die Koordinatenfunktionen $x_i(u, v)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ analytisch sind. Jedes Wertepaar u, v aus $\mathfrak{G}$ wird im folgenden *Stelle* genannt. Alle auftretenden Größen sind von u, v abhängig, ohne daß dies im einzelnen durch die Bezeichnung jedesmal hervorgehoben wird. Ein Vektor in Klammern bedeutet die von ihm in Abhängigkeit von u, v aus $\mathfrak{G}$ beschriebene Fläche.

Wir übernehmen von G. BOL das halbinvariante Differentiationsverfahren und das in diesem Kalkül aufgestellte Formelsystem für konjugierte Netze[8]). Jedes reguläre konjugierte Netz ist Lösung eines Systems der folgenden Art:

Ableitungsgleichungen:

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_1\,, \qquad \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_2\,, \tag{1.1}$$

$$\mathfrak{x}_{11} = a(\mathfrak{y} + r\mathfrak{x})\,, \qquad \mathfrak{x}_{12} = k\mathfrak{x}\,, \tag{1.2}$$

$$\mathfrak{x}_{21} = h\mathfrak{x}\,, \qquad \mathfrak{x}_{22} = e(\mathfrak{y} - r\mathfrak{x})\,, \tag{1.3}$$

$$\mathfrak{y}_1 = r\mathfrak{x}_1 + m\mathfrak{x}_2 - (m_2 + r_1)\,\mathfrak{x}\,, \qquad \mathfrak{y}_2 = l\mathfrak{x}_1 - r\mathfrak{x}_2 - (l_1 - r_2)\,\mathfrak{x}\,; \tag{1.4}$$

Integrierbarkeitsbedingungen:

$$a_2 = 0\,, \quad e_1 = 0\,, \tag{1.5}$$

$$k_1 + a(l_1 - 2r_2) = 0\,, \quad h_2 + e(m_2 + 2r_1) = 0\,, \tag{1.6}$$

$$r_{12} + r_{21} + m_{22} - l_{11} = r(k - em + h - al)\,; \tag{1.7}$$

Regularitätsvoraussetzungen:

$$aekhlm \neq 0\,, \quad (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}) \neq 0\,. \tag{1.8}$$

Umgekehrt stellt auch jede Lösung von (1.1) bis (1.8) ein reguläres konjugiertes Netz dar; insbesondere ist durch Vorgabe der Größen a, e, h, k, m, l, r, die in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ der Parameterebene analytisch sind und den Bedingungen (1.5) bis (1.8) genügen, das zugehörige Netz bis auf Projektivitäten eindeutig bestimmt.

Das hier verwendete Differentiationsverfahren von G. BOL hat den besonderen Vorteil, daß die Ableitung einer beliebigen Halbinvarianten, d. i. eine Größe G (Skalare Funktion, Vektor oder Pfaffsche Form), die bei einer Umnormung

$$\mathfrak{x}^* = \varrho_0\mathfrak{x}\,, \quad \mathfrak{x}_1^* = \varrho_1\mathfrak{x}_1\,, \quad \mathfrak{x}_2^* = \varrho_2\mathfrak{x}_2 \tag{1.9}$$

($\mathfrak{y}$ wird so umgenormt, daß die Determinante $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{y})$ konstant bleibt) das Transformationsverhalten

$$G^* = \varrho_0^{c_0}\varrho_1^{c_1}\varrho_2^{c_2}G \qquad (c_i \text{ rat. Zahlen; } \textit{Gewicht} \text{ v. } G) \tag{1.10}$$

zeigt, wieder halbinvariant ist, und deshalb überhaupt nur mit halbinvarianten Größen gearbeitet zu werden braucht. Da

$$\breve{d}G = dG + (c_0\pi_0 + c_1\pi_1 + c_2\pi_2)\,G = \omega_1 G_1 + \omega_2 G_2 \tag{1.11}$$

(mit geeigneten Reebschen Formen π_i und halbinvarianten Formen ω_1, ω_2) gesetzt wird, sind die gemischten zweiten Ableitungen nicht vertauschbar, vielmehr gilt die *Vertauschungsregel*

$$G_{21} - G_{12} = [c_0(h - k) + c_1(k - al) + c_2(em - h)]\,G\,. \tag{1.12}$$

---

[8]) Siehe [1]. In den folgenden Formeln ist insofern gegenüber [1] eine Spezialisierung vorgenommen, als hier der Punkt $\mathfrak{y}$ auf der ersten Achse festgelegt ist. Analytisch hat dies $p + q = 0$ zur Folge. Es wurde $p - q = 2r$ gesetzt. Diese Größe r hat jedoch mit der in [1] (5.48) definierten nichts zu tun.

Die Gewichte der einzelnen Halbinvarianten entnimmt man der Tabelle:

(1.13)

	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{x}_1$	$\mathfrak{x}_2$	$\mathfrak{y}$	ω_1	ω_2	a	e	h	k	l	m	r
c_0	1	0	0	−1	1	1	0	0	−2	−2	−2	−2	−2
c_1	0	1	0	−1	−1	0	3	1	1	1	−2	0	−1
c_2	0	0	1	−1	0	−1	1	3	1	1	0	−2	−1

Weiter ist der Kalkül so eingerichtet, daß einer Vertauschung der beiden Kurvenscharen des Netzes analytisch eine Vertauschung nach dem Schema

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{x} & \mathfrak{y} & \mathfrak{x}_1 & \omega_1 & a & h & l & r \\ 2 & \mathfrak{x} & \mathfrak{y} & \mathfrak{x}_2 & \omega_2 & e & k & m & -r \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

entspricht.

Viele Unterklassen konjugierter Netze werden durch einfache Beziehungen zwischen den Invarianten gekennzeichnet. Insbesondere gilt: Das Netz ($\mathfrak{x}$) ist dann und nur dann harmonisch, wenn

$$r = 0 \tag{1.15}$$

ist; dann und nur dann ein R-Netz, wenn

$$k = em\,, \quad h = al \tag{1.16}$$

gilt; ein Netz einer geschlossenen Laplace-Kette der Periode vier, wenn

$$r = 0\,, \quad k_1 = h_2 = 0\,, \quad l_1 = m_2 = 0 \tag{1.17}$$

erfüllt ist.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Wilczynski-Netze sind

$$k = em\,, \quad h = al\,, \quad r_1 = r_2 = 0\,, \quad m_1 = m_2 = 0\,, \quad l_1 = l_2 = 0\,. \tag{1.18}$$

Man erhält sie etwa so: Die Tangentenkongruenzen eines Wilczynski-Netzes sind definitionsgemäß in je einem linearen Komplex enthalten, also sind beides W-Strahlsysteme, das Netz somit ein spezielles R-Netz; es gelten die ersten beiden Gleichungen von (1.18). Man bestimmt nun im Geradenraum die Pole $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{h}$ der zu diesen beiden W-Strahlsystemen gehörigen Hyperebenen bezüglich der Kleinschen Quadrik. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} &= (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}) - r(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1) - m(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_2)\,, \\ \mathfrak{h} &= (\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}) + r(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_2) - l(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1)\,. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Es ist noch auszudrücken, daß diese Punkte fest sind. Die hierfür kennzeichnenden Bedingungen

$$\mathfrak{k}_1 \equiv \mathfrak{k}_2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{k}}\,, \quad \mathfrak{h}_1 \equiv \mathfrak{h}_2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{h}}\,^{*)} \tag{1.20}$$

liefern mit Hilfe der Ableitungsgleichungen die übrigen Beziehungen (1.18).

2. Wilczynski-Netze. Wir geben eine kurze Zusammenfassung der bekannten Eigenschaften dieser Netze: Den beiden linearen Komplexen, denen die beiden Tangentenkongruenzen eines Wilczynski-Netzes definitionsgemäß angehören, ist eine lineare Geradenkongruenz gemeinsam, in welcher sowohl die ersten wie auch die zweiten Achsen enthalten sind. Für die ersten Achsen kann man dies unmittelbar geometrisch einsehen: Betrachten wir einmal eine Netzkurve der

*) Die Schreibweise $\mathfrak{a} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n}$ bedeutet, daß $\mathfrak{a}$ in dem von $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ aufgespannten Vektorraum enthalten ist.

ersten Schar. Sie ist, da alle ihre Tangenten dem Komplex $\mathfrak{k}$ angehören, eine Komplexkurve. Bei einer solchen ist aber nicht nur die Tangente, sondern das volle Geradenbüschel in der Schmiegebene mit dem Berührpunkt als Zentrum im Komplex enthalten. Das Entsprechende gilt für die durch den betrachteten Netzpunkt hindurchgehende Kurve der zweiten Schar und den Komplex $\mathfrak{h}$. Weil nun die erste Achse beiden so entstehenden Büscheln gemeinsam ist, ist sie eine Gerade der linearen Schnittkongruenz beider Komplexe. Für die zweiten Achsen läßt sich dasselbe Ergebnis durch Dualisierung gewinnen.

Jedem linearen Geradenkomplex ist eindeutig ein Nullsystem zugeordnet, welches die Geraden des Komplexes fest läßt. Es sei N_1 (N_2) dasjenige, das die Geraden von $\mathfrak{k}$ (bzw. $\mathfrak{h}$) fest läßt. N_2 bildet nun die Punkte von $(\mathfrak{x}_2)$ auf die entsprechenden (zu den gleichen Parameterwerten gehörigen) Tangentenebenen von $(\mathfrak{x})$ ab. Wendet man hieraus das Nullsystem N_1 an, so werden diese auf die Punkte von $(\mathfrak{x}_1)$ abgebildet. Die beiden Laplace-Transformierten $(\mathfrak{x}_1)$ und $(\mathfrak{x}_2)$ eines Wilczynski-Netzes sind also projektiv äquivalent. Die Projektivität π, die die Abbildung vermittelt, ist das Produkt der beiden Nullsysteme:

$$(2.1) \qquad \pi = N_1 N_2\,, \quad \pi(\mathfrak{x}_2) = (\mathfrak{x}_1)\,.$$

Nun vertauscht das Nullsystem eines linearen Komplexes die Torsallinien einer in diesem Komplex enthaltenen Geradenkongruenz. Da hier zwei solche Nullsysteme angewandt werden und sich die Torsallinien der beiden Tangentenkongruenzen eines konjugierten Netzes entsprechen, führt die Projektivität π das $(\mathfrak{x}_2)$-Netz in das $(\mathfrak{x}_1)$-Netz über, ohne dabei die beiden Netzkurvenscharen zu vertauschen. Hieraus folgt weiter, daß die ganze Laplace-Kette, die das Ausgangsnetz $(\mathfrak{x})$ erzeugt, durch π auf sich abgebildet wird, und zwar so, daß dabei $(\mathfrak{x}^k)$ in $(\mathfrak{x}^{k+2})$ übergeht[10]). Die identische Abbildung, die Potenzen von π und ihre Inversen bilden somit eine Gruppe P von Projektivitäten der von $(\mathfrak{x})$ erzeugten Laplace-Kette auf sich.

Wir fragen nach dem Bild der Achsen bei der Projektivität π. Da beide Achsen an jeder Stelle beiden Komplexen angehören, gehen sie sowohl bei N_1 als auch bei N_2 in sich über und somit auch bei jeder Projektivität der Gruppe P. Beachten wir, daß $\mathfrak{x}$ auf der ersten Achse liegt, so folgt daraus, daß die entsprechenden Punkte aller Laplace-Transformierten gerader Ordnung ebenfalls mit dieser Geraden inzidieren. Ganz analog schließt man, daß die entsprechenden Punkte aller Laplace-Transformierten ungerader Ordnung auf der zweiten Achse liegen. Wegen der Projektivinvarianz der Eigenschaft einer Geraden an einer Stelle erste bzw. zweite Achse eines Netzes zu sein, sind die ersten und zweiten Achsen von $(\mathfrak{x})$ gleichzeitig auch erste und zweite Achsen aller Laplace-Transformierten von $(\mathfrak{x})$ mit geradzahliger Ordnung, während für die Laplace-Transformierten von $(\mathfrak{x})$ mit ungerader Ordnung die beiden Achsen von $(\mathfrak{x})$ ihre Rollen vertauschen.

Ein besonderer Fall liegt vor, wenn die Gruppe P die Ordnung 2 hat, also $\pi^2 = \varepsilon$ (identische Abbildung) ist. Da π^2 $(\mathfrak{x}^0)$ auf $(\mathfrak{x}^4)$ abbildet, ist jetzt $(\mathfrak{x})$ mit

---

[10]) $(\mathfrak{x}^k)$ bezeichnet die Laplace-Transformierte $|k|$-ter Ordnung, und zwar für $k > 0$ in 1-Richtung und für $k < 0$ in 2-Richtung. Das Ausgangsnetz wird dabei auch mit $(\mathfrak{x}^0)$ bezeichnet.

$(\mathfrak{x}^4)$ identisch und die Laplace-Kette schließt sich und hat die Periode vier. Da allgemein $(N_1 N_2)^{-1} = N_2 N_1$ gilt und hier $\pi^{-1} = \pi$ ist, ist das Produkt der beiden Nullsysteme vertauschbar. Daraus folgt, daß die Pole $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{h}$ der beiden Komplexe bezüglich der Kleinschen Quadrik konjugiert sind. Aus der Darstellung (1.19) erhält man, daß dies nur dann möglich ist, wenn $r = 0$ ist. Umgekehrt liest man aus den Ableitungsgleichungen ab, daß

$$\mathfrak{x}^2 (=) \mathfrak{x}_{11} (=) \mathfrak{y} + r\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{x}^{-2} (=) \mathfrak{x}_{22} (=) \mathfrak{y} - r\mathfrak{x}^{11}) \tag{2.2}$$

ist, denn $\mathfrak{x}^2$ liegt auf der 1-Tangenten von $(\mathfrak{x}_1)$ und zugleich auf grund der obigen Überlegungen auf der ersten Achse von $(\mathfrak{x})$ und Entsprechendes gilt für $\mathfrak{x}^{-2}$. Man erkennt, daß sich die Kette im Falle $r = 0$ tatsächlich mit der Periode vier schließt. Man nennt diese Laplace-Ketten nach ihrem Entdecker Su-Ketten[12]).

B. Su hat gezeigt, daß mit einer Su-Kette immer eine einparametrige Schar weiterer, mit der Ausgangskette projektiv äquivalenter Su-Ketten verbunden ist. Wir werden nun zeigen, wie dieses Ergebnis von B. Su als Spezialfall eines allgemeineren erhalten wird; darüber hinaus kann in sehr einfacher Weise das Problem der Bestimmung aller geschlossenen Wilczynski-Ketten gelöst werden.

Wir gehen von der linearen Kongruenz K aus, die den beiden Komplexen $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{h}$ gemeinsam ist. Von Entartungsfällen abgesehen, hat K zwei reelle oder konjugiert komplexe, zueinander windschiefe Leitlinien l, $\bar{l}$. Wir betrachten diejenige eingliedrige Gruppe G reeller Projektivitäten π_s, die l und $\bar{l}$ punktweise fest lassen. Das Bild eines Punktes P, der nicht auf l oder $\bar{l}$ liegt, ist dabei derjenige eindeutig bestimmte Punkt $\pi_s P$, der auf der Treffgeraden (das ist die Gerade von K, die durch P geht) liegt und bezüglich der beiden Treffpunkte L, $\bar{L}$ auf den Leitlinien l bzw. $\bar{l}$ das Doppelverhältnis

$$DV(L, \bar{L}, P, \pi_s P) = s \tag{2.3}$$

hat. Im Falle reeller Leitlinien ist s eine von Null verschiedene reelle Zahl und G ihrer multiplikativen Gruppe isomorph; im Falle konjugiert komplexer Leitlinien ist s komplex vom Betrag eins zu nehmen, denn nur so bleibt π_s reell. G ist in diesem letzten Fall der ebenen Drehgruppe isomorph, und man kann durch

$$\varphi = \frac{1}{2i} \ln s \tag{2.4}$$

einen reellen Parameter einführen. Zwei Werte φ_1, φ_2 gehören genau dann zum gleichen Element der Gruppe, wenn $\varphi_1 \equiv \varphi_2 (\operatorname{mod} \pi)$ ist.

Zur Anwendung dieser Sachverhalte auf die Wilczynski-Netze berechnen wir zunächst die Brennpunkte der ersten Achsen. Der Ansatz

$$\mathfrak{b} = A\mathfrak{x} + B\mathfrak{y}, \quad \check{d}\mathfrak{b} \equiv 0 \,(\operatorname{mod} \mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \tag{2.5}$$

führt auf

$$\begin{aligned} A\omega_1 + B(r\omega_1 + l\omega_2) &= 0 \\ A\omega_2 + B(m\omega_1 - r\omega_2) &= 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

[11]) $\mathfrak{a} (=) \mathfrak{b}$ bedeutet, daß die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ (mit von Null verschiedenem Faktor) proportional sind.

[12]) Vgl. [16].

mit der Lösung

(2.7) $m\omega_1^2 - 2r\omega_1\omega_2 - l\omega_2^2 = 0\,,\ \mathfrak{b} = B\{\mathfrak{y} + \sqrt{r^2+ml}\,\mathfrak{x}\},\ \hat{\mathfrak{b}} = \hat{B}\{\mathfrak{y} - \sqrt{r^2+ml}\,\mathfrak{x}\}$

für die Torsallinien und Brennpunkte. Wir haben also reelle, konjugiert komplexe oder zusammenfallende Leitlinien, je nach dem, ob $r^2 + ml$ positiv, negativ oder gleich Null ist. Daß diese Fallunterscheidung im ganzen Regularitätsgebiet einheitlich ist, kann man so einsehen: Handelt es sich um eine Su-Kette ($r = 0$), so ist ein Übergang in einen andern Fall nur möglich, wenn an einer Stelle $ml = 0$ ist, was aber im Widerspruch zur vorausgesetzten Regularität (1.8) steht. Liegt keine Su-Kette vor, so ist $r \neq 0$ und

$$I = \frac{ml}{r^2} \tag{2.8}$$

stellt eine absolute Invariante dar, für die nach (1.18) $I_1 = I_2 = 0$ gilt. *I ist also konstant.* Andererseits bestimmt I auch das Vorzeichen von $r^2 + ml$.

Im folgenden sei der Fall zusammenfallender Leitlinien ausgeschlossen; wir setzen also

$$r^2 + ml \neq 0 \tag{2.9}$$

voraus. Der noch verbleibende Entartungsfall, daß sich die Leitlinien schneiden, führt auf $ml = 0$, was wegen der Regularität nicht möglich ist.

Welches ist nun der Bildpunkt von $\mathfrak{x}$ bei einer der Projektivitäten der Gruppe G?

a) Es sei $r^2 + ml > 0$; dann ist $w = \sqrt{r^2+ml}$ reell, von Null verschieden und kann positiv angenommen werden. Wir wählen jetzt eine Normierung von $\mathfrak{b}, \hat{\mathfrak{b}}$, so daß

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{b} + \hat{\mathfrak{b}} \tag{2.10}$$

ist $\left(\text{man erreicht dies, indem man } B = -\hat{B} = \frac{1}{2w} \text{ setzt}\right)$. Nach (2.3) ist

$$\mathfrak{z} = s\mathfrak{b} + \hat{\mathfrak{b}} = \frac{s+1}{2}\mathfrak{x} + \frac{s-1}{2w}\mathfrak{y} \tag{2.11}$$

das Bild von $\mathfrak{x}$ bei π_s. Man kann nun zu $\mathfrak{z}$ ebenso wie zu $\mathfrak{x}$ die beiden Laplace-Transformierten $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ und den Punkt von SLOTNICK $\bar{\mathfrak{z}}$ berechnen; und zwar als Bilder der entsprechenden Punkte bezüglich $\mathfrak{x}$. Man findet zunächst

$$\bar{\mathfrak{z}} = \frac{s+1}{2}\mathfrak{y} + \frac{s-1}{2}w\mathfrak{x}\,. \tag{2.12}$$

Zur Berechnung von $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ nach (2.3) bestimmt man die Brennpunkte der zweiten Achsen; es sind dies die Punkte

$$\mathfrak{b}^* = B^*\left\{\frac{1}{m}(r+w)\,\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2\right\},\quad \hat{\mathfrak{b}}^* = \hat{B}^*\left\{\frac{1}{m}(r-w)\,\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2\right\}, \tag{2.13}$$

und daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}_1 &= \left(\frac{r}{w}\cdot\frac{s-1}{2} + \frac{s+1}{2}\right)\mathfrak{x}_1 + m\frac{s-1}{2w}\mathfrak{x}_2\\ \mathfrak{z}_2 &= \left(-\frac{r}{w}\cdot\frac{s-1}{2} + \frac{s+1}{2}\right)\mathfrak{x}_2 + l\frac{s-1}{2w}\mathfrak{x}_1\,.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Die Normierung dieser Vektoren haben wir so eingerichtet, daß für $s = 1$ die Vektoren der Urbildpunkte in der ursprünglichen Normierung erscheinen.

Die projektive Äquivalenz der Netze $(\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{z})$ drückt sich nun darin aus, daß für die Vektoren $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \bar{\mathfrak{z}}$ genau dieselben Ableitungsgleichungen gelten wie (1.1) bis (1.4), nämlich

$$
(2.15)\qquad
\begin{aligned}
\mathfrak{z}_1 &= \mathfrak{z}_1 & \mathfrak{z}_2 &= \mathfrak{z}_2\\
\mathfrak{z}_{11} &= a(\bar{\mathfrak{z}} + r\mathfrak{z}) & \mathfrak{z}_{12} &= k\mathfrak{z}\\
\mathfrak{z}_{21} &= h\mathfrak{z} & \mathfrak{z}_{22} &= e(\bar{\mathfrak{z}} - r\mathfrak{z})\\
\bar{\mathfrak{z}}_1 &= r\mathfrak{z}_1 + m\mathfrak{z}_2 - (m_2 + r_1)\,\mathfrak{z} & \bar{\mathfrak{z}}_2 &= l\mathfrak{z}_1 - r\mathfrak{z}_2 - (l_1 - r_2)\,\mathfrak{z}\,.
\end{aligned}
$$

Man erhält sie, indem man (2.11), (2.12), (2.14) ableitet, dabei (1.1) bis (1.4) verwendet und (1.18) berücksichtigt.

b) Es sei $r^2 + ml < 0$; dann ist $w = \sqrt{r^2 + ml} = iv$ und v reell, von Null verschieden und kann positiv angenommen werden. Wir verwenden nun den nach (2.4) eingeführten reellen Parameter φ. Es ist

$$
(2.16)\qquad \frac{s+1}{2} = e^{i\varphi}\cos\varphi\,,\quad \frac{s-1}{2w} = \frac{1}{v}\,e^{i\varphi}\sin\varphi\,.
$$

Setzt man dies in (2.11), (2.12), (2.14) ein und nimmt noch eine Umnormung mit dem gemeinsamen, von u, v unabhängigen Faktor $e^{-i\varphi}$ vor, so wird

$$
(2.17)\qquad
\begin{aligned}
\mathfrak{z} &= \cos\varphi\,\mathfrak{x} + \frac{1}{v}\sin\varphi\,\mathfrak{y}\,,\\
\mathfrak{z}_1 &= \left(\frac{r}{v}\sin\varphi + \cos\varphi\right)\mathfrak{x}_1 + \frac{m}{v}\sin\varphi\,\mathfrak{x}_2\\
\mathfrak{z}_2 &= \left(-\frac{r}{v}\sin\varphi + \cos\varphi\right)\mathfrak{x}_2 + \frac{l}{v}\sin\varphi\,\mathfrak{x}_1\\
\bar{\mathfrak{z}} &= \cos\varphi\,\mathfrak{y} + v\sin\varphi\,\mathfrak{x}\,.
\end{aligned}
$$

In beiden Fällen werden die Projektivitäten π_s durch

$$
(2.18)\qquad \pi_s\mathfrak{p} = \pi_s(p_0\mathfrak{x} + p_1\mathfrak{x}_1 + p_2\mathfrak{x}_2 + p_3\mathfrak{y}) = p_0\mathfrak{z} + p_1\mathfrak{z}_1 + p_2\mathfrak{z}_2 + p_3\bar{\mathfrak{z}}
$$

beschrieben.

Zusammenfassend ergibt sich: Mit einem Wilczynski-Netz, dessen erste Achsenkongruenz verschiedene Leitlinien hat, ist eine einparametrige Gruppe G projektiv äquivalenter Wilczynski-Netze gegeben (man nennt sie adjungiert[13])). G ist im Falle reeller Leitlinien der multiplikativen Gruppe der von Null verschiedenen reellen Zahlen, im Falle konjugiert komplexer Leitlinien der ebenen Drehgruppe isomorph. Die Projektivitäten von G sind im ersten Fall durch die Formeln (2.11), (2.12), (2.14), im zweiten Fall durch die Formeln (2.17), beidesmal zusammen mit (2.18) explizit gegeben.

Als Anwendung wollen wir die geschlossenen Wilczynski-Ketten bestimmen. Dazu eine wichtige Vorbereitung: Betrachten wir die Laplace-Transformierte 2. Ordnung von $(\mathfrak{x})$ an einer Stelle u_0, v_0:

$$
(2.19)\qquad \mathfrak{x}_0^2\ (=)\ \mathfrak{y}_0 + r_0\mathfrak{x}_0\,.
$$

---

[13]) Vgl. Fußnote 4.

Wir wenden auf $\mathfrak{x}_0$ die Projektivität π_0 von G an, die $\mathfrak{x}_0$ in $\mathfrak{x}_0^2$ überführt. Sie ist durch den Parameterwert

$$s_0 = \frac{r_0 + w_0}{r_0 - w_0} \tag{2.20}$$

gegeben. Nun ist

$$J = \frac{r + w}{r - w} \tag{2.21}$$

eine absolute Invariante, für die nach (1.18)

$$J_1 = J_2 = 0 \tag{2.22}$$

gilt. Also ist J konstant. Das bedeutet, daß die Projektivität, die zum Parameter

$$s = J \quad \text{bzw.} \quad \varphi = \frac{1}{2i} \log J \tag{2.23}$$

gehört, das *ganze* Netz $(\mathfrak{x})$ auf die Laplace-Transformierte $(\mathfrak{x}^2)$ abbildet. Wir haben das Ergebnis: *Die Gruppe P von Projektivitäten π^k, die $(\mathfrak{x}^l)$ auf $(\mathfrak{x}^{l+2k})$ abbilden, ist die von (2.23) erzeugte zyklische Untergruppe von G.*

Hierin ist insbesondere der Satz von FINIKOW[14]) enthalten: *Falls die entsprechenden Punkte der Laplace-Transformierten gerader Ordnung (in beiden Richtungen) konvergieren, sind die Brennpunkte $\mathfrak{b}, \hat{\mathfrak{b}}$ ihre Grenzpunkte.*

Aus obigem Satz folgt nämlich für die entsprechenden Punkte der Laplace-Transformierten $2k$-ter Ordnung die Darstellung

$$\mathfrak{x}^{2k} = J^k \mathfrak{b} + \hat{\mathfrak{b}} \qquad (k \text{ ganzzahlig})\,. \tag{2.24}$$

Da J nach (2.21) wegen (2.9) von 1 verschieden ist, kann J^k für $|k| \to \infty$ nur gegen 0 oder ∞ streben; in beiden Fällen ist der Grenzpunkt einer der Brennpunkte.

Weiter gestattet der obige Satz, die geschlossenen Wilczynski-Ketten anzugeben. Damit sich eine Wilczynski-Kette mit der Periode $2n$ (es kommen nur gerade Periodenzahlen in Frage) schließt, ist

$$J^n - 1 = 0\,, \quad J^m - 1 \neq 0 \text{ für } 0 < m < n \tag{2.25}$$

notwendig und hinreichend. Reelle Werte von J, die einer solchen Gleichung genügen, sind nur

$$J = 1\,, \quad J = -1\,. \tag{2.26}$$

Für den ersten Wert erhält man keine geschlossenen Ketten, da dieser die identische Abbildung charakterisiert. Der zweite Wert wird genau dann angenommen, wenn

$$r = 0 \tag{2.27}$$

ist. *Geschlossene Wilczynski-Ketten mit reellen Leitlinien sind immer Šu-Ketten; die Periodenzahl ist vier.*

Sind dagegen die Leitlinien konjugiert komplex, so gibt es zu jeder primitiven n-ten Einheitswurzel eine Klasse geschlossener Wilczynski-Ketten der Periode $2n$, also für jedes n genau $\varphi(n)$[15]) Klassen.

[14]) Vgl. [4].

[15]) $\varphi(n)$ ist die Eulersche Funktion.

3. Eine bemerkenswerte Klasse konjugierter Netze. Wir sahen im vorangehenden Abschnitt, daß die Wilczynski-Netze die hervorstechende Eigenschaft haben, daß ihre beiden Achsenkongruenzen einer gemeinsamen linearen Kongruenz angehören. Wir werden erwarten, daß diese Eigenschaft für Wilczynski-Netze kennzeichnend ist. Das trifft in der Tat zu, wie wir gleich zeigen werden; wichtiger ist jedoch die Frage nach denjenigen konjugierten Netzen, bei denen nur *eine* Achsenkongruenz, etwa die erste, einer linearen Kongruenz angehört. Kommt diese Eigenschaft auch nur den Wilczynski-Netzen zu oder gibt es noch andere?

Die erste Achse hat im Geradenraum den Bildpunkt

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\,. \tag{3.1}$$

Sie erzeugt genau dann eine lineare Kongruenz, wenn $\mathfrak{g}$ in Abhängigkeit der Parameter u, v einen nur dreidimensionalen Unterraum des Geradenraumes aufspannt. Nach (1.1) bis (1.4) ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_1 &= (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}) + r(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1) + m(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_2)\,, \\ \mathfrak{g}_2 &= (\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}) - r(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_2) + l(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1)\,, \end{aligned} \tag{3.2}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{11} &\equiv 2m(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) + (m_2 + 2r_1)(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1) + m_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_2) && (\operatorname{mod} \mathfrak{g})\,, \\ \mathfrak{g}_{12} &\equiv -2r(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) + l_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1) + m_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_2) && (\operatorname{mod} \mathfrak{g})\,, \\ \mathfrak{g}_{22} &\equiv -2l(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) + (l_1 - 2r_2)(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_2) + l_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1) && (\operatorname{mod} \mathfrak{g})\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Da nach (3.1) und (3.2) $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ linear unabhängig sind, hat unser Netz nur dann die geforderte Eigenschaft, wenn $\mathfrak{g}_{11}$, $\mathfrak{g}_{12}$, $\mathfrak{g}_{22}$ einem Vektor

$$\mathfrak{v} = 2(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) + s(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1) - t(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_2) \tag{3.4}$$

proportional sind und sich die Ableitungen von $\mathfrak{v}$ aus $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{v}$ kombinieren lassen. Für die Halbinvarianten folgen hieraus die Beziehungen

$$r_1 = \frac{1}{2}(sm - rt)\,, \qquad r_2 = -\frac{1}{2}(tl + rs)\,, \tag{3.5}$$

$$m_1 = -mt\,, \qquad l_2 = -ls\,, \tag{3.6}$$

$$m_2 = rt\,, \qquad l_1 = -rs\,, \tag{3.7}$$

$$s_1 = 2(h - al) - \frac{1}{2}st\,, \qquad t_2 = 2(k - em) - \frac{1}{2}st\,, \tag{3.8}$$

$$s_2 = -\frac{1}{2}s^2\,, \qquad t_1 = -\frac{1}{2}t^2\,. \tag{3.9}$$

Ist nun auch noch die zweite Achse in dieser Kongruenz enthalten, so ist nach (3.4), da sie den Bildpunkt $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ hat,

$$s = t = 0\,. \tag{3.10}$$

Damit geht aber (3.5) bis (3.9) in (1.18) über. Wir haben das oben angekündigte Ergebnis: *Ein reguläres konjugiertes Netz, dessen beide Achsenkongruenzen einer gemeinsamen linearen Kongruenz angehören, ist ein Wilczynski-Netz.*

Kehren wir wieder zu den Netzen zurück, bei denen nur *eine* der Achsenkongruenzen einer linearen Kongruenz angehört. Um die Existenz solcher

Netze zu zeigen, haben wir zu untersuchen, ob das System, bestehend aus den Integrierbarkeitsbedingungen (1.5) bis (1.7) und den Beziehungen (3.5) bis (3.9) in Involution ist.

Da sich die gemischten zweiten Ableitungen der Größen r, m, l, s, t unabhängig voneinander berechnen lassen, ist nachzuprüfen, ob sie die nach (1.12) gebildeten Vertauschungsregeln erfüllen. Man erhält zunächst

$$m_{12} = \frac{1}{2} stm - rt^2 - 2m(k - em)\,, \qquad m_{21} = \frac{1}{2} stm - rt^2\,, \tag{3.11}$$

also ist die Vertauschungsregel für m, nämlich

$$m_{21} - m_{12} = 2m(k - em) \tag{3.12}$$

erfüllt. Dasselbe ergibt sich durch Vertauschung nach dem Schema (1.14) für l. Weiter ist

$$t_{12} = 2t(em - k) + \frac{1}{2} st^2\,, \qquad t_{21} = t(2em - al - h) + \frac{1}{2} st^2\,, \tag{3.13}$$

somit ist auch die Vertauschungsregel für t [16]),

$$t_{21} - t_{12} = t(2k - h - al) \tag{3.14}$$

erfüllt, und das Entsprechende gilt wieder wegen der 1-2-Symmetrie für s. Ferner erhält man

$$r_{12} = \frac{1}{4}(t^2 l - s^2 m) + rst - r(k - em)\,, \qquad r_{21} = \frac{1}{4}(t^2 - s^2 m) + rst - r(h - al)\,. \tag{3.15}$$

Hieraus folgt einerseits

$$r_{21} - r_{12} = r(k - em - h + al)\,, \tag{3.16}$$

also gerade die richtige Vertauschungsregel für r; andererseits ist wegen

$$m_{22} = -\frac{1}{2} t^2 l - str + 2r(k - em)\,, \qquad -\,l_{11} = +\frac{1}{2} s^2 m - str + 2r(h - al) \tag{3.17}$$

auch die Integrierbarkeitsbedingung (1.7) erfüllt. Für (1.6) kann man nach (3.5) und (3.7) auch

$$k_1 + alt = 0\,, \quad h_2 + ems = 0 \tag{3.18}$$

schreiben, während

$$a_2 = 0\,, \quad e_1 = 0 \tag{3.19}$$

unverändert übernommen wird. Damit ist das System (3.5) bis (3.9), (3.18) und (3.19) in Involution. Seine Lösung hängt von 4 Funktionen einer Veränderlichen (und von Konstanten) ab. Wir haben das Ergebnis:

---

[16]) Nach (3.4) hat t das Gewicht $(-1,1,0)$ und s das Gewicht $(-1,0,1)$.

Es existiert eine von vier Funktionen einer Veränderlichen abhängige Gesamtheit von konjugierten Netzen, deren erste Achsen einer linearen Kongruenz angehören. Insbesondere gibt es darunter solche, die keine Wilczynski-Netze sind.

Wenden wir uns dieser Figur etwas näher zu. Besonders reizvoll ist es, diesem Gedanken nachzugehen: Im Geradenraum ist durch die lineare Kongruenz, der die ersten Achsen angehören, ein dreidimensionaler Unterraum U_3 ausgezeichnet. Dieser schneidet aus der Kleinschen Hyperquadrik eine (gewöhnliche) Quadrik Q aus. Die ersten Achsen des Netzes $(\mathfrak{x})$ werden auf ein Flächenstück von Q abgebildet, dem das 1-2-Netz aufgeprägt ist. Es wird sich zeigen, daß dieses im allgemeinen nicht konjugiert ist. Es erhebt sich die Frage: Welche nichtkonjugierten Netze auf einer Quadrik sind in diesem Sinne das Geradenbild der ersten Achsen eines konjugierten Netzes der in Rede stehenden Klasse?

Wir werden im folgenden gar nicht darauf zurückgreifen, daß U_3 Teilraum des Geradenraumes ist, sondern nur die Verhältnisse in diesem Raum selbst untersuchen. Die Bildfläche der ersten Achsen wird von

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\ ^{17)} \tag{3.20}$$

beschrieben. Sie ist, da an jeder Stelle

$$\mathfrak{g} \circ \mathfrak{g} = 0 \tag{3.21}$$

ist, eine Quadrik. Wir setzen

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1\,, \quad \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_2 \tag{3.22}$$

und haben mit $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{y}$ eine Basis in U_3. Nach (3.3) und durch Ableiten von $\mathfrak{v}$ ergeben sich die Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{11} &= 2ar\mathfrak{g} + m\mathfrak{v}\,, & \mathfrak{g}_{12} &= (k + em)\,\mathfrak{g} - r\mathfrak{v}\,, \\ \mathfrak{g}_{21} &= (h + al)\,\mathfrak{g} - r\mathfrak{v}\,, & \mathfrak{g}_{22} &= -2er\mathfrak{g} - l\mathfrak{v}\,, \\ \mathfrak{v}_1 &= as\mathfrak{g} - 2a\mathfrak{g}_2 - \frac{1}{2}t\mathfrak{v}\,, & \mathfrak{v}_2 &= -et\mathfrak{g} + 2e\mathfrak{g}_1 - \frac{1}{2}s\mathfrak{v}\,, \end{aligned} \tag{3.23}$$

die jedoch noch nicht die gewünschte Form haben, in der die Koeffizienten der Hauptdiagonalen verschwinden. Um dies zu erreichen, versuchen wir eine Halbinvariante R vom Gewicht (2,1,1) so zu bestimmen, daß sie den Gleichungen

$$R_1 = \frac{1}{2}Rt\,, \quad R_2 = \frac{1}{2}Rs \tag{3.24}$$

genügt. Die Integrierbarkeitsbedingung dieses Systems ist die nach (1.12) für das Gewicht (2,1,1) gebildete Vertauschungsregel. Sie ist tatsächlich erfüllt, denn mit (3.8) erhält man

$$R_{12} = R(k - em)\,, \quad R_{21} = R(h - al)\,. \tag{3.25}$$

Demnach existiert eine solche Halbinvariante R; sie ist überdies bis auf eine

---

[17]) Wir denken uns das Koordinatensystem so, daß U_3 dadurch gegeben ist, daß die letzten beiden Geradenkoordinaten verschwinden. Die ersten vier fassen wir dann zu einem Vektor zusammen und unterscheiden ihn durch Normaldruck vom zugehörigen (fettgedruckten) Sechservektor.

multiplikative Konstante eindeutig bestimmt. Wir nehmen nun die Umnormung

$$\hat{\mathfrak{v}} = R\mathfrak{v} \tag{3.26}$$

vor und erreichen damit die gewünschte Form der Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned} &\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1\,, && \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_2\,,\\ &\mathfrak{g}_{11} = 2ar\mathfrak{g} + \frac{m}{R}\hat{\mathfrak{v}}\,, && \mathfrak{g}_{12} = (k + em)\,\mathfrak{g} - \frac{r}{R}\hat{\mathfrak{v}}\,,\\ &\mathfrak{g}_{21} = (\bar{k} + al)\,\mathfrak{g} - \frac{r}{R}\hat{\mathfrak{v}}\,, && \mathfrak{g}_{22} = -2er\mathfrak{g} - \frac{l}{R}\hat{\mathfrak{v}}\,,\\ &\hat{\mathfrak{v}}_1 = asR\mathfrak{g} - 2aR\mathfrak{g}_2\,, && \hat{\mathfrak{v}}_2 = -etR\mathfrak{g} + 2eR\mathfrak{g}_1\,. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Außerdem ist jetzt die Determinante $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \hat{\mathfrak{v}})$, da sie das Gewicht $(0, 0, 0)$ hat, konstant.

Wir fügen der Vollständigkeit halber die Tabelle der Polarprodukte bezüglich der Quadrik Q bei:

(3.28)

$\circ$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_1$	$\mathfrak{g}_2$	$\hat{\mathfrak{v}}$
$\mathfrak{g}$	0	0	0	$2\varkappa$
$\mathfrak{g}_1$	0	$-m\varkappa$	$2r\varkappa$	$t\varkappa$
$\mathfrak{g}_2$	0	$2r\varkappa$	$l\varkappa$	$s\varkappa$
$\hat{\mathfrak{v}}$	$2\varkappa$	$t\varkappa$	$s\varkappa$	0

$\varkappa = \text{const.}$

Geometrisch interpretiert, besagen unsere Formeln (siehe Fig. 1): $(\mathfrak{g})$ *beschreibt für nichtharmonische* $(r \neq 0)$ *Ausgangsnetze* $(\mathfrak{x})$ *ein nichtkonjugiertes Netz auf einer Quadrik, das an keiner Stelle eine Asymptotenlinie der Quadrik (Erzeugende) berührt.* $\mathfrak{g}_1$ *und* $\mathfrak{g}_2$ *sind die zweiten Brennflächen der Tangentenkongruenzen dieses Netzes:* $\hat{\mathfrak{v}}$ *liegt auf seiner ersten Achse, und zwar im zweiten Durchstoßpunkt dieser Geraden mit der Quadrik Q. Die 1-Tangente von* $(\mathfrak{v})$ *trifft die 2-Tangente von* $(\mathfrak{g})$, *und ebenso trifft die 2-Tangente von* $(\mathfrak{v})$ *die 1-Tangente von* $(\mathfrak{g})$.

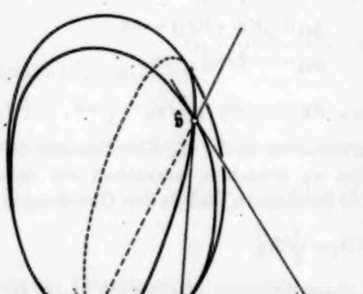

Fig. 1

Die Netze $\mathfrak{g}$, $\hat{\mathfrak{v}}$ auf der Quadrik Q an einer Stelle u, v.

Da die Torsallinien einer (beliebigen) Kongruenz als diejenigen Bildkurven von Kongruenzstrahlen gedeutet werden können, die mit ihren Tangenten ganz auf der Kleinschen Quadrik liegen, gilt: *Den Torsallinien der ersten Achsen des Ausgangsnetzes entsprechen die Asymptotenlinien (Erzeugenden) der Trägerfläche (Quadrik) des Bildnetzes.*

Nicht ganz so trivial ist der folgende Satz: *Die Torsallinien der ersten Achsen*

des Bildnetzes entsprechen den Asymptotenlinien der Trägerfläche des Ausgangsnetzes.

Den Beweis führt man am einfachsten analytisch. Die Torsallinien von $(\mathfrak{g}, \hat{\mathfrak{v}})$ erhält man bei der Berechnung der Brennpunkte, für die wir den Ansatz

$$\mathfrak{w} = E\mathfrak{g} + F\hat{\mathfrak{v}}, \quad \check{d}\mathfrak{w} \equiv 0 (\operatorname{mod} \mathfrak{g}, \hat{\mathfrak{v}}) \tag{3.29}$$

machen. Man erhält daraus nach (3.27)

$$\begin{aligned} E\omega_1 + F \cdot 2eR\,\omega_2 &= 0, \\ E\omega_2 - F \cdot 2aR\,\omega_1 &= 0. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Hiernach ist die Gleichung der fraglichen Torsallinien

$$a\omega_1^2 + e\omega_2^2 = 0. \tag{3.31}$$

Dies ist aber, wie sich aus (1.2) und (1.3) ergibt, gleichzeitig auch die der Asymptotenlinien von $(\mathfrak{x})$, was oben behauptet wurde.

Wie man die Wilczynski-Netze durch ihre Bildfigur charakterisieren kann, drückt der folgende Satz aus: *Ein konjugiertes Netz, dessen erste Achsen einer linearen Kongruenz angehören, ist dann und nur dann ein Wilczynski-Netz, wenn die von $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \hat{\mathfrak{v}}$ erzeugten Flächen eine T-Figur bilden.*

Zum Beweis bemerken wir, daß nach (3.10) die Wilczynski-Netze durch

$$s = t = 0 \tag{3.32}$$

gekennzeichnet werden. Andererseits bezeichnet man einen Zyklus von vier punktweise aufeinander bezogenen Flächen $(\mathfrak{g}_0), \mathfrak{g}_1), (\mathfrak{g}_2), (\mathfrak{g}_3)$ als T-Figur, wenn die Tangentenebene von $(\mathfrak{g}_i)$ an jeder Stelle von $\mathfrak{g}_{i-1}, \mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_{i+1}$[18]) aufgespannt wird. Dies ist in unserm Fall für $(\mathfrak{g}_0) = (\mathfrak{g}), (\mathfrak{g}_1)$ und $(\mathfrak{g}_2)$ ohnehin erfüllt. Für $(\mathfrak{g}_3) = (\hat{\mathfrak{v}})$ folgt aus (3.27): Es gilt

$$\check{d}\hat{\mathfrak{v}} \equiv 0 \ (\operatorname{mod} \hat{\mathfrak{v}}, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2) \tag{3.33}$$

genau dann, wenn (3.32) erfüllt ist; und hieraus folgt die Behauptung.

Wir erwähnen noch: *Ist ein harmonisches Netz in der hier betrachteten Klasse, so ist es ein Netz einer Su-Kette*[19]).

Man erhält dies aus (3.5): Für harmonische Netze ist $r = 0$ kennzeichnend, also folgt wegen (1.8)

$$s = t = 0.$$

Das Ausgangsnetz ist somit ein Wilczynski-Netz und nach Abschnitt 2, wie behauptet, ein Netz einer Su-Kette.

Wir wollen weiter zeigen: *Es gibt in der betrachteten Klasse auch R-Netze, die keine Wilczynski-Netze sind.* Zum Beweis haben wir die für R-Ketten kennzeichnenden Bedingungen

$$k = em, \quad h = al \tag{3.34}$$

auf ihre Verträglichkeit hin mit dem System (3.5) bis (3.9), (3.18), (3.19) zu

[18]) Mit den Indizes ist modulo 4 zu rechnen.

[19]) Nach B. Su, [16], soll *jedes* Netz der hier betrachteten Klasse eine Su-Kette erzeugen, was, wie oben gezeigt, jedoch nur für die harmonischen unter ihnen zutrifft.

untersuchen. Nach (3.18), (3.19) folgt durch Ableiten

$$ems = als\,, \quad alt = emt\,. \tag{3.35}$$

Also handelt es sich entweder um Wilczynski-Netze ($s = t = 0$), oder es ist

$$em = al\,. \tag{3.36}$$

Verfolgen wir diesen Fall weiter! Durch nochmaliges Ableiten erhält man bei Verwendung von (3.6), (3.7)

$$\frac{a_1}{a} = \frac{rs}{l} - t\,, \quad \frac{e_2}{e} = -\frac{rt}{m} - s\,. \tag{3.37}$$

Diese Bedingungen sind genau dann mit (3.19) verträglich, wenn

$$\left(\frac{a_1}{a}\right)_2 = 0\,, \quad \left(\frac{e_2}{e}\right)_1 = 0 \tag{3.38}$$

ist, weil wegen (3.34), (3.36) nach (1.12) jetzt alle gemischten zweiten Ableitungen vertauschbar sind. Tatsächlich erhält man auch (3.38), wenn man (3.37) ableitet und (3.5), (3.6), (3.8) und (3.9) berücksichtigt. Damit ist das System in Involution; seine Lösung hängt nur noch von Konstanten ab.

Wir nehmen nun das zu Beginn dieses Abschnitts erwähnte Problem in Angriff: Wir gehen von einem nichtkonjugierten Netz ($\hat{\mathfrak{g}}_0$) auf einer Quadrik Q aus, bestimmen die beiden zweiten Brennflächen $\hat{\mathfrak{g}}_1$, $\hat{\mathfrak{g}}_2$ der Netztangentenkongruenzen und das von den zweiten Schnittpunkten der ersten Achsen mit der Quadrik Q erzeugte Netz ($\hat{\mathfrak{g}}_3$), von dem wir verlangen, daß seine Netztangenten diejenigen von ($\hat{\mathfrak{g}}_0$) in vertauschter Reihenfolge treffen. Gehört dann zu einer derartigen Figur auch immer ein konjugiertes Netz ($\mathfrak{x}$), als dessen Bildfigur jene aufgefaßt werden kann?

Zur analytischen Behandlung können wir wieder die Formeln von G. Bol verwenden; in leichter Abwandlung der Bezeichnung (um Verwechslungen mit dem Ausgangsnetz ($\mathfrak{x}$) zu vermeiden) lauten sie[20]):

Ableitungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathfrak{g}}_{01} = \hat{\mathfrak{g}}_1\,, && \hat{\mathfrak{g}}_{02} = \hat{\mathfrak{g}}_2\,,\\
&\hat{\mathfrak{g}}_{11} = b\bar{p}\hat{\mathfrak{g}}_0 + c\hat{\mathfrak{g}}_3\,, && \hat{\mathfrak{g}}_{12} = f\hat{\mathfrak{g}}_0 + b\hat{\mathfrak{g}}_3\,,\\
&\hat{\mathfrak{g}}_{21} = \bar{f}\hat{\mathfrak{g}}_0 + b\hat{\mathfrak{g}}_3\,, && \hat{\mathfrak{g}}_{22} = bp\hat{\mathfrak{g}}_0 + \bar{c}\hat{\mathfrak{g}}_3\,,\\
&\hat{\mathfrak{g}}_{31} = q\hat{\mathfrak{g}}_0 + \bar{p}\hat{\mathfrak{g}}_2\,, && \mathfrak{g}_{32} = \bar{q}\hat{\mathfrak{g}}_0 + p\hat{\mathfrak{g}}_1\,.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Integrierbarkeitsbedingungen:

$$\begin{gathered}
b_1 = c_2\,, \quad b_2 = \bar{c}_1\,,\\
f_1 = b_2\bar{p} - 2bq + c\bar{q}\,, \quad \bar{f}_2 = b_1 p - 2b\bar{q} + \bar{c}q\,,\\
p_1 = -\bar{q}\,, \quad \bar{p}_2 = -q\,,\\
\bar{q}_1 = q_2\,.
\end{gathered} \tag{3.40}$$

---

[20]) Es handelt sich um die Formeln in [1] (5.14) bis (5.24). Sie gehen in das genannte System über, wenn man die obige Treffeigenschaft berücksichtigt und die Bezeichnung nach dem Schema

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{x} & \mathfrak{x}_1 & \mathfrak{x}_2 & \mathfrak{y} & a & e & b & k & k & m & l & s & t & p & q \\ \hat{\mathfrak{g}}_0 & \hat{\mathfrak{g}}_1 & \hat{\mathfrak{g}}_2 & \hat{\mathfrak{g}}_3 & c & \bar{c} & b & f & \bar{f} & \bar{p} & p & q & \bar{q} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ersetzt.

Hierbei ist jedoch noch nicht berücksichtigt, daß $\hat{\mathfrak{g}}_0$ und $\hat{\mathfrak{g}}_3$ auf einer und derselben Quadrik liegen. Die dafür kennzeichnenden Bedingungen kann man wie folgt herleiten: Es sei

$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle \equiv \sum_{i,k=0}^{3} a_{ik} x_i x_k = 0 \tag{3.41}$$

die Gleichung der Quadrik Q. Wir ersetzen in der quadratischen Form $\mathfrak{x}$ durch $\hat{\mathfrak{g}}_0$ bzw. $\hat{\mathfrak{g}}_3$ und entwickeln die entstehenden Funktionen

$$g(u, v) = \langle \hat{\mathfrak{g}}_0, \hat{\mathfrak{g}}_0 \rangle, \quad f(u, v) = \langle \hat{\mathfrak{g}}_3, \hat{\mathfrak{g}}_3 \rangle \tag{3.42}$$

an der Stelle u_0, v_0 in eine Taylor-Reihe. Da $\hat{\mathfrak{g}}_0$ und $\hat{\mathfrak{g}}_3$ auf Q liegen, sind die Funktionen f und g identisch Null. Deshalb verschwinden alle Koeffizienten jener Reihen. Wir gehen zunächst bei f nur bis zur ersten und bei g bis zur zweiten Ordnung und erhalten

$$\langle 3,3 \rangle = 0 \quad [21]$$

$$\begin{gathered} q\langle 0,3 \rangle + \bar{p}\langle 2,3 \rangle = 0, \quad \bar{q}\langle 0,3 \rangle + p\langle 1,3 \rangle = 0 \\ \langle 0,0 \rangle = 0 \\ \langle 0,1 \rangle = 0, \quad \langle 0,2 \rangle = 0 \\ c\langle 0,3 \rangle + \langle 1,1 \rangle = 0, \quad b\langle 0,3 \rangle + \langle 1,2 \rangle = 0, \quad \bar{c}\langle 0,3 \rangle + \langle 2,2 \rangle = 0. \end{gathered} \tag{3.43}$$

Hierdurch ist an der Stelle u_0, v_0 eine Quadrik Q_0 eindeutig bestimmt. Es ist diejenige, die die Fläche $(\mathfrak{g}_0)$ in zweiter und die Fläche $(\mathfrak{g}_3)$ in erster Ordnung berührt. Dasselbe machen wir für jede andere Stelle ebenso und verlangen, daß alle diese Quadriken übereinstimmen. Das ist genau dann der Fall, wenn die Beziehungen (3.43) identisch in beiden Parametern gelten. Durch Ableitung erhält man dann die gesuchten Bedingungen dafür, daß $(\hat{\mathfrak{g}}_0)$ und $(\hat{\mathfrak{g}}_3)$ auf ein und derselben Quadrik liegen; es ergibt sich:

$$\begin{gathered} \bar{q}_1 = q_2 = 0, \\ \bar{f}\bar{p} + q_1 - \frac{\bar{q}q}{p} - \frac{q\bar{p}_1}{\bar{p}} - \bar{p}^2\bar{c} = 0, \\ fp + \bar{q}_2 - \frac{q\bar{q}}{\bar{p}} - \frac{\bar{q}p_2}{p} - p^2 c = 0, \\ c_1 - 3\frac{\bar{q}}{p}c = 0, \quad \bar{c}_2 - 3\frac{q}{\bar{p}}\bar{c} = 0, \\ c_2 - \frac{q}{\bar{p}}c - 2\frac{\bar{q}}{p}b = 0, \quad \bar{c}_1 - \frac{\bar{q}}{p}\bar{c} - 2\frac{q}{\bar{p}}b = 0. \end{gathered} \tag{3.44}$$

Durch eine längere Rechnung, die wir hier nicht ausführen, bestätigt man, daß das System (3.40), (3.44) in Involution ist. Wir können zusammenfassen: *Es existiert eine von vier Funktionen abhängige Gesamtheit von Lösungen des Systems* (3.40), (3.44). *Zu jeder von ihnen gehört eine bis auf Projektivitäten eindeutig bestimmte Figur der oben beschriebenen Art.*

Wann ist nun eine solche Figur das Geradenbild eines konjugierten Netzes, deren erste Achsen einer linearen Kongruenz angehören? Das ist genau dann

[21]) Wir kürzen die Größe $\langle \mathfrak{g}_i(u_0, v_0), \mathfrak{g}_k(u_0, v_0) \rangle$ mit $\langle i, k \rangle$ ab.

der Fall, wenn die Funktionen $b, c, \bar{c}, p, \bar{p}, q, \bar{q}$ so beschaffen sind, daß die durch (3.39) bestimmte Figur mit einer durch (3.27) bestimmten projektiv äquivalent ist. Je zwei analoge der diese Figuren beschreibenden Vektoren $\hat{\mathfrak{g}}_i$ ($i = 0,1,2,3$) bzw. $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \hat{\mathfrak{v}}$ sind also proportional. Durch eine zulässige Umnormung, d. h. eine solche, die die Konstanz der Determinante $(\hat{\mathfrak{g}}_0, \hat{\mathfrak{g}}_1, \hat{\mathfrak{g}}_2, \hat{\mathfrak{g}}_3)$ erhält, erreichen wir zunächst, daß

$$\mathfrak{g} = \hat{\mathfrak{g}}_0\,, \quad \mathfrak{g}_1 = \hat{\mathfrak{g}}_1\,, \quad \mathfrak{g}_2 = \hat{\mathfrak{g}}_2 \tag{3.45}$$

ist. Dies bleibt bei Umnormungen der Ausgangsvektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}$ erhalten, wenn wir sie mit Umnormungen der neuen gemäß

$$\hat{\varrho}_0 = \varrho_1^{-1}\varrho_2^{-1}\,, \quad \hat{\varrho}_1 = \varrho_0^{-1}\varrho_2^{-1}\,, \quad \hat{\varrho}_2 = \varrho_0^{-1}\varrho_1^{-1} \tag{3.46}$$

koppeln. Damit werden alle Halbinvarianten des überdachten Systems auch Halbinvarianten des ursprünglichen.

Da auch die Determinante $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \hat{\mathfrak{v}})$ konstant ist, gilt

$$\mathfrak{g}_3 = \alpha\hat{\mathfrak{v}} \qquad \text{mit } \alpha = \text{const.} \tag{3.47}$$

Man kann daher durch geeignete Wahl der Lösung R von (3.24), die ja nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt war, erreichen, daß

$$\alpha = 1 \tag{3.48}$$

wird. Da sich ferner die Netzlinien $\omega_2\omega_1 = 0$ und $\hat{\omega}_2\hat{\omega}_1 = 0$ entsprechen, können wir

$$\omega_1 = \hat{\omega}_1\,, \quad \omega_2 = \hat{\omega}_2 \tag{3.49}$$

wählen. Damit stimmt das Differentiationsverfahren für beide Systeme überein. Daraus folgt, daß auch die entsprechenden Koeffizientenfunktionen einander gleich sind:

$$\begin{array}{llll} 2ar = b\bar{p}\,, & \dfrac{m}{R} = c\,, & k + em = f\,, & -\dfrac{r}{R} = b\,, \\ h + al = \bar{f}\,, & -\dfrac{r}{R} = b\,, & -2er = bp\,, & -\dfrac{l}{R} = \bar{c}\,, \\ asR = q\,, & -2aR = \bar{p}\,, & -etR = \bar{q}\,, & 2eR = p\,. \end{array} \tag{3.50}$$

Unser Problem läßt sich jetzt analytisch so formulieren: Stellt jede Lösung von (3.40), (3.44) beim Übergang gemäß (3.50) eine Lösung von (3.5) bis (3.9), (3.18), (3.19) dar?

Daß dies tatsächlich zutrifft, bestätigt man auf die folgende Weise: Das Funktionensystem $\hat{\mathfrak{S}} = \{b, p, \bar{p}, q, \bar{q}, c, \bar{c}, f, \bar{f}\}$ sei eine Lösung von (3.40), (3.44). Dann erhält man nach (3.50)

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{r = bR} \\ e = \dfrac{p}{2R} & a = -\dfrac{\bar{p}}{2R} \\ m = cR & l = -\bar{c}R \\ h = \bar{f} - \dfrac{\bar{p}\bar{c}}{2} & k = f - \dfrac{pc}{2} \\ s = -\dfrac{2q}{\bar{p}} & t = -\dfrac{2\bar{q}}{p} \end{array} \tag{3.51}$$

also das System $\mathfrak{S} = \{r, e, a, s, t, m, l, k, h\}$ aus $\hat{\mathfrak{S}}$ und R. Wir verlangen nun, daß R eine Lösung von

$$R_1 = -R\,\frac{\bar{q}}{p}\,, \qquad R_2 = -R\,\frac{q}{\bar{p}} \tag{3.52}$$

ist. Jetzt hat man nachzurechnen, daß alle oben genannten Gleichungen für $\mathfrak{S}$ und (3.24) für R erfüllt sind.

Aus (3.51) erhält man durch Ableiten, Ersetzen der Ableitungen nach (3.40), (3.44) und Rückersetzen nach (3.50):

$$
\begin{aligned}
r_1 &= -b_1 R - bR_1 = \left(-\frac{q}{\bar{q}}\,c - 2\,\frac{\bar{q}}{p}\,b\right) R + bR\,\frac{\bar{q}}{p} = \frac{1}{2}\,(sm - rt)\\
e_1 &= \frac{p_1}{2R} - \frac{p}{2R^2}\,R_1 = -\frac{\bar{q}}{2R} + \frac{p}{2R}\left(\frac{\bar{q}}{p}\right) = 0\\
l_1 &= -\bar{c}_1 R - \bar{c}R_1 = -\left(\frac{\bar{q}}{p}\,\bar{c} + 2\,\frac{q}{\bar{p}}\,b\right) R + \bar{c}R\,\frac{\bar{q}}{p} = -rs\\
m_1 &= c_1 R + cR_1 = 3\,\frac{\bar{q}}{p}\,cR - cR\,\frac{\bar{q}}{p} = -tm \qquad (3.53)\\
s_1 &= -\frac{2q_1}{\bar{p}} + \frac{2q\bar{p}_1}{\bar{p}^2} = \frac{2}{\bar{p}}\left\{\bar{f}\bar{p} - \frac{q\bar{q}}{p} - \bar{p}^2 c\right\} = 2(h - al) - \frac{1}{2}\,st\\
t_1 &= -\frac{2\bar{q}_1}{p} + \frac{2\bar{q}p_1}{p^2} = -2\left(\frac{\bar{q}}{p}\right)^2 = -\frac{1}{2}\,t^2\\
k_1 &= f_1 - \frac{p_1 c}{2} - \frac{pc_1}{2} = \bar{p}\left\{\frac{\bar{q}c}{p} + 2\,\frac{q}{\bar{p}}\,b\right\} - 2bq + c\bar{q} + \frac{c\bar{q}}{2} - 3\,\frac{\bar{q}}{p}\,c\cdot\frac{p}{2} = -alt\\
R_1 &= -R\,\frac{\bar{q}}{p} = \frac{1}{2}\,Rt\,.
\end{aligned}
$$

Das ist genau die eine Hälfte der für das System $\mathfrak{S}$ und R vorgeschriebenen Gleichungen; die andere ergibt sich durch Vertauschung nach dem zu (1.14) analogen Schema

$$\begin{pmatrix} 1 & b & p & q & c & f & R & \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_1 & \mathfrak{g}_3\\ 2 & -b & -\bar{p} & -\bar{q} & -\bar{c} & \bar{f} & R & \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_2 & -\mathfrak{g}_3 \end{pmatrix}, \tag{3.54}$$

weil beide Systeme gegenüber einer solchen Vertauschung invariant sind. Somit gehört zu jeder Lösung von (3.40), (3.44) ein eindeutig bestimmtes System $\hat{\mathfrak{S}}$, R, das den Bedingungen (3.5) bis (3.9), (3.18), (3.19), (3.24) genügt. Es gilt also:

Zu jedem nichtkonjugierten Netz $(\mathfrak{g}_0)$ *auf einer Quadrik* Q, *dessen erste Achsen aus* Q *ein solches Netz* $(\mathfrak{g}_3)$ *ausschneiden, daß sich die Netztangenten von* $(\mathfrak{g}_0)$ *und* $(\mathfrak{g}_3)$ *wechselseitig treffen, gehört ein bis auf Projektivitäten eindeutig bestimmtes nichtharmonisches, konjugiertes Netz* $(\mathfrak{x})$, *dessen Geradenbild mit der von* $(\mathfrak{g}_0)$ *erzeugten Figur projektiv äquivalent ist.*

4. Spezielle Lagen entsprechender Punkte der Laplace-Transformierten. Wie wir in Abschnitt 2 sahen, liegen die entsprechenden Punkte aller in gerader Ordnung Laplace-Transformierten Netze eines Wilczynski-Netzes auf einer Geraden, nämlich auf der zur betrachteten Stelle gehörigen ersten Achse des Wilczynski-Netzes, von dem man ausgegangen war. O. Rosca[22]) hat die folgende

[22]) Vgl. [15].

Umkehrung bewiesen: *Ist* $(\mathfrak{x})$ *ein R-Netz und liegen an jeder Stelle die Punkte* $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}^2$, $\mathfrak{x}^{-2}$ [23]) *auf einer Geraden, so ist* $(\mathfrak{x})$ *ein Wilczynski-Netz.*

Wir wollen uns von der einschränkenden Voraussetzung, daß bereits ein R-Netz vorliege, freimachen und von einem beliebigen (nicht entarteten) konjugierten Netz ausgehen. Wir werden dann, um die Wilczynski-Netze zu kennzeichnen, noch weitere Lageforderungen stellen.

Die Laplace-Transformierten 2. Ordnung sind durch Beziehungen der Art

$$\begin{aligned}\mathfrak{x}^2 &= A\mathfrak{x}_1 + B\mathfrak{x}_{11}, \quad \mathfrak{x}_2^2 \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_{11}),\\ \mathfrak{x}^{-2} &= \bar{A}\mathfrak{x}_2 + \bar{B}\mathfrak{x}_{22}, \quad \mathfrak{x}_1^{-2} \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{22})\end{aligned} \tag{4.1}$$

bestimmt. Man erhält daraus

$$\mathfrak{x}^2 (=) a(\mathfrak{y} + r\mathfrak{x}) - \frac{k_1}{k}\mathfrak{x}_1, \quad \mathfrak{x}^{-2} (=) e(\mathfrak{y} - r\mathfrak{x}) - \frac{h_2}{h}\mathfrak{x}_2. \tag{4.2}$$

Die entsprechenden Punkte der beiden Laplace-Transformierten 2. Ordnung liegen also genau dann auf einer Geraden durch $\mathfrak{x}$, die somit die erste Achse von $(\mathfrak{x})$ an der betrachteten Stelle ist, wenn

$$k_1 = h_2 = 0 \tag{4.3}$$

gilt.

Wir nehmen im folgenden an, daß dieser geometrische Sachverhalt vorliege, d. h. es gelte (4.3). Aus den damit nach (1.6) gleichwertigen Bedingungen

$$m_2 = -2r_1, \quad l_1 = 2r_2 \tag{4.4}$$

folgt

$$m_{22} - l_{11} + r_{12} + r_{21} = -(r_{12} + r_{21}). \tag{4.5}$$

Nach (1.7) ist daher

$$r_{21} + r_{12} = r(al - h) + r(em - k). \tag{4.6}$$

Die Vertauschungsregel liefert

$$r_{21} - r_{12} = r(al - h) - r(em - k), \tag{4.7}$$

also gilt

$$r_{12} = r(em - k), \quad r_{21} = r(al - h). \tag{4.8}$$

Wir benötigen weiter die Laplace-Transformierten 3. Ordnung. Man findet unter Verwendung von (4.3)

$$\begin{aligned}\mathfrak{x}^3 &(=) 2r_1\mathfrak{x} + 2r\mathfrak{x}_1 + m\mathfrak{x}_2 - \frac{2r_2}{l}(\mathfrak{y} + r\mathfrak{x}),\\ \mathfrak{x}^{-3} &(=) -2r_2\mathfrak{x} - 2r\mathfrak{x}_2 + l\mathfrak{x}_1 + \frac{2r_1}{m}(\mathfrak{y} - r\mathfrak{x}).\end{aligned} \tag{4.9}$$

Um die Laplace-Transformierten 4. Ordnung zu bestimmen, suchen wir einen Punkt auf der 1-Tangenten von $(\mathfrak{x}^3)$. Durch Ableiten erhält man, wenn man

[23]) Für die Bezeichnung siehe Fußnote 10.

(4.4) und (4.8) berücksichtigt

$$\mathfrak{x}_1^3 \,(\equiv)\, \left[2r_{11} + \frac{h}{l}(2r^2 + ml) + 4\frac{r_2}{l}\left(\frac{rr_2}{l} - r_1\right)\right]\mathfrak{x} + 4\left[r_1 - \frac{rr_2}{l}\right]\mathfrak{x}_1 + \tag{4.10}$$
$$+ \left[m_1 - 2\frac{mr_2}{l}\right]\mathfrak{x}_2 + \left[2\frac{rh}{l} + 4\frac{r_2^2}{l}\right]\mathfrak{y} \quad (\mathrm{mod}\,\mathfrak{x}^3)\,.$$

Wir stellen nun eine zusätzliche Lageforderung und verlangen, daß an jeder Stelle die 1-Tangente von $(\mathfrak{x}^3)$ die Gerade $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ trifft (siehe Fig. 2). Aus (4.9), (4.10) folgt daher

$$2r\left(m_1 - 2m\frac{r_2}{l}\right) = 4m\left(r_1 - \frac{rr_2}{l}\right) \tag{4.11}$$

oder

$$\frac{m_1}{m} = 2\frac{r_1}{r}\,. \tag{4.12}$$

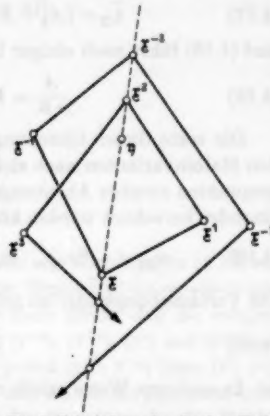

Fig. 2. Prinzipfigur der Laplace-Kette mit Achse $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ bei den gestellten Lageforderungen

Um die Symmetrie zu erhalten, stellen wir die analoge Forderung, daß auch die 2-Tangente von $(\mathfrak{x}^{-3})$ an jeder Stelle die Gerade $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ trifft. Eine Vertauschung nach (1.14) liefert die Bedingung

$$\frac{l_2}{l} = 2\frac{r_2}{r}\,. \tag{4.13}$$

Um die bisher geforderten geometrischen Eigenschaften zusammenzufassen, bedienen wir uns einer von S. Finikow[24]) eingeführten Bezeichnung: Man nennt ein konjugiertes Netz $(\mathfrak{x})$ ein positiv gerichtetes Netz von Rozet, wenn an entsprechenden Stellen $\mathfrak{x}^{-1}$ in der Tangentenebene von $(\mathfrak{x}^2)$ liegt; inzidiert dagegen $\mathfrak{x}^1$ mit der Tangentenebene von $(\mathfrak{x}^{-2})$, so heißt $(\mathfrak{x})$ ein negativ gerichtetes Netz von Rozet. Liegen beide Fälle gleichzeitig vor, so werde $(\mathfrak{x})$ kurz ein doppeltes Netz von Rozet genannt.

Die erste Forderung, daß an jeder Stelle $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}^2, \mathfrak{x}^{-2}$ auf einer Geraden liegen, ist jetzt gleichwertig damit, daß $(\mathfrak{x}^{-1})$ ein positiv und $(\mathfrak{x}^1)$ ein negativ gerichtetes Netz von Rozet ist. (Es ist dabei zu beachten, daß $(\mathfrak{x})$ nicht entartet, insbesondere die von $(\mathfrak{x})$ erzeugte Laplace-Kette nicht eben ist.) Die beiden weiteren Forderungen bedeuten, daß $(\mathfrak{x}^{-1})$ und $(\mathfrak{x}^1)$ auch in der jeweils entgegengesetzten Richtung Netze von Rozet sind. Wir haben also: Die Bedingungen (4.4), (4.12), (4.13) kennzeichnen die nichtentarteten konjugierten Netze derart, daß ihre beiden Laplace-Transformierten $(\mathfrak{x}^1)$ und $(\mathfrak{x}^{-1})$ doppelte Netze von Rozet sind.

Wir fragen nun weiter nach denjenigen konjugierten Netzen, bei denen auch noch die entsprechenden Punkte der Laplace-Transformierten 4. Ordnung (in mindestens einer Richtung) auf der Geraden $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ liegen. Nach (4.9), (4.10) ist der Treffpunkt der 1-Tangente von $(\mathfrak{x}^3)$ und der Geraden $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$

$$\bar{\mathfrak{t}}_1 = A\mathfrak{x} + B\mathfrak{y} \tag{4.14}$$

---

[24]) Vgl. [6].

mit

$$A = 2r_{11} + 2\frac{hr^3}{l} + hm + 4\frac{r_1 r_2}{l} - 4\frac{r_1^2}{r}, \quad B = \frac{2rh}{l} + \frac{4r_1 r_2}{lr}. \tag{4.15}$$

Er soll nun in Abhängigkeit der Parameter u, v die Laplace-Transformierte 4. Ordnung von $(\mathfrak{x})$ in 1-Richtung beschreiben. Daher ist

$$\bar{\mathfrak{t}}_{12} \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} \mathfrak{t}_1, \mathfrak{x}^3). \tag{4.16}$$

Durch Ableiten von (4.14) erhält man

$$\bar{\mathfrak{t}}_{12} = [A_2 - B(l_1 - r_2)]\,\mathfrak{x} + Bl\mathfrak{x}_1 + (A - Br)\,\mathfrak{x}_2 + B_2\mathfrak{y} \tag{4.17}$$

und (4.16) führt nach einiger Umrechnung, wobei (4.4) verwendet wird, auf

$$\frac{A}{rB} = 1 + \frac{1}{2}\frac{ml}{r^3}, \quad \left(\frac{A}{rB}\right)_2 = \frac{r_1 l}{r^3}. \tag{4.18}$$

Die erste dieser Gleichungen zieht keine weiteren Bedingungen zwischen den Halbinvarianten nach sich. Um dies zu bestätigen, bemerken wir, daß die gemischten zweiten Ableitungen von m nach $(4.4)^I$ und (4.12) unabhängig voneinander berechnet werden können. Danach ist

$$m_{21} = -2r_{11}, \quad m_{12} = 2m(em - k) - 4\frac{r_1^2}{r} - 2\frac{r_1 r_2}{r^2}m. \tag{4.19}$$

Die Vertauschungsregel ist nur erfüllt, wenn

$$r_{11} = 2\frac{r_1^2}{r} + \frac{r_1 r_2}{r^2}m \tag{4.20}$$

ist. In analoger Weise erhält man aus der Vertauschungsregel für l

$$r_{22} = 2\frac{r_2^2}{r} - \frac{r_1 r_2}{r^2}l. \tag{4.21}$$

Setzt man nun (4.20) in (4.15) ein, so erhält man

$$A = \frac{2r^3 h}{l}\left\{1 + \frac{ml}{2r^3}\right\} + \frac{4r_1 r_2}{lr}\left\{1 + \frac{ml}{2r^3}\right\}, \tag{4.22}$$

also ist, wie behauptet, die erste Gleichung (4.18) eine Folge von (4.4), (4.12), (4.13).

Leitet man $(4.18)^I$ beiderseits in 2-Richtung ab und macht von (4.4), (4.13) Gebrauch, so ergibt sich

$$\left(\frac{A}{rB}\right)_2 = -\frac{r_1 l}{r^3}. \tag{4.23}$$

Da l nach (1.8) nicht verschwindet, folgt hieraus und aus der zweiten Gleichung (4.18)

$$r_1 = 0. \tag{4.24}$$

Jetzt kann leicht gefolgert werden, daß es sich um ein Wilczynski-Netz handelt: Nach (4.4), (4.12) ist zunächst

$$m_1 = m_2 = 0. \tag{4.25}$$

Die Vertauschungsregel für m und ebenso (4.8) liefern

$$k = em. \tag{4.26}$$

Weiter ist nach (4.21)

(4.27) $$r_{221} = 4\frac{r_{21}r_2}{r} = 4r_2(h - al)$$

und nach (4.8)

(4.28) $$r_{212} = r_2(3al - h)\,.$$

Indessen lautet die Vertauschungsregel für r_2

(4.29) $$r_{221} - r_{212} = r_2\{2k - 3h + al\}\,.$$

Folglich verschwindet kr_2, woraus wegen (1.8)

(4.30) $$r_2 = 0$$

folgt. Man hat dann nach (4.4) und (4.13)

(4.31) $$l_1 = l_2 = 0$$

und nach (4.8) oder der Vertauschungsregel für l

(4.32) $$h = al\,.$$

Mit (4.24) bis 4.26) und (4.30) bis (4.32) sind gerade alle Gleichungen (1.18) befriedigt, und wir haben das angekündigte Ergebnis: *Erzeugt* ($\mathfrak{x}$) *ein reguläres und nichtharmonisches konjugiertes Netz eine Laplace-Kette derart, daß die entsprechenden Punkte von* ($\mathfrak{x}^{-2}$), ($\mathfrak{x}^{0}$), ($\mathfrak{x}^{2}$) *und* ($\mathfrak{x}^{4}$) [*oder* ($\mathfrak{x}^{-4}$), ($\mathfrak{x}^{-2}$), ($\mathfrak{x}^{0}$) *und* ($\mathfrak{x}^{2}$)] *auf einer Geraden* $g(u, v)$ *liegen, und sich die Geraden* g *und* ($\mathfrak{x}^{-3}$, $\mathfrak{x}^{-4}$) [*bzw.* ($\mathfrak{x}^{3}$, $\mathfrak{x}^{4}$)] *treffen, so handelt es sich um ein Wilczynski-Netz und die Gerade* g *ist seine erste Achse an der betreffenden Stelle. Dasselbe gilt dann für die entsprechenden Punkte aller Laplace-Transformierten gerader Ordnung von* ($\mathfrak{x}$).

Wir erwähnen noch den folgenden wichtigen Spezialfall des obigen Satzes: *Erzeugt ein reguläres nichtharmonisches konjugiertes Netz* ($\mathfrak{x}$) *eine Laplace-Kette derart, daß die entsprechenden Punkte von* ($\mathfrak{x}^{-4}$), ($\mathfrak{x}^{-2}$), ($\mathfrak{x}$), ($\mathfrak{x}^{2}$), ($\mathfrak{x}^{4}$) *auf einer Geraden liegen, so ist* ($\mathfrak{x}$) *ein Wilczynski-Netz und dasselbe gilt für die entsprechenden Punkte aller Netze mit gerader Transformationsordnung.*

5. *Über eine mit einem konjugierten Netz verknüpfte Flächenschar.* Durch ein konjugiertes Netz sind zwei Kongruenzen, deren entsprechende Geraden windschief zueinander sind, bestimmt, nämlich die der ersten und zweiten Achsen. Die Antwort auf die Frage, bei welchen Netzen die Achsenkongruenzen ein schichtbildendes Paar sind, ist bekannt: Genau die R-Netze haben diese Eigenschaft. Also trifft das insbesondere auch für die Wilczynski-Netze zu, da sie spezielle R-Netze sind. Welches sind nun die Schichtflächen? — Aus den Darlegungen des zweiten Abschnitts ergibt sich sofort: *Die Schichtflächen der ersten Achsen sind die Netzflächen der adjungierten Wilczynski-Netze, die der zweiten ihre Laplace-Transformierten.*

Zum Beweis des ersten Teils bemerken wir, daß die adjungierten Netze ($\mathfrak{z}$) durch die Projektivitäten der Gruppe G (vgl. Abschnitt 2) aus dem Ausgangsnetz hervorgehen und daß diese Projektivitäten die Achsen festlassen. Da die Tangentenebene von ($\mathfrak{x}$) die zweite Achse enthält, gilt dasselbe auch von den

Tangentenebenen der adjungierten Netzflächen ($\mathfrak{z}$). Um die obige Aussage über die zweite Achsenkongruenz zu erhalten, geht man zu den Laplace-Transformierten von ($\mathfrak{x}$) und ($\mathfrak{z}$) über; hierbei vertauschen die beiden Achsen ihre Rollen.

Kehren wir zu den Schichtflächen der ersten Achsen zurück. Sie werden nach (2.11) durch

$$\mathfrak{z} = \frac{s+1}{2}\,\mathfrak{x} + \frac{s-1}{2w}\,\mathfrak{y} \tag{5.1}$$

dargestellt. Ist nun unser Ausgangsnetz ($\mathfrak{x}$) nicht harmonisch, also

$$r \neq 0\,, \tag{5.2}$$

so sind auf der ersten Achse die Punkte der Laplace-Transformierten 2. Ordnung, nämlich

$$\mathfrak{x}^2 (=)\, r\mathfrak{x} + \mathfrak{y}\,, \quad \mathfrak{x}^{-2} = -r\mathfrak{x} + \mathfrak{y} \tag{5.3}$$

vom Punkt von Slotnick, $\mathfrak{y}$, verschieden. Für das Doppelverhältnis der vier genannten Punkte erhält man

$$DV(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{x}^2, \mathfrak{z}) = \frac{s+1}{s-1} \cdot \frac{w}{r} \quad \text{bzw.} \quad DV(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{x}^{-2}, \mathfrak{z}) = -\frac{s+1}{s-1} \cdot \frac{w}{r}\,. \tag{5.4}$$

Hierin ist s nicht von den Parametern u, v abhängig; dasselbe gilt für $\frac{w}{r}$, da diese Größe absolut invariant und nach (1.18)

$$\left(\frac{w}{r}\right)_1 = \left(\frac{w}{r}\right)_2 = 0 \tag{5.5}$$

ist. Also sind die Doppelverhältnisse (5.4) konstant. *Die adjungierten Netzflächen eines nicht harmonischen Wilczynski-Netzes schneiden aus den ersten Achsen Punkte aus, die mit dem Netzpunkt des Ausgangsnetzes, dem Punkt von Slotnick und dem Netzpunkt einer der beiden Laplace-Transformierten 2. Ordnung ein konstantes Doppelverhältnis haben.*

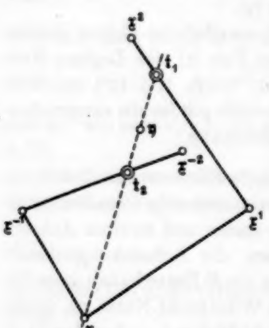

Fig. 3. Lage der Treffpunkte t_1, t_2

Dieser Satz veranlaßt uns, die entsprechenden Flächen mit konstantem Doppelverhältnis auch bei beliebigen konjugierten Netzen zu betrachten. Eine Schwierigkeit ist jedoch, daß die entsprechenden Punkte der Laplace-Transformierten 2. Ordnung nicht mehr auf der ersten Achse liegen. Aber die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte der Laplace-Transformierten 1. und 2. Ordnung treffen die erste Achse (siehe Fig. 3). Die Treffpunkte sind

$$\mathfrak{t}_1 = r\mathfrak{x} + \mathfrak{y} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{t}_2 = -r\mathfrak{x} + \mathfrak{y}\,. \tag{5.6}$$

Wir betrachten daher bei nicht harmonischen Netzen — es ist also (5.2) vorausgesetzt — die von

$$\mathfrak{p} = x r\mathfrak{x} + \mathfrak{y} \tag{5.7}$$

erzeugten Flächen, wobei x absolut invariant ist und

$$x_1 = x_2 = 0 \tag{5.8}$$

gilt. Für diese ist also

$$(5.9)\qquad DV(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{t}_1, \mathfrak{p}) = x\,, \qquad DV(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{p}) = -x$$

und x stellt einen von u, v unabhängigen Parameter dar. Wir wollen die Flächen dieser einparametrigen Schar im folgenden *Transversalflächen* nennen.

Es gilt nun eine Umkehrung des vorigen Satzes: *Wenn die Transversalflächen eines nicht harmonischen konjugierten Netzes Schichtflächen der ersten Achsenkongruenz bezüglich der zweiten sind, liegt ein Wilczynski-Netz vor.*

Zum Beweis bestimmen wir die Tangentenebenen der Transversalflächen. Sie werden von (5.7) und

$$(5.10)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{p}_1 &= [(x-1)\, r_1 - m_2]\, \mathfrak{x} + (x+1)\, r \mathfrak{x}_1 + m \mathfrak{x}_2\,, \\ \mathfrak{p}_2 &= [(x+1)\, r_2 - l_1]\, \mathfrak{x} + (x-1)\, r \mathfrak{x}_2 + l \mathfrak{x}_1 \end{aligned}$$

aufgespannt. Sie enthalten nur dann die zweite Achse, wenn

$$(5.11)\qquad (x-1)\, r_1 - m_2 = 0\,, \quad (x+1)\, r_2 - l_1 = 0$$

erfüllt ist. Da dies für alle Werte von x gelten soll, folgt

$$(5.12)\qquad r_1 = r_2 = 0\,, \quad l_1 = m_2 = 0\,.$$

Weiter hat man nach (1.7)

$$(5.13)\qquad r(k - em) + r(h - al) = 0\,,$$

und die Vertauschungsregel für r liefert

$$(5.14)\qquad r(k - em) - r(h - al) = 0\,.$$

Wegen (5.2) ist also

$$(5.15)\qquad k = em\,, \quad h = al\,,$$

und durch Ableitung erhält man daraus wegen (1.5), (1.6)

$$(5.16)\qquad m_1 = l_2 = 0\,.$$

Damit sind alle Bedingungen (1.18) erfüllt, womit der Satz bewiesen ist.

Da die Transversalflächen bei den Wilczynski-Netzen die Trägerflächen der adjungierten Netze sind, hat das ihnen aufgeprägte 1-2-Netz mit dem Ausgangsnetz gemeinsame erste und zweite Achsen. Was läßt sich umgekehrt über diejenigen Netze aussagen, bei denen das auf den Transversalflächen aufgeprägte 1-2-Netz mit dem Ausgangsnetz gemeinsame erste oder zweite Achsen hat?

Der Fall, daß *beide* Achsenkongruenzen gemeinsam sind, führt sofort auf Wilczynski-Netze: S. Finikow[23]) hat nämlich gezeigt, daß jedes Paar konjugierter Netze mit gemeinsamen ersten und zweiten Achsen entweder ein Netzpaar ist, das sich in einer Laplace-Kette der Periode vier gegenüberliegt, oder daß es sich um ein Paar Wilczynskischer Netze handelt. Die erste dieser beiden Möglichkeiten ist hier wegen (5.2) ausgeschlossen, da nach (1.17) für Laplace-Ketten der Periode vier die Größe r verschwindet. Es bleibt also, wie behauptet, nur die zweite übrig.

---

[23]) Vgl. [6]. Dieselbe Frage wurde (mit einer kleinen Einschränkung) auch von Decuyper [3] untersucht, jedoch ist dessen Ergebnis unvollständig, weil danach nur der erste der unten genannten beiden Fälle vorliegen soll.

Wenn nur die zweiten Achsen gemeinsam sind, so folgt daraus, daß die zweiten Achsen für die ersten schichtbildend sind (mit den Transversalflächen als Schichtflächen), aus dem oben bewiesenen Satz, daß $(\mathfrak{x})$ ein Netz von Wilczynski ist.

Wir untersuchen nun den dritten Fall, daß sämtliche 1-2-Netze auf den Transversalflächen gemeinsame erste Achsen haben. Dabei gehen wir von der Darstellung (5.7) mit (5.8) der Transversalflächen aus. Die Schmiegebene der 1-Kurve durch $\mathfrak{p}$ wird von $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1$ und von

$$\mathfrak{p}_{11} \equiv (2xr_1 - m_2)\,\mathfrak{x}_1 + m_1\mathfrak{x} \quad (\operatorname{mod} \mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \tag{5.17}$$

aufgespannt. Sie enthält die Gerade $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ nur dann, wenn

$$(x+1)\,rm_1 - m(2xr_1 - m_2) = 0 \tag{5.18}$$

ist. Durch Vertauschung nach dem Schema (1.14) erhält man die Gleichung

$$(x-1)\,rl_2 - l(2xr_2 - l_1) = 0\,, \tag{5.19}$$

die ausdrückt, daß die Schmiegebene der 2-Kurve durch $\mathfrak{p}$ dieselbe Gerade $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ enthält, die demnach die erste Achse des 1-2-Netzes auf $(\mathfrak{p})$ an der betrachteten Stelle ist. Gelten (5.18) und (5.19) für wenigstens zwei verschiedene Transversalflächen, so folgt

$$m_2 = -2r_1\,, \quad l_1 = 2r_2\,, \tag{5.20}$$

$$m_1 = 2m\frac{r_1}{r}\,, \quad l_2 = 2l\frac{r_2}{r}\,. \tag{5.21}$$

Nun stimmt dieses Gleichungssystem (5.20), (5.21) genau mit (4.4), (4.12), (4.13) überein. Wir haben also den Satz: *Sämtliche (es genügen schon zwei) auf den Transversalflächen eines regulären, nicht harmonischen konjugierten Netzes* $(\mathfrak{x})$ *aufgeprägten* 1-2-*Netzes haben genau dann gemeinsame erste Achsen, wenn die beiden Laplace-Transformierten (erster Ordnung) von* $(\mathfrak{x})$ *doppelte Netze von Rozet sind.*

Der folgende Satz, mit dem wir unsere Untersuchungen abschließen, weist auf die engen Beziehungen hin, die zwischen den Netzen der betrachteten Art und den Netzen von Wilczynski bestehen:

Wenn auf mindestens zwei Transversalflächen die aufgeprägten 1-2-*Netze mit dem Ausgangsnetz gemeinsame ersten Achsen haben und ferner eine der Bedingungen*

a) das 1-2-*Netz ist auf mindestens zwei von den Laplace-Transformierten* 2. *Ordnung verschiedenen Transversalflächen konjugiert,*

b) die Achsen $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ *bilden ein W-Strahlsystem,*

c) mindestens eine der beiden Brennflächen der ersten Achsen ist Transversalfläche,

erfüllt ist, so sind es auch die anderen beiden, und das Ausgangsnetz ist ein Wilczynski-Netz.

Zum Beweis vermerken wir, daß wegen des vorhergehenden Satzes die Bedingungen (4.4), (4.8), (4.12), (4.13) gelten. Für die zusätzlichen Forderungen

a), b) oder c) stellen wir die zugehörigen analytischen Beziehungen auf und zeigen, daß sich (1.18) folgern läßt:

a) Das 1-2-Netz ist auf der Transversalfläche $\mathfrak{p}$ konjugiert, wenn an jeder Stelle

$$\mathfrak{p}_{12} \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} \mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) \tag{5.22}$$

gilt. Andererseits folgt aus $(5.10)^I$ durch Ableiten bei Verwendung von (4.4), (4.8)

$$\mathfrak{p}_{12} = e m \mathfrak{p} + (x+1) r_2 \mathfrak{x}_1 + (x-1) r_1 \mathfrak{x}_2 . \tag{5.23}$$

(5.22) führt damit auf

$$(x^2 - 1)\{r_1^2 l + r_2^2 m - 2 x r_1 r_2 r\} = 0 . \tag{5.24}$$

Die beiden Lösungen $x = 1$ und $x = -1$ entsprechen den Laplace-Transformierten 2. Ordnung. Da es noch mindestens zwei weitere Lösungen geben soll, haben wir

$$r_1 = r_2 = 0 \tag{5.25}$$

(denn nach (1.8) und (5.2) ist $rml \neq 0$). Hieraus folgen wegen (5.20), (5.21) sofort auch die übrigen Beziehungen (1.18), womit der erste Teil bewiesen ist.

b) Aus (3.1) bis (3.3) liest man ab, daß die Geraden $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ nur dann ein W-Strahlsystem erzeugen, wenn

$$\begin{vmatrix} m_2 + 2r_1 & m_1 & 2m \\ l_2 & l_1 - 2r_2 & -2l \\ l_1 & m_2 & -2r \end{vmatrix} = 0 \tag{5.26}$$

ist. Berücksichtigt man (5.20), (5.21), so erhält man daraus

$$r_1 r_2 = 0 . \tag{5.27}$$

Ist etwa $r_1 = 0$, so kann wie von (4.24) an gefolgert werden, daß ein Wilczynski-Netz vorliegt; ist $r_2 = 0$, so erhält man dasselbe durch eine Vertauschung nach dem Schema (1.14).

c) Nach (2.7), (2.8) hat jede Brennfläche eine Darstellung

$$\mathfrak{b} = (\sqrt{1+I})\, r \mathfrak{x} + \mathfrak{y} , \tag{5.28}$$

sie sind also nur beide gleichzeitig Transversalflächen, und zwar dann, wenn I konstant ist. Da $I = mlr^{-2}$ eine Absolute Invariante ist, kann ihre Konstanz durch

$$I_1 = I\left(\frac{m_1}{m} + \frac{l_1}{l} - 2\frac{r_1}{r}\right) = 0 , \quad I_2 = I\left(\frac{m_2}{m} + \frac{l_2}{l} - 2\frac{r_2}{r}\right) = 0 \tag{5.29}$$

ausgedrückt werden. Nach (5.20), (5.21) folgt wieder (5.25). Damit ist die volle Behauptung bewiesen.

Literatur

[1] BOL, G.: Alternierende Formen und halbinvariante Differentiation. Math. Z. **54**, 141—159 (1951).

[2] BOL, G.: Projektive Differentialgeometrie Teil I und Teil II. Göttingen 1950 und 1954; Teil III (in Vorbereitung).

[3] DECUYPER, M.: Sur une propriété de la suite de Laplace de période quatre. Compt. rend. **234**, 697—699 (1952).

[4] FINIKOW, S.: Sur les suites de Laplace contenants des congruences de WILCZYNSKI. Compt. rend. **189**, 517—519 (1929).

[5] FINIKOW, S.: Sur les suites de Laplace périodiques contenants des congruences W. Compt. rend. **188**, 1647—1648 (1929).

[6] FINIKOW, S.: Réseaux conjugués aux axes communs. Math. Mech. Inst. Univ. Tomsk **3**, 75—103 (1946).

[7] GUICHARD, C.: Sur une propriété charactéristique des congruences qui appartiennent à un complexe linéaire. Compt. rend. **170**, 552—554 (1920).

[8] GUICHARD, C.: Sur les congruences qui appartiennent à un complexe linéaire et telles que les lignes de courbure se correspondent sur les deux surfaces focales. Compt. rend. **170**, 1230—1231 (1920).

[9] GUICHARD, C.: Sur les réseaux et les congruences conjugués par rapport à un complexe linéaire. Compt. rend. **170**, 1093—1096 (1920).

[10] JACQUES, R.: Sur les réseaux dont les tangentes appartiennent à des complexes linéaires et les transformations de l'équation de Laplace. Compt. rend. **177**, 579—581 (1923).

[11] JACQUES, R.: Sur les réseaux qui sont tels que les congruences décrites par les tangentes et les congruences dérivées par la méthode de Laplace appartiennent de deux en deux à des complexes linéaires. Compt. rend. **179**, 813—815 (1924).

[12] JACQUES, R.: Sur les réseaux dont les tangentes appartiennent à des complexes linéaires. Compt. rend. **184**, 577—579 (1927).

[13] JACQUES, R.: Sur les réseaux dont les tangentes appartiennent à des complexes linéaires et les surfaces non euclidiennes à courbure totale constante. Compt. rend. **193**, 1312—1314 (1931).

[14] PANTAZI, A.: Sur les couples de congruences stratifiables appartenants à des complexes linéaires. Bull. Math. Soc. Roum. **38 I**, 53—66 (1936).

[15] ROSCA, O.: Asupra unei clase reţele autoproiective, studii çi cercetâri matmatice. Acad. rep. populare romåne **1**, 169—174 (1950).

[16] SU, B.: On certain periodic sequences of Laplace of period four in ordinary space. Sci. Rep. Tôhoku Imp. Univ. Tokyo, **25**, 227—256 (1936).

[17] TZITZEICA, G.: Géometrie projective des réseaux. Bucarest 1923.

[18] WILCZYNSKI, E. J.: Sur la théorie générale des congruences. Mémoires publiés par la Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique, Collection 4° (2) **3** (1911).

(Eingegangen am 25. März 1960)

VOLKMANN, B.
Math. Annalen 141, 237—238 (1930)

Eine metrische Eigenschaft reeller Zahlkörper

Von
BODO VOLKMANN in Mainz

Die einfachsten Beispiele reeller Zahlkörper wie etwa die Menge der rationalen, die der algebraischen oder die der reellen Zahlen haben durchweg die Eigenschaft, die Hausdorffsche Dimension Null oder Eins zu besitzen. Im folgenden wird nun eine metrische Aussage über die reellen Zahlkörper K mit $0 < \dim K = \delta < 1$ (ob es solche gibt, bleibt offen) bewiesen, nämlich daß sie dimensionslos sind, d. h. mit jeder beschränkten, offenen Menge $\mathfrak{O}$ einen Durchschnitt $K \cap \mathfrak{O}$ haben, dessen Hausdorffsches Maß $\{K \cap \mathfrak{O}\}^\delta = 0$ oder ∞ ist. Wir verwenden dazu Ergebnisse, Bezeichnungen und Schreibweise aus einer kürzlich veröffentlichten Arbeit[1]) des Verfassers. Es gilt also der

Satz. *Jeder reelle Zahlkörper K mit $0 < \dim K < 1$ ist dimensionslos.*

Zum Beweis verwenden wir den folgenden

Hilfssatz. *Sei G eine additive Gruppe reeller Zahlen und* $\dim G = \delta > 0$. *Dann ist der Grenzwert*

$$\underline{D}_\delta(x, G) = \underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{\{G \cap [x - \varepsilon, x + \varepsilon]\}^\delta}{2\varepsilon}$$

für alle reellen x der gleiche.

Beweis. Nach Voraussetzung ist G überall dicht; denn sonst wäre die Gruppe abzählbar und daher $\dim G = 0$. Daher gibt es, wenn eine Folge $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ von reellen Zahlen mit $1 \geqq \gamma_1 > \gamma_2 > \cdots$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \gamma_n = 0$ gegeben ist, zu jeder reellen Zahl x und jedem n eine Zahl $x_n \in G$ so, daß

$$(1) \qquad |x - x_n| < \frac{\gamma_n}{n}$$

gilt. Dann sind die beiden Mengen $G \cap [-\gamma_n, \gamma_n]$ und $G \cap [x_n - \gamma_n, x_n + \gamma_n]$ offenbar miteinander kongruent, und daher gilt auf Grund von (1), da sicher

$$\left[x - \gamma_n\left(1 - \frac{1}{n}\right), x + \gamma_n\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] \subseteq$$
$$\subseteq [x_n - \gamma_n, x_n + \gamma_n] \subseteq \left[x - \gamma_n\left(1 + \frac{1}{n}\right), x + \gamma_n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]$$

---

[1]) VOLKMANN, B.: Die Dimensionsfunktion von Punktmengen. Math. Ann. 138, 145—154 (1959). Folgende Berichtigungen sind dort erforderlich: S. 145, Z. 15: „V_η“ statt „v_η“. S. 146, Bem. 5.: „ε“ statt „η“; „$\underline{\lim}$“ statt „lim“. — S. 150, Z. 4—5: „dieser Quotient sowie sein Kehrwert“ statt „die Abbildung T“. — S. 150, Z. 6—7, muß es heißen: „… bildet die Menge $\mathfrak{L}(\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2)$ aller lokalbeschränkten Abbildungen von $\mathfrak{O}_1$ auf $\mathfrak{O}_2$, wenn $\mathfrak{O}_1 = \mathfrak{O}_2$ ist, eine Gruppe“. — S. 151, Z. 4—5 v. u.: „ihrer abgeschlossenen Hülle R“ statt „dem kleinsten sie enthaltenden linearen Teilraum“. — S. 152, Z. 3—6: Der Satz „Dann … übereinstimmt“ ist zu streichen. — S. 152, Z. 11 v. u.: „$M \cap \mathfrak{O}$ mit offenem $\mathfrak{O}$“ statt „von M“.

ist, die Ungleichung

$$\left\{G \cap \left[x - \gamma_n\left(1 - \frac{1}{n}\right), x + \gamma_n\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]\right\}^\delta \leqq$$
$$\leqq \{G \cap [-\gamma_n, \gamma_n]\}^\delta \leqq \left\{G \cap \left[x - \gamma_n\left(1 + \frac{1}{n}\right), x + \gamma_n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]\right\}^\delta.$$

Dividiert man sie durch $2\gamma_n$ und bildet man den unteren Limes, so ergibt sich

$$\underline{D}_\delta(x, G) \leqq \underline{D}_\delta(0, G) \leqq \underline{D}_\delta(x, G),$$

und da dies für alle reellen x gilt, folgt die Behauptung.

Beweis des Satzes. Sei K^+ die Menge der positiven Elemente aus K; sie bildet offenbar eine multiplikative Gruppe. Ferner sei $T(x) = \log x$, so daß die Bildmenge $T(K^+)$ eine additive Gruppe ist. Nach Satz 7 und Satz 5 der erwähnten Arbeit gilt dann, da die Abbildung T im Bereich $x > 0$ sicher lokalbeschränkt ist, überall $\dim(x, T(K^+)) = \delta = \dim K$.

Sind jetzt $\eta > 0, \varepsilon_1 > 0$ und $x > 0$ reelle Zahlen und $I = \{\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \ldots\}$ eine η-Überdeckung von $T(K^+) \cap [x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1]$, so geht I durch die Abbildung $T^{-1}(x) = e^x$ in eine Überdeckung von $K \cap [e^{x-\varepsilon_1}, e^{x+\varepsilon_1}]$ über, wobei aus jedem Intervall $\mathrm{i} = (\alpha, \beta)$ ein Bildintervall $T^{-1}(\mathrm{i}) = (e^\alpha, e^\beta)$ mit der Länge

$$|T^{-1}(\mathrm{i})| = e^\beta - e^\alpha = e^{\alpha + |\mathrm{i}|} - e^\alpha = e^\alpha\left(|\mathrm{i}| + \frac{|\mathrm{i}|^2}{2!} + \frac{|\mathrm{i}|^3}{3!} + \cdots\right)$$

entsteht. Folglich ist bei gegebenem $\varepsilon_2 > 0$ für hinreichend kleines η offenbar stets

$$|\mathrm{i}| e^\alpha \leqq |T^{-1}(\mathrm{i})| \leqq |\mathrm{i}| e^\alpha (1 + \varepsilon_2) \leqq |\mathrm{i}| e^{x+\varepsilon_1}(1 + \varepsilon_2)$$

und daher, wie sich durch den Grenzübergang $\eta \to 0$ ergibt,

$$\{K \cap [e^{x-\varepsilon_1}, e^{x+\varepsilon_1}]\}^\delta \leqq e^{(x+\varepsilon_1)\delta}(1 + \varepsilon_2)^\delta \{T(K^+) \cap [x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1]\}^\delta,$$

also auch

$$\underline{D}_\delta(e^x, K) \leqq \underline{D}_\delta(x, T(K^+)) e^{x\delta}. \tag{2}$$

Die entgegengesetzte Ungleichung erhält man entsprechend bei Vertauschung von T und T^{-1}, so daß in (2) das Gleichheitszeichen gilt. Da aber nach dem obigen Hilfssatz (mit $G = T(K^+)$) überall, unabhängig von x,

$$\underline{D}_\delta(x, T(K^+)) = \lambda$$

ist, folgt somit

$$\underline{D}_\delta(e^x, K) = e^{x\delta}\lambda.$$

Andererseits muß aber nach dem Hilfssatz (mit $G = K$) die rechte Seite dieser Gleichung von x unabhängig sein. Dies ist nur möglich, wenn $\lambda = 0$ oder $\lambda = \infty$ ist, und daraus läßt sich leicht die Behauptung folgern.

(Eingegangen am 1. April 1960)

PIEHLER, J.
Math. Annalen 141, 239—241 (1960)

Über Primzahldarstellungen durch binäre quadratische Formen

Von

JOACHIM PIEHLER in Leuna

Im folgenden werden einige elementare Tatsachen über Primzahldarstellungen durch primitive definite binäre quadratische Formen mit ganzrationalen Koeffizienten abgeleitet. Die Grundlage zu den Untersuchungen bildet der folgende (auch für indefinite Formen gültige)

Satz 1: *Stellen zwei binäre quadratische Formen mit ganzrationalen Koeffizienten und gleicher Diskriminante die gleiche Primzahl p dar, so sind sie eigentlich oder uneigentlich äquivalent.*

Zum *Beweis* bemerken wir, daß die beiden Formen zunächst durch unimodulare Transformationen in

$$(p, b_1, c_1) \quad \text{mit} \quad -p < b_1 \leqq p$$

und

$$(p, b_2, c_2) \quad \text{mit} \quad -p < b_2 \leqq p$$

überführt werden können. Auf Grund der Gleichheit der beiden Diskriminanten D folgt dann

$$D = b_1^2 - 4pc_1 = b_2^2 - 4pc_2 .$$

Sei p zunächst als ungerade angenommen. Geht p in D auf, so ist $b_1 = b_2 = 0$ oder p, je nachdem D gerade oder ungerade ist. Geht p nicht in D auf, so folgt

$$b_1^2 - b_2^2 \equiv 0, (4p) ,$$

und weil b_1 und b_2 wieder beide zugleich gerade oder ungerade sein müssen, ergibt sich entweder

$$b_1 - b_2 \equiv 0, (2p) \quad \text{oder} \quad b_1 + b_2 \equiv 0, (2p) .$$

Sowohl b_1 als auch b_2 ist absolut kleiner als p, so daß diese Kongruenzen in Form von Gleichungen erfüllt sind. Es ergibt sich also

$$b_1 = b_2 \quad \text{oder} \quad b_1 = -b_2 ,$$

woraus $c_1 = c_2$ folgt und die oben angegebenen Formen entweder gleich oder entgegengesetzt sind.

Geht p im Falle $p = 2$ in D auf, so folgt $b_1 = b_2 = 0$ oder 2, je nachdem D durch 8 oder nur genau durch 4 teilbar ist. Ist D ungerade, so ergibt sich unmittelbar, daß die beiden mittleren Koeffizienten nur die Werte 1 oder -1 annehmen können. Dann folgt wieder $c_1 = c_2$ und der Satz ist vollständig bewiesen.

Auf Grund dieses Satzes kann für jede Diskriminante D eine Einteilung der Primzahlmenge in endlich viele elementfremde Klassen erfolgen, deren Anzahl mit der Zahl der Formenklassen im weiteren Sinne übereinstimmt. Jede dieser Primzahlklassen enthält dann nach einem bekannten Satz unendlich viele Elemente.

Wir nennen eine Menge von Primzahlen „zusammengehörig unter D", wenn diese Primzahlen alle durch eine Form der Diskriminante D dargestellt werden, d. h. in einer Primzahlklasse der Diskriminante D liegen.

Es sollen nun einige Ergebnisse über zusammengehörige Primzahlen hergeleitet werden. Dabei können wir uns ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf die Zusammengehörigkeit zweier Primzahlen beschränken, denn n Primzahlen gehören dann und nur dann zusammen, wenn irgendeine von ihnen mit allen anderen paarweise zusammengehört. Im folgenden wollen wir uns jetzt aber auf positiv definite Formen beschränken. Es bestehen dann zwei grundsätzliche Probleme:

1. Entscheidung darüber, ob zwei gegebene Primzahlen unter einer gegebenen Diskriminante zusammengehören;
2. Bestimmung aller Diskriminanten, unter denen zwei gegebene Primzahlen zusammengehören.

Ein Kriterium zum ersten Problem gibt der folgende

Hilfssatz: *Zwei Primzahlen p_1 und p_2 gehören dann und nur dann unter D zusammen, wenn ihr Produkt in der Hauptklasse der Diskriminante D dargestellt wird.*

Zum Beweis nehmen wir zunächst an, daß $p_1 p_2$ durch die Hauptform der Diskriminante D dargestellt wird. Dann gibt es eine Form der Hauptklasse der Gestalt $(p_1 p_2, b, c)$, und aus der Formenkomposition

$$(p_1 p_2, b, c) = (p_1, b, c p_2)\,(p_2, b, c p_1) \quad \text{folgt} \quad (p_1, b, c p_2) \sim (p_2, -b, c p_1)\,.$$

Sind umgekehrt (p_1, b_1, c_1) und (p_2, b_2, c_2) äquivalent, dann wenden wir auf diese beiden Formen die unimodularen Transformationen

$$\begin{bmatrix} 1 & h_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} 1 & h_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

an und wählen dabei h_1 und h_2 so, daß die mittleren Koeffizienten der beiden transformierten Formen unterschiedliches Vorzeichen besitzen, aber absolut gleich sind. Haben die beiden Formen dann etwa die Gestalten (p_1, b, c_1') und $(p_2, -b, c_2')$, so folgt wegen der Gleichheit der Diskriminanten $p_2 | c_1'$, $p_1 | c_2'$ und $\frac{c_1'}{p_2} = \frac{c_2'}{p_1} = c$. Die beiden Formen $(p_1, b, p_2 c)$ und $(p_2, b, p_1 c)$ sind dann aber entgegengesetzt und ihr Kompositum $(p_1 p_2, b, c)$ liegt in der Hauptklasse. Damit ist alles bewiesen. Unter Benutzung dieses Hilfssatzes ist es nun möglich, alle negativen Diskriminanten zu finden, unter denen zwei gegebene Primzahlen zusammengehören.

Satz 2: *Sind p_1 und p_2 gegeben, so gehören diese Primzahlen unter den Diskriminanten $D_k = k^2 - 4 p_1 p_2$, $k = 0, 1, \ldots \left[\sqrt{4 p_1 p_2}\right]$ und den daraus durch*

Quadratabspaltung entstehenden ganzzahligen Diskriminanten zusammen. Die beiden Primzahlen gehören auch nur unter diesen Diskriminanten zusammen.

Beweis: Den angegebenen Diskriminanten D_k entsprechen die Formen (p_1, k, p_2) für $k = 0, 1, \ldots [\sqrt{4p_1p_2}]$, so daß p_1 und p_2 offenbar unter D_k zusammengehören. Aus der Zusammengehörigkeit zweier Primzahlen unter Dh^2 folgt dann auch die Zusammengehörigkeit unter D, weil aus der Darstellbarkeit von p_1p_2 durch die Hauptform der Diskriminante Dh^2 auch die Darstellbarkeit durch die Hauptform der Diskriminante D folgt.

Gehören umgekehrt p_1 und p_2 unter D zusammen, so gibt es nach unserem Hilfssatz Zahlen u und v, so daß

$$u^2 - \frac{D}{4} v^2 = p_1p_2$$

oder

$$u^2 + uv + \frac{1-D}{4} v^2 = p_1p_2$$

gilt, je nachdem D gerade oder ungerade ist. Hieraus folgen aber die Darstellungen

$$(2u)^2 - 4p_1p_2 = Dv^2$$

bzw.

$$(2u + v)^2 - 4p_1p_2 = Dv^2,$$

woraus sich ergibt, daß Dv^2 unter den D_k enthalten ist, und D kann im Falle $v > 1$ durch Abspalten des Quadrates v^2 daraus gewonnen werden.

Dieser Satz kann nun auch zur Lösung des ersten Problems benutzt werden und dürfte mitunter wesentlich schneller zum Ziele führen als der Hilfssatz. Als triviales Korollar ergibt sich noch, daß zwei Primzahlen nur unter endlich vielen Diskriminanten zusammengehören können.

(Eingegangen am 9. April 1960)

THOMA, E.
Math. Annalen 141, 242—280 (1960)

Über imprimitive Darstellungen lokal-kompakter Gruppen

Von

ELMAR THOMA z. Z. in Seattle, Wash., USA

Einleitung

In [7][1]) hat MACKEY den Begriff der Imprimitivität von Darstellungen auf unitäre Darstellungen von lokal-kompakten Gruppen ausgedehnt und im wesentlichen die imprimitiven Darstellungen mit einer Bahn betrachtet. Mit Hilfe dieser Theorie kann man die irreduziblen Darstellungen gewisser Gruppen, z. B. der inhomogenen Bewegungsgruppe des n-dimensionalen euklidischen Raumes R_n, auf die irreduziblen Darstellungen einfacherer Gruppen zurückführen. So erhält man eine Übersicht über gewisse, eventuell auch alle, Äquivalenzklassen von irreduziblen Darstellungen und kann Normalformen für die irreduziblen Darstellungen explizit angeben (vgl. [9], S. 131). In dieser Arbeit werden wir das Verfahren von MACKEY in naheliegender Weise so verallgemeinern, daß wir für gewisse Gruppen, z. B. für die inhomogene Bewegungsgruppe des R_n, eine Übersicht über gewisse Äquivalenzklassen unitärer Darstellungen (nicht nur irreduzibler) erhalten können (vgl. Teil.III dieser Arbeit). Wir führen dazu den Begriff des imprimitiven Systemes einer lokal-kompakten Gruppe mit einer Produkt-Basis ein und geben eine Übersicht über alle Äquivalenzklassen solcher imprimitiven Systeme mit Hilfe der Darstellungsfelder einer gewissen Untergruppe G_0 der Gruppe G an (vgl. Satz 3). Wir erhalten dabei zugleich Normalformen für diese Äquivalenzklassen. Falls G_0 kompakt ist, können wir die Normalformen in einfacher Weise sogar auf die endlich-dimensionalen irreduziblen Darstellungen von G_0 zurückführen (vgl. Satz 5).

Im Teil I dieser Arbeit betrachten wir einige Eigenschaften allgemeiner imprimitiver Systeme. Im § 1 werden die grundsätzlichen Definitionen angegeben und es wird gezeigt, daß jedes imprimitive System äquivalent zu einem imprimitiven System der Form $((\mu, n), U)$ ist, wobei der Darstellungsraum (μ, n) des imprimitiven Systemes ein direktes Integral ist, mit dem das Spektralmaß des imprimitiven Systemes in einfacher Weise verknüpft ist (vgl. Lemma 1). Im § 2 beweisen für den Fall imprimitiver Systeme mit regulärer Basis, daß man in den direkten Integralen (μ, n) in den Punkten einer Bahn stets denselben Hilbert-Raum wählen kann.

---

[1]) Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis.

Im Teil II werden dann imprimitive Systeme mit einer Produkt-Basis $M_0 \times B$ betrachtet, d. h. die Basis besteht im wesentlichen aus verschiedenen Exemplaren derselben Bahn B. Dann ist das direkte Integral (μ, n) in der Form $((\mu, n), U)$ eines imprimitiven Systemes bereits durch ein Maß $\tilde{\mu}$ über M_0 und durch eine Dimensionsfunktion $\tilde{n}$ über M_0 bestimmt (vgl. § 3). Wir bezeichnen diese direkten Integrale mit $[\tilde{\mu}, \tilde{n}]$. G_0 sei die Untergruppe aller Elemente von G, die ein Element z_0 der Bahn B fest läßt. In § 5 konstruieren wir imprimitive Systeme von G mit Hilfe von Darstellungsfeldern von G_0 über M_0 (vgl. Satz 1). Die Konstruktion ist eine einfache Verallgemeinerung einer Konstruktion von Mackey (vgl. [9]). Wir bringen diese imprimitiven Systeme noch auf die Form $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U)$ (vgl. Satz 2). Im § 6 wird dann gezeigt, daß alle imprimitiven Systeme äquivalent zu solchen imprimitiven Systemen sind (vgl. Satz 3). Wir folgen hier wieder den Verfahren von Mackey (vgl. [7]). In [7] sind die Beweise nur skizziert. Wir führen sie vollständig durch, einmal der Vollständigkeit halber und wegen der vorgenommenen Verallgemeinerungen und zum anderen, weil wir dieses Verfahren in § 11 und § 13 benutzen, um die Normalformen gewisser Darstellungen (Kronecker-Produkte) explizit zu bestimmen. Die Schwierigkeiten in den Beweisen von § 6 sind ausschließlich maßtheoretischer Natur. Bei den Anwendungen in § 11 und § 13 fallen gerade diese Schwierigkeiten vollständig weg, und es ist einfach, die Normalformen zu finden, wenn man einmal die Form $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U)$ erreicht hat. Im § 7 berechnen wir die Normalformen direkter Summen imprimitiver Systeme. Dieses Verfahren liefert uns dann in einfacher Weise eine Charakterisierung der irreduziblen imprimitiven Systeme (vgl. Satz 4). Im § 8 zeigen wir, daß im Falle eines kompakten G_0 die imprimitiven Systeme direkte Summen von imprimitiven Systemen der folgenden einfachen Form sind: Das Darstellungsfeld L^0 von G_0 des imprimitiven Systemes besteht nur aus den Vielfachen einer festen irreduziblen Darstellung von G_0 (vgl. Satz 5).

Im Teil III wenden wir unsere Ergebnisse an, um unitäre Darstellungen von Gruppen zu bestimmen. In § 9 zeigen wir in bekannter Weise, daß die unitären Darstellungen eines semi-direkten Produktes einer Gruppe G mit einer kommutativen Gruppe T den imprimitiven Systemen von G mit der Basis $\hat{T}$ entsprechen, wobei $\hat{T}$ die duale Gruppe von T ist. Wir betrachten als Beispiele die universellen Überlagerungsgruppen der inhomogenen Bewegungsgruppe des R_3 und der inhomogenen Lorentzgruppe. Ganz entsprechend kann man auch den Fall der inhomogenen Bewegungsgruppe für $n > 3$ behandeln. Als weitere Anwendung bringen wir noch die Kroneckerprodukte von gewissen irreduziblen Darstellungen dieser Gruppen auf die entsprechenden Normalformen. Dazu bringen wir zunächst die entsprechenden imprimitiven Systeme auf die Form $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U)$ und berechnen dann die entsprechenden Darstellungsfelder nach § 6 und § 8. Wir bemerken noch, daß man einen Teil dieser Ergebnisse auch mit Hilfe von [9], Theorem 14.2 und 12.2 und [11], Theorem 10.1 erhalten kann. Im Falle der Lorentzgruppe und der inhomogenen Bewegungsgruppen für $n > 3$ erhält man damit aber keine vollständige Reduktion in unserem Sinne.

I. Allgemeine imprimitive Systeme

§ 1. *Imprimitive Systeme der Form* $((\mu, n), U)$

G sei eine lokal-kompakte Gruppe mit abzählbarer (topologischer) Basis[2]). Mit e bezeichnen wir stets das neutrale Element von G. M sei eine nicht-leere Menge, und $\mathfrak{B}_M$ sei ein σ-Körper von Teilmengen von M mit $M \in \mathfrak{B}_M$. Ferner sei $x, s \to xs$ eine Abbildung von $M \times G$ auf M mit den Eigenschaften:

$$(1)\quad \begin{cases} 1.\ xe = x \text{ für alle } x \in M\,, \\ 2.\ x(st) = x(st) \text{ für alle } x \in M \text{ und } s, t \in G\,, \\ 3.\ \text{aus } E \in \mathfrak{B}_M \text{ folgt } Es = \{xs : x \in E\} \in \mathfrak{B}_M \text{ für alle } s \in G\,. \end{cases}$$

Im folgenden halten wir G, M, $\mathfrak{B}_M$ und $x, s \to xs$ fest. $(\mathfrak{H}, U, P)$ heißt (vgl. [7]) *imprimitives System* (von G mit der Basis M), wenn gilt:

$$(2)\quad \begin{cases} 1.\ \mathfrak{H} \text{ ist ein separabler Hilbert-Raum}^{3)}, \\ 2.\ U(s \to U_s) \text{ ist eine stark stetige, unitäre Darstellung von } G \\ \quad \text{mit dem Darstellungsraum } \mathfrak{H}, \\ 3.\ P(E \to P_E) \text{ ist ein Spektralmaß über } \mathfrak{B}_M, \text{ dessen Werte} \\ \quad \text{Projektionen in } \mathfrak{H} \text{ sind}^{4)}, \\ 4.\ U_s P_E U_s^{-1} = P_{Es^{-1}} \text{ für alle } E \in \mathfrak{B}_M \text{ und } s \in G\,. \end{cases}$$

Zwei imprimitive Systeme $(\mathfrak{H}, U, P)$ und $(\mathfrak{H}', U', P')$ heißen *äquivalent*, wenn es eine unitäre Abbildung V von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{H}'$ gibt mit $U'_s = V U_s V^{-1}$ und $P'_E = V P_E V^{-1}$ für alle $s \in G$ und $E \in \mathfrak{B}_M$. V heißt dann *Äquivalenzabbildung* von $(\mathfrak{H}, U, P)$ auf $(\mathfrak{H}', U', P')$.

Zu jedem imprimitiven System $(\mathfrak{H}, U, P)$ gehört definitionsgemäß ein Spektralmaß P über $\mathfrak{B}_M$. Mit $(\mathfrak{H}, P)$ bezeichnen wir ein Spektralmaß über $\mathfrak{B}_M$, dessen Werte Projektionen in $\mathfrak{H}$ sind. Zwei Spektralmaße $(\mathfrak{H}, P)$ und $(\mathfrak{H}', P')$ heißen *äquivalent*, wenn es eine unitäre Abbildung V von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{H}'$ gibt mit $V P_E V^{-1} = P'_E$ für alle $E \in \mathfrak{B}_M$. V heißt dann *Äquivalenzabbildung* von $(\mathfrak{H}, P)$ auf $(\mathfrak{H}', P')$.

Es sei μ ein σ-endliches Maß über $\mathfrak{B}_M$ und jedem $x \in M$ sei ein separabler Hilbert-Raum $\mathfrak{H}_x$ zugeordnet; dabei sei die Menge $S_0 = \{x : \mathfrak{H}_x = \{0\}\}$ eine μ-Nullmenge. Wie in [13], S. 431, definieren wir das direkte Integral $\mathfrak{S} = (\int \mathfrak{H}_x d\mu, \mathfrak{M})$. Wir betrachten im folgenden nur direkte Integrale, die separable Hilbert-Räume liefern. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß der Hilbert-Raum aller bezüglich μ quadratisch integrierbaren Funktionen separabel ist.

---

[2]) Alle vorkommenden topologischen Räume seien Hausdorffsch.

[3]) Da wir uns im folgenden auf separable Hilbert-Räume beschränken, nehmen wir diese Forderung gleich in die Definition auf. Überhaupt seien alle im folgenden vorkommenden Hilbert-Räume separabel.

[4]) Zur Definition des Spektralmaßes vergleiche z. B. [13], S. 431.

Beweise zu den folgenden Bemerkungen über direkte Integrale sind z. B. in [13] und [12] angegeben. Ist $\mathfrak{S} = (\int \mathfrak{H}_x d\mu, \mathfrak{M})$ ein direktes Integral, so gehört zu $\mathfrak{S}$ ein Spektralmaß $(\mathfrak{S}, P)$ mit $(P_E f)(x) = \chi_E(x) f(x)$ für alle $f \in \mathfrak{S}$ und $E \in \mathfrak{B}_M$; dabei ist χ_E die charakteristische Funktion von E. Ist $(\mathfrak{H}, P)$ ein Spektralmaß, so gibt es ein direktes Integral $\mathfrak{S} = (\int \mathfrak{H}_x d\mu, \mathfrak{M})$, so daß $(\mathfrak{H}, P)$ und das zu $\mathfrak{S}$ gehörige Spektralmaß äquivalent sind. Dabei ist μ äquivalent zum gegebenen Spektralmaß $(\mathfrak{H}, P)$, d. h. beide Maße haben dieselben Nullmengen. Zwei direkte Integrale $\mathfrak{S} = (\int \mathfrak{H}_x d\mu, \mathfrak{M})$ und $\mathfrak{S}' = (\int \mathfrak{H}'_x d\mu', \mathfrak{M}')$ heißen *äquivalent*, wenn die zugehörigen Spektralmaße äquivalent sind. Es gilt dann: Zwei direkte Integrale $\mathfrak{S} = (\int \mathfrak{H}_x d\mu, \mathfrak{M})$ und $\mathfrak{S}' = (\int \mathfrak{H}'_x d\mu', \mathfrak{M}')$ sind genau dann äquivalent, wenn die Maße μ und μ' äquivalent sind, und wenn $\dim \mathfrak{H}'_x = \dim \mathfrak{H}'_x$ μ-fast überall gilt. Sind $\mathfrak{S} = (\int \mathfrak{H}_x d\mu, \mathfrak{M})$ und $\mathfrak{S}' = (\int \mathfrak{H}'_x d\mu', \mathfrak{M}')$ äquivalent, so heißt ein Feld unitärer Transformationen $\mathfrak{V}(x)$ von $\mathfrak{H}_x$ auf $\mathfrak{H}'_x$ ein *Äquivalenzfeld* von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{S}'$, wenn $\mathfrak{V}(x)$ auf M μ-fast überall definiert ist, und wenn $f' \in \mathfrak{S}'$ aus $f \in \mathfrak{S}$ folgt. Dabei ist $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\gamma(x)}} \mathfrak{V}(x) f(x)$, falls $\mathfrak{V}(x)$ definiert ist, und $f'(x) = 0$ sonst und $\gamma(x)$ die Radon-Nikodym-Ableitung von μ' bezüglich μ; wir können $\gamma(x) > 0$ für alle $x \in M$ annehmen. Die Abbildung $f \to f'$ liefert dann eine Äquivalenzabbildung V von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{S}'$[5]). V heißt die zum Äquivalenzfeld $\mathfrak{V}(x)$ gehörige Äquivalenzabbildung. Ist umgekehrt V eine Äquivalenzabbildung von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{S}'$, so gibt es ein Äquivalenzfeld $\mathfrak{V}(x)$ von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{S}'$, zu dem V gehört. $\mathfrak{V}(x)$ ist dabei durch V bis auf μ-Nullmengen eindeutig bestimmt. V^{-1} gehört zum Äquivalenzfeld $\mathfrak{V}(x)^{-1}$.

Ist μ ein σ-endliches Maß über $\mathfrak{B}_M$ und n eine Funktion über M mit den Eigenschaften

$$(3) \qquad \begin{cases} 1.\ n(x) = \text{ganzzahlig und} \geqq 0 \text{ oder } n(x) = +\infty, \\ 2.\ n \text{ ist } \mathfrak{B}_M\text{-meßbar und} \\ 3.\ \{x : n(x) = 0\} \text{ ist eine } \mu\text{-Nullmenge,} \end{cases}$$

so definieren wir mit Hilfe eines separablen Hilbert-Raumes $\mathfrak{H}_0$ und einer orthonormierten Basis $e_1, e_2, \ldots$ von $\mathfrak{H}_0$ das normierte direkte Integral (μ, n) wie in [13], S. 432. Ist $\mathfrak{S} = (\int \mathfrak{H}_x d\mu, \mathfrak{M})$, so ist $\mathfrak{S}$ äquivalent zum normierten direkten Integral (μ, n) mit $n(x) = \dim \mathfrak{H}_x$. Wegen der Äquivalenz von $\mathfrak{S}$ und (μ, n) können wir uns im folgenden meist auf normierte direkte Integrale beschränken.

Mit $((\mu, n), U)$ bezeichnen wir ein imprimitives System $((\mu, n), U, P)$, bei dem (μ, n) ein normiertes direktes Integral ist und $((\mu, n), P)$ das zu (μ, n) gehörige Spektralmaß ist. Ist $(\mathfrak{H}, U, P)$ ein imprimitives System, so gibt es ein (μ, n) und eine Äquivalenzabbildung V von $(\mathfrak{H}, P)$ auf das zu (μ, n) gehörige Spektralmaß. Übertragen wir mit V auch die Darstellung U auf (μ, n), so erhalten wir ein imprimitives System der Form $((\mu, n), U')$ mit $U'_s = V U_s V^{-1}$,

[5]) Wir bezeichnen mit $\mathfrak{S}$ sowohl die Menge der Vektorfelder, als auch den zugehörigen Hilbert-Raum. Der Leser wird aus dem Zusammenhang stets entnehmen können, welche Bedeutung gemeint ist.

das zu $(\mathfrak{H}, U, P)$ äquivalent ist. Damit erhalten wir, unter Berücksichtigung der oben erwähnten Tatsachen über direkte Integrale folgendes

Lemma 1: Jedes imprimitive System $(\mathfrak{H}, U, P)$ ist zu einem imprimitiven System der Form $((\mu, n), U)$ äquivalent. Dabei ist μ durch $(\mathfrak{H}, U, P)$ bis auf Äquivalenz bestimmt und n bis auf μ-Nullmengen. Man kann μ stets durch ein äquivalentes σ-endliches Maß ersetzen und n auf μ-Nullmengen abändern. Eine Äquivalenzabbildung von $((\mu, n), U)$ auf $((\mu', n'), U')$ gehört stets zu einem Äquivalenzfeld.

Ein σ-endliches Maß μ über $\mathfrak{B}_M$ heißt *quasi-invariant*, wenn aus $\mu(E) = 0$ stets $\mu(Es) = 0$ für alle $s \in G$ folgt.

Lemma 2: Ist $((\mu, n), U)$ ein imprimitives System, so ist μ quasi-invariant.

Beweis. $((\mu, n), P)$ sei das zu (μ, n) gehörige Spektralmaß. Aus $\mu(E) = 0$ folgt $P_E = 0$, also wegen $U_s P_E U_s^{-1} = P_{Es^{-1}}$ auch $P_{Es^{-1}} = 0$ und damit $\mu(Es^{-1}) = 0$.

Lemma 3: $((\mu, n), U)$ sei ein imprimitives System. Ist α eine $\mathfrak{B}_M$-meßbare komplex-wertige Funktion und $f \in (\mu, n)$ und $\alpha f \in (\mu, n)$, dann ist

$$U_s(\alpha f) = \alpha_s(U_s f) \text{ für alle } s \in G; \tag{4}$$

dabei ist α_s durch $\alpha_s(x) = \alpha(xs)$ definiert. Ist α beschränkt, so gilt (4) für alle $f \in (\mu, n)$.

Beweis. Zunächst sei $\alpha = \chi_E$ mit $E \in \mathfrak{B}_M$. Aus $f \in (\mu, n)$ folgt $\chi_E f \in (\mu, n)$. Da $((\mu, n), U)$ ein imprimitives System ist, gilt $U_s(\chi_E f) = \chi_{Es^{-1}}(U_s f) = (\chi_E)_s(U_s f)$. Da U_s linear ist, gilt (4) für alle Linearkombinationen endlich vieler χ_{E_i} mit $E_i \in \mathfrak{B}_M$. Jede $\mathfrak{B}_M$-meßbare Funktion α ist Limes einer Folge α_n solcher Linearkombinationen mit $|\alpha_n| \leqq |\alpha|$. Dann ist aber $\alpha_n f \in (\mu, n)$ und $\lim_{n\to\infty} \alpha_n f = \alpha f$ im Hilbert-Raum (μ, n). Da U_s stetig ist, gilt also $U_s(\alpha f) = U_s\left(\lim_{n\to\infty} \alpha_n f\right) = \lim U_s(\alpha_n f) = \lim(\alpha_n)_s(U f) = \alpha_s(U_s f)$. Ist α beschränkt, so folgt $\alpha f \in (\mu, n)$ aus $f \in (\mu, n)$.

$(\mathfrak{H}_i, U^i, P^i)$, $i = 1, 2, \ldots$, seien endlich oder abzählbar viele imprimitive Systeme mit der Basis M. Unter der direkten Summe $(\mathfrak{H}_1, U^1, P^1) \oplus (\mathfrak{H}_2, U^2, P^2) \oplus \cdots$ verstehen wir das imprimitive System $(\mathfrak{H}, U, P)$, wo $\mathfrak{H}$ direkte Summe der $\mathfrak{H}_i$, U direkte Summe der U^i und P_E direkte Summe der P_E^i ist. $M_1, M_2, \ldots$, sei eine Zerlegung von M in endlich oder abzählbar viele paarweise fremde Mengen aus $\mathfrak{B}_M$, die invariant sind, d. h. $M_i s = M_i$ für alle $s \in G$. Ist $(\mathfrak{H}, U, P)$ ein imprimitives System, so sind die Teilräume $\mathfrak{H}_i$ von $\mathfrak{H}$, auf die P_{M_i} projiziert, wegen (2) 4. und der Invarianz der M_i, invariante Teilräume für die U_s und ebenso für die P_E, wegen $P_E P_{M_i} = P_{M_i} P_E = P_{E \cap M_i}$ (vgl. [4], S. 58). Falls $\mathfrak{H}_i \neq \{0\}$ und U_s^i bzw. P_E^i die Beschränkung von U_s bzw. P_E auf $\mathfrak{H}_i$ ist, so ist $(\mathfrak{H}_i, U^i, P^i)$ ein imprimitives System mit der Basis M. Es gilt dann

$$(\mathfrak{H}, U, P) = (\mathfrak{H}_1, U^1, P^1) \oplus (\mathfrak{H}_2, U^2, P^2) \oplus \cdots, \tag{5}$$

dabei bleiben die Summanden mit $\mathfrak{H}_i = \{0\}$, d. h. $P_{M_i} = 0$, weg. (5) heißt die zur Zerlegung $M_1, M_2, \ldots$, gehörige Zerlegung von $(\mathfrak{H}, U, P)$.

Lemma 4: Sind $(\mathfrak{H}, U, P)$ *und* $(\mathfrak{H}', U', P')$ *imprimitive Systeme und* $(\mathfrak{H}_1, U^1, P^1) \oplus (\mathfrak{H}_2, U^2, P^2) \oplus \cdots$ *und* $(\mathfrak{H}'_1, U'^1, P'^1) \oplus (\mathfrak{H}'_2, U'^2, P'^2) \oplus \cdots$ *die zu* $M_1, M_2, \ldots,$ *gehörigen Zerlegungen, so ist* $(\mathfrak{H}, U, P)$ *dann und nur dann äquivalent zu* $(\mathfrak{H}', U', P')$, *wenn in beiden Zerlegungen die entsprechenden Summanden paarweise äquivalent sind oder gleichzeitig fehlen.*

Beweis. Es ist nur „nur dann" zu beweisen. V sei eine Äquivalenzabbildung von $(\mathfrak{H}, U, P)$ auf $(\mathfrak{H}', U', P')$. Dann ist $VP_{M_i} = P'_{M_i}V$, d. h. V bildet $\mathfrak{H}_i$ auf $\mathfrak{H}'_i$ ab. Also sind entweder $\mathfrak{H}_i$ und $\mathfrak{H}'_i$ gleichzeitig $\{0\}$ oder die Beschränkung von V auf $\mathfrak{H}_i$ liefert eine Äquivalenzabbildung von $(\mathfrak{H}_i, U^i, P^i)$ auf $\mathfrak{H}'_i, U'^i, P'^i)$.

Ist $((\mu, n), U)$ ein imprimitives System, so können wir die zu $M_1, M_2, \ldots,$ gehörige Zerlegung $((\mu_1, n_1), U^1) \oplus ((\mu_2, n_2), U^2) \oplus \cdots$ sofort angeben: Es ist $\mu_i(E) = \mu(E \cap M_i)$ und $n_i = \chi_{M_i} \cdot n$, und ein Summand bleibt genau dann weg, wenn $\mu(M_i) = 0$ ist.

§ 2. *Imprimitive Systeme mit regulärer Basis*

Wir machen nun noch einige Voraussetzungen, die über die in § 1 gemachten hinausgehen. M sei ein lokal-kompakter Raum mit abzählbarer Basis und $\mathfrak{B}_M$ der σ-Körper der Borelmengen von M. Ferner sei $x, s \to xs$ eine stetige Abbildung von $M \times G$ auf M, die (1) 1. und 2. erfüllt. Dann ist auch (1) 3. erfüllt, da $x \to xs$ ein Homöomorphie ist. Die Bahn B_{x_0} durch den Punkt $x_0 \in M$ ist die Menge $\{x : x = x_0 s, s \in G\}$. M_0 sei die Menge aller Bahnen. M_0 ist also ein Quotientenmenge von M. Mit q bezeichnen wir die Abbildung $x \to B_x$ von M auf M_0.

Die Basis M heißt nach [7] *regulär*, wenn es endlich oder abzählbar viele Mengen $E_1, E_2, \ldots,$ aus $\mathfrak{B}_M$ gibt mit folgenden Eigenschaften: 1. E_i ist invariant, $i = 1, 2, \ldots$; 2. $\bigcup_{i=1} E_i = M$; 3. jede Bahn ist Durchschnitt der E_i, die sie enthalten. Im folgenden sei M stets regulär.

$\mathfrak{B}_{M_0}$ sei der σ-Körper aller Teilmengen E von M_0 mit $q^{-1}(E) \in \mathfrak{B}_M$. Ferner sei für $y \in M_0$ $\mathfrak{B}_y$ der σ-Körper aller Teilmengen F von y mit $F \in \mathfrak{B}_M$. Ist μ ein endliches Maß über $\mathfrak{B}_M$, so sei $\tilde{\mu}$ das Maß über $\mathfrak{B}_{M_0}$ mit $\tilde{\mu}(F) = \mu(q^{-1}(F))$ für $F \in \mathfrak{B}_{M_0}$. Zu jedem $y \in M_0$ existiert dann ein Maß μ_y über $\mathfrak{B}_y$ mit folgenden Eigenschaften:

$$(6) \qquad \begin{cases} 1. \ \mu_y(y \cap E) \text{ ist } \mathfrak{B}_{M_0}\text{-meßbar für alle } E \in \mathfrak{B}_M, \\ 2. \ \mu(E) = \int \mu_y(y \cap E)\, d\tilde{\mu} \text{ für alle } E \in \mathfrak{B}_M{}^{6)}. \end{cases}$$

Die μ_y sind durch (6) bis auf Änderungen auf $\tilde{\mu}$-Nullmengen eindeutig bestimmt und es gilt $\mu_y(y) = 1$ $\tilde{\mu}$-fast überall. Ist μ quasi-invariant, so sind die μ_y $\tilde{\mu}$-fast überall quasi-invariant nach [9], S. 126.

Wir wählen ein $x_0 \in y$ aus und betrachten die Abbildung φ von G auf y mit $\varphi(s) = x_0 s$. Diese Abbildung ist stetig, also ist $G_y = \{s : \varphi(s) = x_0\}$ eine abgeschlossene Untergruppe von G. ψ sei die Abbildung der Menge der Rechts-

[6]) Vgl. z. B. [9], S. 124, oder [3].

nebenklassen G/G_y auf y mit $\psi(G_y s) = \varphi(s) = x_0 s$. ψ ist ein-eindeutig und stetig, wenn wir G/G_y mit der üblichen Quotiententopologie versehen.

Lemma 5: ψ erzeugt eine ein-eindeutige Abbildung von $\mathfrak{B}_{G/G_y}$ auf $\mathfrak{B}_y$ [7]).

Beweis. a) $\mathfrak{B} = \{F : F \in \mathfrak{B}_y$ und $\psi^{-1}(F) \in \mathfrak{B}_{G/G_y}\}$ ist ein σ-Körper und enthält alle offenen Teilmengen von y, da ψ stetig ist. Also ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_y$, da die offenen Mengen $\mathfrak{B}_y$ erzeugen.

b) $\mathfrak{B}' = \{F' : F' \in \mathfrak{B}_{G/G_y}$ und $\psi(F') \in \mathfrak{B}_y\}$ ist ein σ-Körper, der alle kompakten Teilmengen von $\mathfrak{B}_{G/G_y}$ enthält, da ψ stetig ist. Die kompakten Teilmengen erzeugen $\mathfrak{B}_{G/G_y}$, da G/G_y lokal-kompakt ist und eine abzählbare Basis besitzt. Also ist $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}_{G/G_y}$.

Lemma 5 zeigt, daß wir vom maßtheoretischen Standpunkt aus y durch G/G_y ersetzen können. Der Abbildung $x, s \to xs$ von $y \times G$ auf y entspricht nach dieser Ersetzung die Abbildung $G_y s, s' \to G_y s s'$.

Lemma 6: Alle nicht identisch verschwindenden quasi-invarianten Maße über $\mathfrak{B}_y$ sind äquivalent.

Beweis. Aus der Bemerkung vor Lemma 6 und Lemma 5 folgt, daß μ_y dann und nur dann quasi-invariant ist, wenn μ'_y mit $\mu'_y(F) = \mu_y(\psi(F))$ quasi-invariant ist. Nach [9], S. 103, sind alle quasi-invarianten Maße über $\mathfrak{B}_{G/G_y}$ äquivalent, also gilt dies auch für die quasi-invarianten Maße über $\mathfrak{B}_y$.

Nach Lemma 2 kann das Maß μ eines imprimitiven Systems $((\mu, n), U)$ kein beliebiges Maß sein. Wir zeigen nun, daß im Falle einer regulären Basis auch die Funktion n keine beliebige Funktion sein kann.

Lemma 7: Ist $((\mu, n), U)$ ein imprimitives System mit der regulären Basis M, so gibt es eine $\mathfrak{B}_M$-meßbare Funktion $\bar{n}$, so daß $\bar{n}(x) = n(x)$ μ-fast überall gilt und $\bar{n}(xs) = \bar{n}(x)$ für alle $x \in M$ und $s \in G$ gilt.

Beweis. 1. Nach Lemma 1 können wir annehmen, daß μ ein endliches Maß ist. Wir zeigen nun durch vollständige Induktion, daß wir n auf einer μ-Nullmenge so abändern können, daß die Mengen $S_i = \{x : n(x) \geqq i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, invariant sind. Wegen (3) 3. können wir $S_1 = M$ setzen. Es sei nun n bereits so abgeändert auf einer μ-Nullmenge, daß S_i für $i = 1, \ldots m$ invariant ist. Wir zeigen, daß wir n auf einer μ-Nullmenge so abändern können, daß auch S_{m+1} invariant wird, ohne daß dabei S_i, $i = 1, \ldots m$, geändert wird.

2. a) μ_{m+1} sei über $\mathfrak{B}_M$ durch $\mu_{m+1}(E) = \mu(E \cap S_{m+1})$ definiert. Falls μ_{m+1} identisch Null ist, ist $\mu(S_{m+1}) = 0$ und wir können $n(x) = m$ setzen für $x \in S_{m+1}$. Damit ist unsere Induktionsbehauptung bewiesen. Wir haben noch den Fall $\mu(S_{m+1}) \neq 0$ zu betrachten. In diesem Falle ist μ_{m+1} *quasi-invariant*. Wir zeigen, daß die Annahme der Existenz eines $s \in G$ und eines $E \in \mathfrak{B}_M$ mit $\mu_{m+1}(E) = 0$ und $\mu_{m+1}(Es) \neq 0$ auf einen Widerspruch führt.

b) Es sei $E' = E \cap S_{m+1}$. Also ist $\mu_{m+1}(E) = \mu(E') = 0$ und damit auch $\mu(E's) = 0$. Dann ist erst recht $\mu_{m+1}(E's) = 0$. Unsere Annahme bleibt also richtig, wenn wir E durch $E - E'$ ersetzen, d. h. wir können $E \cap S_{m+1} = \theta$ annehmen. Aus $S_m \supset S_{m+1}$ folgt $\mu_{m+1}(M - S_m) = 0$, also erst recht

---

[7]) Vgl. [8], S. 116.

$\mu_{m+1}((E - S_m)s) = 0$, so daß wir noch $E \subset S_m$ annehmen können. Wegen $\mu_{m+1}(Es - S_{m+1}) = 0$ können wir noch $Es \subset S_{m+1}$ annehmen.

c) $\mathfrak{S}_E = \{f : f \in (\mu, n)$ und $f(x) = 0$ für $x \notin E\}$ und $\mathfrak{S}_{Es} = \{f : f \in (\mu, n)$ und $f(x) = 0$ für $x \notin Es\}$ sind, wegen $\mu(Es) \neq 0$ und damit $\mu(E) \neq 0$, nicht triviale Unterräume von (μ, n). Da $U_s \chi_{Es} f = \chi_E U_s f$ gilt, bildet U_s $\mathfrak{S}_{Es}$ in $\mathfrak{S}_E$ ab. Ebenso folgt, daß U_s^{-1} $\mathfrak{S}_E$ in $\mathfrak{S}_{Es}$ abbildet. Da U_s^{-1} die Umkehrung von U_s ist, bildet U_s $\mathfrak{S}_{Es}$ unitär *auf* $\mathfrak{S}_E$ ab. Aus $E \subset S_m$, $E \cap S_{m+1} = \theta$ und $Es \subset S_{m+1}$ folgt $n(x) = m$ für $x \in E$ und $n(x) \geqq m + 1$ für $x \in Es$. $\mathfrak{S}^m_{Es} = \{f : f \in \mathfrak{S}_{Es}$ und $(f, e_i) = 0$ für $i > m\}$[8]) ist, wegen $n(x) \geqq m + 1$ auf Es, ein *echter* Teilraum von $\mathfrak{S}_{Es}$. Wir zeigen, daß bereits $\mathfrak{S}^m_{Es}$ durch U_s auf $\mathfrak{S}_E$ abgebildet wird, und haben damit einen Widerspruch.

d) $f_i(x) = \chi_{Es}(x)\, e_i$, $i = 1, \ldots m$, gehört zu $\mathfrak{S}^m_{Es}$. Es sei $(U_s f_i)(x) = \gamma_{j,i}(x) e_j$ mit $\gamma_{j,i}(x) = 0$ für $x \notin E$; das können wir annehmen, da $\mathfrak{S}_{Es}$ durch U_s auf $\mathfrak{S}_E$ abgebildet wird. μ_s sei durch $\mu_s(F) = \mu(Fs)$ definiert. Da μ quasi-invariant ist, können wir annehmen, daß für $\varrho = \frac{d\mu_s}{d\mu}$ für alle $x \in M$ $\varrho(x) > 0$ gilt. Für $F \subset E$ und $F \in \mathfrak{B}_M$ gilt $\int \chi_{Fs}(x)(f_j(x), f_i(x))\, d\mu = (\chi_{Fs} f_j, f_i) = (U_s \chi_{Fs} f_j, U_s f_i)$ $= (\chi_F U_s f_j, U_s f_i) = \int \chi_F(x)(U_s f_j(x), U_s f_i(x))\, d\mu = \int \chi_F(x) \sum_{k=1}^{m} \gamma_{k,j}(x) \cdot \overline{\gamma_{k,i}(x)}\, d\mu.$ Andererseits ist $\int \chi_{Fs}(x)\,(f_j(x), f_i(x))\, d\mu = \delta_{i,j}\, \mu(Fs) = \delta_{i,j} \mu_s(F) = \int \chi_F(x) \delta_{i,j}$ $\varrho(x)\, d\mu$. Also gilt $\varrho(x)\, \delta_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} \gamma_{k,j}(x)\, \overline{\gamma_{k,j}(x)}$ μ-fast überall in E. Es sei nun $f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x)\, e_i$ mit $\alpha_i(x) = 0$ für $x \notin E$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{S}_E$, $\beta_i(x) = \frac{1}{\varrho(x)} \sum_{l=1}^{m} \overline{\gamma_{l,i}(x)}\, \alpha_l(x)$ und $g(x) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i(xs^{-1})\, e_i$. Eine einfache Rechnung zeigt, daß $\int |g(x)|^2 d\mu = \int |f(x)|^2 d\mu$ gilt. Also ist $g \in (\mu, n)$. Offenbar ist sogar $g \in \mathfrak{S}^m_{Es}$. Nach Lemma 3 ist $(U_s g)(x) = \sum_{i=1}^{m} (U_s\, (\beta_i)_{s^{-1}}\, f_i)\ (x)$ $= \sum_{i=1}^{m} \beta_i(x)\,(U_s f_i)(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\varrho(x)} \sum_{l=1}^{m} \overline{\gamma_{l,i}(x)}\, \alpha_l(x) \cdot \sum_{j=1}^{m} \gamma_{j,i}(x)\, e_j = f(x)$ μ-fast überall. Also ist $U_s g = f$, d. h. U_s bildet $\mathfrak{S}^m_{Es}$ auf $\mathfrak{S}_E$ ab.

3. Da μ_{m+1} quasi-invariant ist, können wir μ_{m+1} ebenso wie μ nach (6) zerlegen. Also ist $\mu_{m+1}(E) = \int \mu'_y(E \cap y)\, d\tilde{\mu}_{m+1}$. Für $\tilde{E} \in \mathfrak{B}_{M_0}$ gilt dann mit $E = q^{-1}(\tilde{E})$ nach (6) $\tilde{\mu}_{m+1}(\tilde{E}) = \mu_{m+1}(E) = \mu(E \cap S_{m+1}) = \int \mu_y(E \cap S_{m+1} \cap y)$ $d\tilde{\mu} = \int_{\tilde{E}} \mu_y(S_{m+1} \cap y)\, d\tilde{\mu}$. Also ist $\frac{d\tilde{\mu}_{m+1}}{d\tilde{\mu}} = \mu_y(S_{m+1} \cap y)$ und für $\tilde{M}_1$ $= \{y : \mu_y(S_{m+1} \cap y) = 0\}$ gilt $\tilde{\mu}_{m+1}(\tilde{M}_1) = 0$. Wir können daher auf $\tilde{M}_1$ $\mu'_y \equiv 0$ wählen. Es sei $\tilde{M}_2 = M_0 - \tilde{M}_1 = \{y : \mu_y(S_{m+1} \cap y) \neq 0\}$, dann gilt $\mu_{m+1}(E)$ $= \mu(E \cap S_{m+1}) = \int \mu_y(E \cap y \cap S_{m+1})\, d\tilde{\mu} = \int_{\tilde{M}_2} \mu_y(E \cap y \cap S_{m+1})\, d\tilde{\mu}$ $= \int_{\tilde{M}_2} \mu_y(E \cap y \cap S_{m+1})\, \mu_y(y \cap S_{m+1})^{-1} d\tilde{\mu}_{m+1}$. Also können wir für $y \in \tilde{M}_2$ μ'_y so wählen, daß $\mu'_y(E) = \mu_y(y \cap S_{m+1})^{-1} \mu_y(E \cap S_{m+1})$ für $E \in \mathfrak{B}_y$ gilt. Nun

---

[8]) Man beachte, daß (μ, n) mit Hilfe des Hilbert-Raumes $\mathfrak{H}_0$ und seiner orthonormierten Basis $e_1, e_2, \ldots$ gebildet wird (vgl. [13], S. 432).

ist μ'_y quasi-invariant für $\tilde{\mu}_{m+1}$-fast alle y. Also ist nach Lemma 6 $\tilde{\mu}_{m+1}$-fast überall μ'_y äquivalent zu μ_y. Also muß $\mu_y(y \cap S_{m+1}) = \mu_y(y) = 1$ sein für $\tilde{\mu}_{m+1}$-fast alle $y \in \tilde{M}_2$, also auch für $\tilde{\mu}$-fast alle $y \in \tilde{M}_2$, da auf $\tilde{M}_2$ $\tilde{\mu}_{m+1}$ und $\tilde{\mu}$ äquivalent sind. Es sei $M_1 = q^{-1}(\tilde{M}_1)$ und $M_2 = q^{-1}(\tilde{M}_2)$. Es ist $\mu(M_1 \cap S_{m+1}) = \mu_{m+1}(M_1) = \tilde{\mu}_{m+1}(\tilde{M}_1) = 0$. Für $x \in M_1 \cap S_{m+1}$ ändern wir $n(x)$ ab und setzen $n(x) = m$. $S_1, \ldots S_m$ wird dadurch nicht geändert. Ferner ist $\mu(M_2 - S_{m+1}) = \int \mu_y((M_2 - S_{m+1}) \cap y)\, d\tilde{\mu} = 0$, da $\mu_y((M_2 - S_{m+1}) \cap y) = 0$ $\tilde{\mu}$-fast überall gilt. Für $x \in M_2 - S_{m+1}$ ändern wir $n(x)$ ab und setzen $n(x) = m + 1$. Dadurch wird $S_1, \ldots S_m$ nicht geändert, denn für $x \in M_2$ gibt es ein $y \in \tilde{M}_2$ mit $x \in y$. Es ist $y \cap S_{m+1} \neq \theta$, da $\mu_y(y \cap S_{m+1}) \neq 0$, also ist auch $S_m \cap y \neq \theta$, da $S_m \supset S_{m+1}$. Da S_m invariant ist, ist also $y \subset S_m$ und damit insbesondere $x \in S_m$. Vor der Abänderung hatte also $n(x)$ mindestens den Wert m. Nach der Abänderung ist $S_{m+1} = M_2$, also ist S_{m+1} invariant. Damit ist unsere Induktionsbehauptung bewiesen.

4. Wir erhalten durch diese Abänderungen eine fallende Folge von $\mathfrak{B}_M$-meßbaren Mengen $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \ldots$, die invariant sind, und für die $\mu((\bar{S}_i - S_i) \cup (S_i - \bar{S}_i)) = 0$ ist. Wir setzen nun $\bar{n}(x) = \infty$ für $x \in \bigcap_i \bar{S}_i$ und $\bar{n}(x) = m$ für $x \in \bar{S}_m - \bar{S}_{m+1}$. $\bar{n}(x)$ erfüllt dann die Behauptungen von Lemma 7.

II. Imprimitive Systeme mit Produkt-Basen

§ 3. Imprimitive Systeme der Form $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U)$

Wir machen nun noch weitere Voraussetzungen über die Basis der imprimitiven Systeme. B sei ein lokal-kompakter Raum mit abzählbarer Basis und $z, s \to zs$ sei eine stetige Abbildung von $B \times G$ auf B, die (1) 1. und 2. erfüllt und außerdem noch folgende Eigenschaft hat:

(7) Zu jedem Paar $z_1, z_2 \in B$ gibt es ein $s \in G$ mit $z_1 s = z_2$.

Ferner sei M_0 ein lokal-kompakter Raum mit abzählbarer Basis. Wir setzen dann $M = M_0 \times B$. $\mathfrak{B}_M$ sei der σ-Körper der Borelmengen von M. Wir definieren die Abbildung $(x, z), s \to (x, z)\, s$ von $M \times G$ auf M durch $(x, z)\, s = (x, zs)$. Dann ist $(x, z), s \to (x, z)\, s$ stetig und erfüllt (1).

Im folgenden betrachten wir imprimitive Systeme mit der Basis $M = M_0 \times B$. Die Bahnen von M sind nach (7) die Mengen $\{x\} \times B$ mit $x \in M_0$. Da M_0 eine abzählbare Basis besitzt, ist M eine reguläre Basis und wir können die Menge der Bahnen mit M_0 identifizieren. Der in § 2 definierte σ-Körper $\mathfrak{B}_{M_0}$ in der Menge der Bahnen ist dann der σ-Körper der Borelmengen von M_0.

Es sei $z_0 \in B$ und G_0 die abgeschlossene Untergruppe von G, deren Elemente z_0 fest lassen. Wegen (7) erhalten wir, wie vor Lemma 5, eine ein-eindeutige Abbildung ψ der Menge der Rechtsnebenklassen G/G_0 auf B. Nach Lemma 5 ist G/G_0 maßtheoretisch äquivalent zu B. Wir können daher im folgenden annehmen, daß B gleich G/G_0 ist (oder zu G/G_0 homöomorph ist). Wenn wir B mit G/G_0 identifizieren, wird die Abbildung $z, s \to zs$ mit $G_0 s', s \to G_0 s' s$ identisch. h sei die kanonische Abbildung von G auf G/G_0.

ν sei ein quasi-invariantes Radon-Maß über dem σ-Körper $\mathfrak{B}_B$ der Borelmengen von B, das nicht identisch verschwindet. Es gibt solche Maße (vgl. [9], Theorem 1.1). Dieses quasi-invariante Maß halten wir im folgenden fest.

Lemma 8: Jedes σ-endliche quasi-invariante Maß μ über $\mathfrak{B}_M$ ist äquivalent zu einem Produktmaß der Form $\tilde{\mu} \times \nu$, wobei $\tilde{\mu}$ ein σ-endliches Maß über $\mathfrak{B}_{M_0}$ ist. Umgekehrt ist jedes Maß der Form $\tilde{\mu} \times \nu$ quasi-invariant und zwei Maße $\tilde{\mu} \times \nu$ und $\tilde{\mu}' \times \nu$ sind genau dann äquivalent, wenn $\tilde{\mu}$ und $\tilde{\mu}'$ äquivalent sind.

Beweis. μ ist äquivalent zu einem endlichen Maß. Wir können also μ endlich annehmen. Wir zerlegen μ nach (6) in $\tilde{\mu}$ und in Maße μ_x über $\mathfrak{B}_B$. $\tilde{\mu}$-fast alle μ_x sind quasi-invariant. Nach [9], Theorem 1.1, sind also $\tilde{\mu}$-fast alle μ_x äquivalent zu ν. Dann ist μ äquivalent zu $\tilde{\mu} \times \nu$, denn $\mu(E) = 0$ ist wegen $\mu(E) = \int \mu_x(E_x) d\tilde{\mu}$ gleichbedeutend mit $\mu_x(E_x) = 0$ $\tilde{\mu}$-fast überall, also auch mit $\nu(E_x) = 0$ $\tilde{\mu}$-fast überall, d. h. mit $\tilde{\mu} \times \nu(E) = 0$; dabei ist $E_x = \{z : (x, z) \in E\}$. Die übrigen Behauptungen von Lemma 8 sind offensichtlich richtig.

Aus Lemma 7, 8 und 1 folgt, daß jedes imprimitive System $(\mathfrak{H}, U, P)$ mit der Basis $M = M_0 \times B$ äquivalent ist zu einem imprimitiven System der Form $((\mu, n), U)$ mit $\mu = \tilde{\mu} \times \nu$ und $n(x, z) = n(x, z')$. $[\tilde{\mu}, \tilde{n}]$ sei das normierte direkte Integral (μ, n) mit $\mu = \tilde{\mu} \times \nu$ und $n(x, z) = \tilde{n}(x)$. Es gilt also: Ein imprimitives System $(\mathfrak{H}, U, P)$ mit der Basis $M = M_0 \times B$ ist äquivalent zu einem System der Form $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U)$. Dabei ist $\tilde{\mu}$ ein σ-endliches Maß über $\mathfrak{B}_{M_0}$ und $\tilde{n}$ eine Funktion über M_0, die wegen (3) folgende Eigenschaften hat:

$$(8) \qquad \begin{cases} 1.\ \tilde{n}(x) \text{ ist ganzzahlig und } \geqq 0 \text{ oder } \tilde{n}(x) = \infty, \\ 2.\ \tilde{n} \text{ ist } \mathfrak{B}_{M_0}\text{-meßbar und} \\ 3.\ \{x : \tilde{n}(x) = 0\} \text{ ist eine } \tilde{\mu}\text{-Nullmenge.} \end{cases}$$

Aus Lemma 1 und Lemma 8 folgt noch: Wir können $\tilde{\mu}$ stets durch ein äquivalentes Maß ersetzen und $\tilde{n}$ auf einer $\tilde{\mu}$-Nullmenge abändern. Für die Äquivalenz zweier imprimitiver Systeme $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U)$ und $([\tilde{\mu}', \tilde{n}'], U')$ ist notwendig, daß $\tilde{\mu}$ und $\tilde{\mu}'$ äquivalent sind und $\tilde{n}'(x) = \tilde{n}(x)$ $\tilde{\mu}$-fast überall gilt.

§ 4. *Darstellungsfelder*

Zur Konstruktion von imprimitiven Systemen benötigen wir den Begriff des Darstellungsfeldes. Ist $\tilde{\mu}$ ein σ-endliches Maß über $\mathfrak{B}_{M_0}$ und $\tilde{n}$ eine Funktion über M_0, die (8) erfüllt, so erhalten wir zwei normierte direkte Integrale, nämlich $[\tilde{\mu}, \tilde{n}]$ und $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$. $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ ist ein normiertes direktes Integral über M_0. Wir betrachten nun Darstellungsfelder über $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$. Die folgenden Ausführungen sind übrigens unabhängig von der Tatsache, daß G_0 und M_0 in der in § 3 angegebenen Weise von G und M abhängen.

Die normierten direkten Integrale $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ werden (ebenso wie $[\tilde{\mu}, \tilde{n}]$) alle mit Hilfe eines separablen Hilbert-Raumes $\mathfrak{H}_0$ und einer orthonormierten Basis $e_1, e_2, \ldots$, von $\mathfrak{H}_0$ gebildet. $\mathfrak{H}^0$ sei der triviale Teilraum $\{0\}$ von $\mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{H}^i$ sei der von $e_1, \ldots, e_i$ aufgespannte Teilraum und $\mathfrak{H}^\infty$ sei der Raum $\mathfrak{H}_0$ selbst. P^i sei die orthogonale Projektion von $\mathfrak{H}_0$ auf $\mathfrak{H}^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots \infty$. Eine Funktion L über M_0

heißt *Darstellungsfeld* von G_0 über $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$, wenn jedem $x \in M_0$ eine stark stetige, unitäre Darstellung $L(x)$ $(\xi \to L_\xi(x))$ von G_0 mit dem Darstellungsraum $\mathfrak{H}^{\tilde{n}(x)}$ zugeordnet ist[9]), so daß $(L_\xi(x)\, P^{\tilde{n}(x)} v_1, v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in \mathfrak{H}_0$ $\mathfrak{B}_{G_0 \times M_0}$-meßbar ist; dabei ist $\mathfrak{B}_{G_0 \times M_0}$ der σ-Körper der Borelmengen von $G_0 \times M_0$. Aus dieser Definition folgt: Ist $f \in (\tilde{\mu}, \tilde{n})$, so ist $g(x) = L_\xi(x)\, f(x)$ aus $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ für alle $\xi \in G_0$. Definieren wir L_ξ durch $(L_\xi f)\,(x) = L_\xi(x)\, f(x)$, so ist $L(\xi \to L_\xi)$ eine stark stetige, unitäre Darstellung von G_0 mit dem Darstellungsraum $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$. Jedes L_ξ ist mit allen Projektionen des zu $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ gehörigen Spektralmaßes vertauschbar. $L(\xi \to L_\xi)$ heißt die zum Darstellungsfeld L gehörige Darstellung.

Lemma 9: Ist $L(\xi \to L_\xi)$ eine stark stetige, unitäre Darstellung von G_0 mit dem Darstellungsraum $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ und ist L_ξ für alle $\xi \in G_0$ mit den Projektionen des zu $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ gehörigen Spektralmaßes vertauschbar, so gibt es ein Darstellungsfeld L über $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$, zu dem $L(\xi \to L_\xi)$ gehört. Das Darstellungsfeld ist durch $L(\xi \to L_\xi)$ bis auf $\tilde{\mu}$-Nullmengen eindeutig bestimmt.

Dieser Satz wurde in der Literatur mehrfach bewiesen; vergleiche dazu [10], S. 201, Theorem 2.4., und die dort angegebene Literatur.

L bzw. L' sei ein Darstellungsfeld über $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ bzw. $(\tilde{\mu}', \tilde{n}')$ und $L(\xi \to L_\xi)$ bzw. $L'(\xi \to L'_\xi)$ seien die zugehörigen Darstellungen von G_0. $L(x)$ $(\xi \to L_\xi(x))$ bzw. $L'(x)$ $(\xi \to L'_\xi(x))$ sei die x durch L bzw. L' zugeordnete Darstellung. Eine unitäre Abbildung V von $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ auf $(\tilde{\mu}', \tilde{n}')$ heißt *Äquivalenzabbildung* des Darstellungsfeldes L über $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ auf das Darstellungsfeld L' über $(\tilde{\mu}', \tilde{n}')$, wenn V eine Äquivalenzabbildung für die zu $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ und $(\tilde{\mu}', \tilde{n}')$ gehörigen Spektralmaße und für die zugehörigen Darstellungen $L(\xi \to L_\xi)$ und $L'(\xi \to L'_\xi)$ ist. Zwei Darstellungsfelder heißen *äquivalent*, wenn es eine Äquivalenzabbildung des einen auf das andere gibt.

Lemma 10: V ist dann und nur dann Äquivalenzabbildung eines Darstellungsfeldes L über $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ auf ein Darstellungsfeld L' über $(\tilde{\mu}', \tilde{n}')$, wenn $\tilde{\mu}$ und $\tilde{\mu}'$ äquivalent sind, $\tilde{n}(x) = \tilde{n}'(x)$ $\tilde{\mu}$-fast überall gilt und V zu einem Äquivalenzfeld $\mathfrak{V}(x)$ gehört, so daß bis auf die Punkte x aus einer $\tilde{\mu}$-Nullmenge $\mathfrak{V}(x) L_\xi(x) \mathfrak{V}(x)^{-1} = L'_\xi(x)$ für alle $\xi \in G_0$ gilt.

Beweis. Wir beweisen nur die Behauptungen von Lemma 10, die nicht ohne weiteres aus der Tatsache folgen, daß V eine Äquivalenzabbildung für die zugehörigen Spektralmaße ist.

Dann: Es sei $\gamma(x) = \frac{d\tilde{\mu}'}{d\tilde{\mu}}(x) > 0$. Dann gilt $(V L_\xi V^{-1} f)\,(x) = \frac{1}{\sqrt{\gamma(x)}} \cdot \mathfrak{V}(x) L_\xi(x) \sqrt{\gamma(x)}\, \mathfrak{V}(x)^{-1} f(x) = L'_\xi(x)\, f(x) = (L'_\xi f)\,(x)$ $\tilde{\mu}$-fast überall. Also ist $V L_\xi V^{-1} = L'_\xi$.

Nur dann: Zu V gehört ein Äquivalenzfeld $\mathfrak{V}(x)$. Aus $V L_\xi V^{-1} = L'_\xi$ folgt $\mathfrak{V}(x)\, L_\xi(x) \mathfrak{V}(x)^{-1} f(x) = L'_\xi(x)\, f(x)$ $\tilde{\mu}$-fast überall für alle $f \in (\tilde{\mu}, \tilde{n})$. Also gilt $\mathfrak{V}(x)\, L_\xi(x) \mathfrak{V}(x)^{-1} = L'_\xi(x)$ $\tilde{\mu}$-fast überall. Ist $\xi_1, \xi_2, \ldots,$ eine überall dichte Folge aus G_0, dann gibt es eine $\tilde{\mu}$-Nullmenge N_0, so daß für $x \notin N_0$

[9]) Ist $\tilde{n}(x) = 0$, d. h. $\mathfrak{H}^{\tilde{n}(x)} = \{0\}$, dann verstehen wir unter „Darstellung" die Zuordnung $\xi \to L_\xi(x) = 0$. Die Transformation 0 betrachten wir im folgenden stets als unitäre Transformation in $\{0\}$.

$\mathfrak{V}(x)\, L_{\xi_\nu}(x)\, \mathfrak{V}(x)^{-1} = L'_{\xi_\nu}(x)$ für $\nu = 1, 2, \ldots$, gilt. Da $L(x)$ $(\xi \to L_\xi(x))$ und $L'(x)$ $(\xi \to L'_\xi(x))$ stark stetig sind, gilt $\mathfrak{V}(x)\, L_\xi(x)\, \mathfrak{V}(x)^{-1} = L'_\xi(x)$ für alle $\xi \in G_0$ und $x \notin N_0$.

In [11], Theorem 10.1., wird folgendes interessante Ergebnis bewiesen: Ist $(M_0, \mathfrak{B}_{M_0})$ ein Standard-Borel-Raum (zur Definition vgl. [11]), so sind zwei Darstellungsfelder L und L' über $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ äquivalent, wenn für $\tilde{\mu}$-fast alle $x \in M_0$ $L(x)$ $(\xi \to L_\xi(x))$ und $L'(x)$ $(\xi \to L'_\xi(x))$ äquivalent sind. In unseren Anwendungen ist $(M_0, \mathfrak{B}_{M_0})$ stets ein Standard-Borel-Raum.

§ 5. Die Konstruktion von imprimitiven Systemen

Die hier angegebene Konstruktion von imprimitiven Systemen ist eine naheliegende Verallgemeinerung eines Verfahrens, das von MACKEY stammt (vgl. [9], S. 106). ν sei das quasi-invariante Maß über $\mathfrak{B}_B = \mathfrak{B}_{G/G_0}$, das wir in § 3 gewählt haben. Für $s \in G$ sei ν_s durch $\nu_s(E) = \nu(Es)$ definiert. Da ν quasi-invariant ist, gibt es also ein $\lambda(z, s)$ mit $\frac{d\nu_s}{d\nu}(z) = \lambda(z, s)$. Wir können $\lambda(z, s) > 0$ für alle $(z, s) \in B \times G$ fordern. Nach [9], Theorem 1.1., können wir ferner annehmen, daß $\lambda(z, x)$ noch folgende Eigenschaften besitzt:

$$(9)\quad \begin{cases} 1.\ \lambda(z, s) \text{ ist } \mathfrak{B}_{B \times G}\text{-meßbar}, \\ 2.\ \lambda(z, st) = \lambda(zs, t) \cdot \lambda(z, s) \text{ für alle } z \in B \text{ und } s, t \in G \text{ und} \\ \quad\ \lambda(z, e) = 1 \text{ für alle } z \in B, \\ 3.\ \lambda(h(e), \xi) = \dfrac{\delta(\xi)}{\Delta(\xi)} \text{ für alle } \xi \in G_0, \\ 4.\ \int f(s)\, \lambda(h(e), s)\, d\alpha < \infty \text{ für alle stetigen Funktionen über } G \\ \quad\ \text{mit kompaktem Träger.} \end{cases}$$

Dabei ist h die kanonische Abbildung von G auf $B = G/G_0$, α das rechts-invariante Haarsche Maß von G und $\Delta(s)$ die konstante Radon-Nikodym-Ableitung von α_s mit $\alpha_s(E) = \alpha(sE)$ nach α und $\delta(\xi)$ die entsprechende Größe für G_0.

Nach [9], Lemma 1.1., gibt es eine Menge $C \in \mathfrak{B}_G$, die mit jeder Rechtsnebenklasse auf G/G_0 genau einen Punkt gemeinsam hat. Wir wählen eine solche Menge C ein für allemal aus. Mit h_1 bezeichnen wir die Beschränkung von h auf C. $\mathfrak{B}_C$ sei der σ-Körper der Teilmengen F von C mit $F \in \mathfrak{B}_G$. h_1 ist dann eine ein-eindeutige Abbildung von C auf $G/G_0 = B$. h_1 erzeugt eine ein-eindeutige Abbildung von $\mathfrak{B}_C$ auf $\mathfrak{B}_B$ (vgl. [9], Beweis von Lemma 2.1.). ψ sei die Abbildung $(x, s) \to (x, h(s))$ von $M_0 \times G$ auf $M_0 \times B$ und ψ_1 die Verengerung von ψ auf $M_0 \times C$. $\mathfrak{B}_{M_0 \times C}$ sei der σ-Körper der Mengen E mit $E \subset M_0 \times C$ und $E \in \mathfrak{B}_{M_0 \times G}$. Da h_1 eine ein-eindeutige Abbildung von $\mathfrak{B}_C$ auf $\mathfrak{B}_B$ erzeugt, erzeugt ψ_1 eine ein-eindeutige Abbildung von $\mathfrak{B}_{M_0 \times C}$ auf $\mathfrak{B}_{M_0 \times B}$.

Es sei jetzt ein Darstellungsfeld L über $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ gegeben; jedem $x \in M_0$ ist also eine Darstellung $L(x)$ $(\xi \to L_\xi(x))$ von G_0 mit dem Darstellungsraum $\mathfrak{H}^{\tilde{n}(x)}$ zugeordnet. Wir betrachten dann die Menge $\mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu}, \tilde{n}}$ aller Vektorfelder über $M_0 \times G$

mit folgenden Eigenschaften:

$$(10)\quad \begin{cases} 1.\ f(x,s) \in \mathfrak{H}^{\tilde{n}(x)}, \\ 2.\ (f(x,s), v) \text{ ist } \mathfrak{B}_{M_0 \times G}\text{-meßbar für alle } v \in \mathfrak{H}_0, \\ 3.\ f(x, \xi s) = L_\xi(x)\, f(x,s) \text{ für alle } \xi \in G_0, \\ 4.\ \int \varphi_{f,f}(x,z)\, d(\tilde{\mu} \times \nu) < \infty, \text{ wobei } \varphi_{f,g} \text{ durch } \varphi_{f,g}(x, h(s)) \\ \quad = (f(x,s), g(x,s)) \text{ definiert ist.} \end{cases}$$

Da $L_\xi(x)$ unitär ist, ist die Definition von $\varphi_{f,g}$ wegen 3. möglich. $(f(x,s), g(x,s))$ ist nach 2. $\mathfrak{B}_{M_0 \times G}$-meßbar für alle $f, g \in \mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}$, also ist es über $M_0 \times C$ $\mathfrak{B}_{M_0 \times C}$-meßbar. Da $\varphi_{f,g}(x,z) = \big(f(\psi_1^{-1}(x,z)), g(\psi_1^{-1}(x,z))\big)$ ist, ist $\varphi_{f,g}$ $\mathfrak{B}_{M_0 \times B}$-meßbar. Wegen $|\varphi_{f,g}(x,z)| \leq \sqrt{\varphi_{f,f}(x,z) \cdot \varphi_{g,g}(x,z)}$ ist $\int \varphi_{f,g}(x,z)\, d(\tilde{\mu} \times \nu)$ endlich für alle $f, g \in \mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}$. Setzen wir $(f, g) = \int \varphi_{f,g}(x,z)\, d(\tilde{\mu} \times \nu)$, so hat (f, g) alle Eigenschaften eines Skalarproduktes in $\mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}$, wenn wir in $\mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}$ die Vektorfelder identifizieren, die sich nur auf $\tilde{\mu} \times \alpha$-Nullmengen voneinander unterscheiden. Wir zeigen nur, daß $(f, f) = 0$ gleichwertig ist mit $f(x,s) = 0$ $\tilde{\mu} \times \alpha$-fast überall; die anderen Eigenschaften eines Skalarproduktes sind offensichtlich erfüllt. $(f, f) = 0$ ist nach Definition gleichwertig mit $\varphi_{f,f}(x,z) = 0$ $\tilde{\mu} \times \nu$-fast überall, also auch mit $\varphi_{f,f}(x,z) = 0$ ν-fast überall für $\tilde{\mu}$-fast alle $x \in M_0$. Nach [9], Lemma 1.3., ist dies gleichwertig mit $(f(x,s), f(x,s)) = 0$ α-fast überall für $\tilde{\mu}$-fast alle $x \in M_0$, d. h. mit $f(x,s) = 0$ $\tilde{\mu} \times \alpha$-fast überall. Es gilt: Wenn man in $\mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}$ die Vektorfelder identifiziert, die sich nur aus $\tilde{\mu} \times \alpha$-Nullmengen unterscheiden, und das oben definierte Skalarprodukt einführt, so wird $\mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}$ zu einem separablen Hilbert-Raum[10]).

Zum Beweis geben wir eine ein-eindeutige Abbildung V der Vektorfelder von $\mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}$ auf die Vektorfelder von $[\tilde{\mu}, \tilde{n}]$ an, die eine unitäre Transformation des unitären Raumes $\mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}$ auf den Hilbert-Raum $[\tilde{\mu}, \tilde{n}]$ erzeugt. Diese Transformation bezeichnen wir ebenfalls mit V. Dann ist natürlich $\mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},n}$ mit $[\tilde{\mu}, \tilde{n}]$ ebenfalls ein separabler Hilbert-Raum. V sei für $f \in \mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}$ durch

$$(11)\qquad (Vf)(x,z) = f(\psi_1^{-1}(x,z)) = f(x, h_1^{-1}(z))$$

definiert.

Lemma 11: V bildet die Menge der Vektorfelder von $\mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}$ ein-eindeutig auf die Menge der Vektorfelder von $[\tilde{\mu}, n]$ ab und erzeugt eine unitäre Transformation des unitären Raumes $\mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}$ auf $[\tilde{\mu}, \tilde{n}]$.

Beweis. a) Zunächst zeigen wir, daß aus $f \in \mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}$ folgt $Vf \in [\tilde{\mu}, \tilde{n}]$. Es sei $Vf = g$, also $g(x,z) = f(x, h_1^{-1}(z))$.

1. $g(x,z) \in \mathfrak{H}^{\tilde{n}(x)}$ nach (10) 1.

2. $(g(x,z), e_i) = \big(f(x, h_1^{-1}(z)), e_i\big)$ ist $\mathfrak{B}_{M_0 \times B}$-meßbar, denn $(f(x,s), e_i)$ ist $\mathfrak{B}_{M_0 \times G}$-meßbar; hieraus folgt nach den Überlegungen vor (10), daß $(g(x,z), e_i) \in \mathfrak{B}_{M_0 \times B}$-meßbar ist.

[10]) Mit $\mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}$ bezeichnen wir wieder die Menge der Vektorfelder und den Hilbert-Raum. Vergleiche Fußnote 5.

3. $\int |g(x,z)|^2 d(\tilde{\mu}\times\nu) = \int |f(x, h_1^{-1}(z))|^2 d(\tilde{\mu}\times\nu) = \int \varphi_{f,f}(x,z)\, d(\tilde{\mu}\times\nu)$ $= (f,f) < +\infty$

Also ist $g = Vf$ aus $[\tilde{\mu}, \tilde{n}]$. Aus 3. folgt noch, daß V eine isometrische Transformation erzeugt.

b) Es sei $\theta(s) = s\big(h_1^{-1}(h(s))\big)^{-1}$ für $s \in G$.

θ ist eine Borel-meßbare Abbildung von G auf G_0, d. h. aus $E \in \mathfrak{B}_{G_0}$ folgt $\theta^{-1}(E) \in \mathfrak{B}_G$, da die Gruppenoperationen und $h(s)$ und $h_1^{-1}(s)$ meßbare Abbildungen sind.

Wir definieren nun W durch

$$(12) \qquad (Wg)(x,s) = L_{\theta(s)}(x)\, g(x, h(s)) \text{ für } g \in [\tilde{\mu}, \tilde{n}].$$

Aus $g \in [\tilde{\mu}, \tilde{n}]$ folgt $f = Wg \in \mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}$.

1. $f(x,s) \in \mathfrak{H}^{\tilde{n}(x)}$, da $g(x,z) \in \mathfrak{H}^{\tilde{n}(x)}$ und $L_{\theta(s)}(x)$ eine Transformation in $\mathfrak{H}^{\tilde{n}(x)}$ ist.

2. $(f(x,s), e_i) = \big(L_{\theta(s)}(x)\, g(x,h(s)), e_i\big) = \big(g(x,h(s)),\ L_{\theta(s)^{-1}}(x)\, P^{\tilde{n}(x)} e_i\big)$ $= \sum_{j=1}^{\infty} \big(g(x,h(s)), e_j\big)\big(L_{\theta(s)}(x)\, P^{\tilde{n}(x)} e_j, e_i\big)$. Da $(g(x,z), e_i)$ $\mathfrak{B}_{M_0\times B}$-meßbar ist, ist $\big(g(x,h(s)), e_i\big)$ $\mathfrak{B}_{M_0\times G}$-meßbar. Da $(L_\xi(x)\, P^{\tilde{n}(x)} e_j, e_i)$ $\mathfrak{B}_{M_0\times G_0}$-meßbar ist, ist $(L_{\theta(s)}(x)\, P^{\tilde{n}(x)} e_j, e_i)$ $\mathfrak{B}_{M_0\times G}$-meßbar. Es ist also $(f(x,s), e_i)$ $\mathfrak{B}_{M_0\times G}$-meßbar und damit auch $(f(x,s), v)$ für alle $v \in \mathfrak{H}_0$.

3. $f(x,\xi s) = L_{\theta(\xi s)}(x)\, g(x, h(\xi s)) = L_{\xi\theta(s)} g(x, h(s)) = L_\xi(x)\, L_{\theta(s)} g(x, h(s))$ $= L_\xi(x)\, f(x,s)$.

4. $\varphi_{f,f}(x, h(s)) = |f(x,s)|^2 = |g(x,h(s))|^2$. Also ist $\int \varphi_{f,f}(x,z)\, d(\tilde{\mu}\times\nu)$ $= \int |g(x,z)|^2 d(\tilde{\mu}\times\nu) = (g,g) < +\infty$.

Nach (10) ist $Wg \in \mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}$.

c) Es gilt $(VWg)(x,z) = (Wg)(x, h_1^{-1}(z)) = L_{\theta(h_1^{-1}(z))}(x)\, g(x, h(h_1^{-1}(z)))$ $= g(x,z)$, da $h(h_1^{-1}(z)) = z$ und $\theta(h_1^{-1}(z)) = e$, und $(WVf)(x,s) = L_{\theta(s)} f(x, h_1^{-1} h(s))$ $= f(x, \theta(s)\, h_1^{-1}(h(s))) = f(x,s)$. Damit ist gezeigt, daß $V^{-1} = W$ ist, d. h. V ist eine ein-eindeutige Abbildung auf und, da die durch V erzeugte Transformation isometrisch ist, ist sie auch unitär.

Wir definieren $T^L (t \to T_t)$ durch

$$(13) \qquad (T_t f)(x,s) = \sqrt{\lambda(h(s), t)} \cdot f(x, st) \text{ für } f \in \mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}} \text{ und } t \in G$$

und $P(E \to P_E)$ durch

$$(14) \qquad (P_E f)(x,s) = \chi_E(x, h(s))\, f(x,s) \text{ für } f \in \mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}} \text{ und } E \in \mathfrak{B}_M.$$

Satz 1: *$(\mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}, T^L, P)$ ist ein imprimitives System mit der Basis $M = M_0 \times B$.*

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß (2) erfüllt ist.

Zu (2) 1.: $\mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}$ ist ein separabler Hilbert-Raum.

Zu (2) 2.: a) $T_t f \in \mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}$, für $f \in \mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}$.

1. $(T_t f)(x,s) \in \mathfrak{H}^{\tilde{n}(x)}$ nach (13).

2. $((T_t f)(x, s), e_i)$ ist $\mathfrak{B}_{M_0 \times G}$-meßbar für $i = 1, 2, \ldots$, denn bei festem t ist $\lambda(h(s), t)$ $\mathfrak{B}_{M_0}$-meßbar und mit $(f(x, s), e_i)$ ist auch $(f(x, st), e_i)$ $\mathfrak{B}_{M_0 \times G}$-meßbar. Damit ist gezeigt, daß auch $(T_t f(x, s), v)$ $\mathfrak{B}_{M_0 \times G}$-meßbar ist für alle $v \in \mathfrak{H}_0$.

3. $(T_t f)(x, \xi s) = \sqrt{\lambda(h(\xi s), t)}\, f(x, \xi s t) = \sqrt{\lambda(h(s), t)}\, L_\xi(x)\, f(x, st)$
$= L_\xi(x)\,(T_t f)(x, s)$.

4. $\int \varphi_{T_t f, T_t f}(x, z)\, d(\tilde{\mu} \times \nu) = \iint \lambda(z, t)\, \varphi_{f,f}(x, zt)\, d\nu\, d\tilde{\mu} = \int \varphi_{f,f}(x, z)\, d\nu\, d\tilde{\mu}$ $\left(\text{wegen } \frac{d\nu_t}{d\nu} = \lambda(z, t)\right) = (f, f) < +\infty$.

Nach (10) ist $T_t f \in \mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}$ und nach 4. ist T_t isometrisch.

Wegen $\lambda(z, e) = 1$ ist T_e die identische Transformation in $\mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}$. Eine einfache Rechnung ergibt (unter Beachtung von (9) 2.) $T_{tt'} = T_t T_{t'}$. Also ist T^L eine unitäre Darstellung von G.

b) Wir haben noch zu zeigen, daß $T^L(t \to T_t)$ stark stetig ist. Da $\mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}$ separabel ist, genügt es zu zeigen, daß $(T_t f, g)$ $\mathfrak{B}_G$-meßbar ist für alle $f, g \in \mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}$. $((T_t f)(x, s), g(x, s)) = \sqrt{\lambda(h(s), t)}\,(f(x, st), g(x, s))$ ist $\mathfrak{B}_{M_0 \times G \times G}$-meßbar in (x, s, t), denn $(f(x, st), g(x, s)) = \sum_j (f(x, st), e_j)(e_j, g(x, s))$ ist $\mathfrak{B}_{M_0 \times G \times G}$-meßbar, da $(e_j, g(x, s))$ und $(f(x, s), e_j)$ $\mathfrak{B}_{M_0 \times G}$-meßbar sind und $x, s, t \to x, st$ stetig ist. Nach (9) 1. und den Bemerkungen vor (10) ist $\varphi_{T_t f, g}(x, z)$ $\mathfrak{B}_{M \times G}$-meßbar in $((x, z), t)$, also ist nach dem Satz von Fubini $(T_t f, g) = \int \varphi_{T_t f, g}(x, z)\, d(\tilde{\mu} \times \nu)$ $\mathfrak{B}_G$-meßbar.

Zu (2) 3. und 4.: Daß $P(E \to P_E)$ ein Spektralmaß über $\mathfrak{B}_M$ ist, ist offensichtlich, und eine einfache Rechnung ergibt $T_t P_E T_t^{-1} = P_{Et^{-1}}$.

Das imprimitive System $(\mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}, T^L, P)$ können wir leicht auf die Form $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U)$ bringen. Nach Lemma 11 ist V eine unitäre Transformation von $\mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}$ auf $[\tilde{\mu}, \tilde{n}]$. Wir bilden das zu $(\mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}, T^L, P)$ äquivalente imprimitive System $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U^L, P')$ mit $P'(E \to E'_E)$ und $U^L(t \to U_t)$, wobei $P'_E = V P_E V^{-1}$ und $U_t = V T_t V^{-1}$ ist. Einfache Rechnungen zeigen, daß P' das zu $[\tilde{\mu}, \tilde{n}]$ gehörige Spektralmaß ist, und daß

$$(15) \qquad \begin{cases} (U_t g)(x, z) = \sqrt{\lambda(z, t)}\; L_{\xi(z,t)}(x)\, g(x, zt) \text{ für alle } g \in [\tilde{\mu}, \tilde{n}] \\ \text{mit } \xi(z, t) = h_1^{-1}(z)\, t\, (h_1^{-1}(zt))^{-1} = \theta(h_1^{-1}(z)\, t)\,. \end{cases}$$

gilt. Damit haben wir

Satz 2: *V ist eine Äquivalenzabbildung von* $(\mathfrak{H}^L_{\tilde{\mu},\tilde{n}}, T^L, P)$ *auf* $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U^L)$.

Da $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U^L)$ durch das gegebene Darstellungsfeld L über $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ (und durch C) eindeutig bestimmt ist, nennen wir $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U^L)$ das durch L erzeugte imprimitive System. Wir bemerken noch, daß $\xi(z, t)$ eine Borel-meßbare Abbildung ist, da $\xi(z, t) = \theta(h_1^{-1}(z)\, t)$ ist.

§ 6. Die zu einem imprimitiven System gehörigen Darstellungsfelder

In diesem Paragraphen zeigen wir, daß jedes imprimitive System zu einem imprimitiven System der Form $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U^L)$ äquivalent ist. Wir gehen hier, nach entsprechender Verallgemeinerung, im wesentlichen so vor, wie dies in [7] skizziert ist. Zunächst ordnen wir einem imprimitiven System gewisse Darstel-

lungsfelder zu, dann zeigen wir, daß das imprimitive System durch diese Darstellungsfelder bis auf Äquivalenz bestimmt ist, und zum Schluß zeigen wir, daß zu $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U^L)$ das Darstellungsfeld L gehört. Dies ergibt den wichtigen Satz 3.

Es sei ein imprimitives System $(\mathfrak{H}, U', P')$ mit der Basis $M = M_0 \times B$ gegeben. $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U)$ sei zu $(\mathfrak{H}, U', P')$ äquivalent. I sei das Darstellungsfeld über $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ mit $I(x)$ $(\xi \to I_\xi(x))$, wobei $I_\xi(x)$ die identische Transformation in $\mathfrak{H}^{\tilde{n}(x)}$ ist. Wir bilden das durch I erzeugte imprimitive System $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U^I)$. Es sei nun

$$Q_t = U_t U^I_{t^{-1}}. \tag{16}$$

Man rechnet leicht aus, daß $Q_t P_E = P_E Q_t$ für alle $E \in \mathfrak{B}_{M_0 \times B}$ und $t \in G$ gilt; dabei ist $P(E \to P_E)$ das zu $[\tilde{\mu}, \tilde{n}]$ gehörige Spektralmaß.

Es gibt also zu jedem $t \in G$ ein Operatorfeld $Q_t(x, z)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\tag{17} \begin{cases} 1. & Q_t(x, z) \text{ ist eine unitäre Transformation in } \mathfrak{H}^{\tilde{n}(x)} \\ 2. & (Q_t(x, z)\, P^{\tilde{n}(x)} e_i, e_j) \text{ ist } \mathfrak{B}_{M_0 \times B}\text{-meßbar für } i, j = 1, 2, \ldots, \\ 3. & (Q_t g)(x, z) = Q_t(x, z)\, g(x, z) \text{ für alle } g \in [\tilde{\mu}, \tilde{n}]\,. \end{cases}$$

$Q_t(x, z)$ ist dabei bei festem $t \in G$ eindeutig bis auf $\tilde{\mu} \times \nu$-Nullmengen bestimmt (vgl. z. B. [13], Lemma 13 und 14). Aus (16) folgt $U_t = Q_t U^I_t$, also gilt

$$(U_t g)(x, z) = \sqrt{\lambda(z, t)} \cdot Q_t(x, z)\, g(x, zt)\,. \tag{18}$$

Berechnet man für ein $g \in [\tilde{\mu}, \tilde{n}]$ $U_{t_1 t_2} g$ und $U_{t_1} U_{t_2} g$ mit Hilfe von (18), so erhält man (unter Beachtung von $U_{t_1 t_2} = U_{t_1} U_{t_2}$ und (9) 2.) $Q_{t_1 t_2}(x, z)\, g(x, z) = Q_{t_1}(x, z)\, Q_{t_2}(x, zt_1)\, g(x, z)$ $\tilde{\mu} \times \nu$-fast überall. Hieraus folgt

$$Q_{t_1 t_2}(x, z) = Q_{t_1}(x, z)\, Q_{t_2}(x, zt_1) \; \tilde{\mu} \times \nu\text{-fast überall.} \tag{19}$$

Wir zeigen nun, daß ein Operatorfeld $\bar{Q}(x, z, t)$ über $M_0 \times B \times G$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

$$\tag{20} \begin{cases} 1. & \bar{Q}(x, z, t) \text{ ist eine unitäre Transformation in } \mathfrak{H}^{\tilde{n}(x)} \\ 2. & (\bar{Q}(x, z, t)\, P^{\tilde{n}(x)} e_i, e_j) \text{ ist } \mathfrak{B}_{M_0 \times B \times G}\text{-meßbar für } i, j = 1, 2, \ldots, \\ 3. & \text{es gibt eine } \alpha\text{-Nullmenge } N_0 \in \mathfrak{B}_G, \text{ so daß für alle } t \notin N_0 \\ & \bar{Q}(x, z, t) = Q_t(x, z) \; \tilde{\mu} \times \nu\text{-fast überall gilt.} \end{cases}$$

α sei auch hier das rechts-invariante Haarsche Maß von G. Zum Beweis von (20) setzen wir $\varphi_{j,i}(x, z, t) = (Q_t(x, z)\, P^{\tilde{n}(x)} e_j, e_i)$. $\varphi_{j,i}$ hat folgende Eigenschaften:

$$\tag{21} \begin{cases} 1. & \varphi_{j,i}(x, z, t) = 0 \text{ für alle } x \text{ mit } \tilde{n}(x) < i \text{ oder } \tilde{n}(x) < j, \\ 2. & \sum\limits_k \varphi_{i,k}(x, z, t) \cdot \overline{\varphi_{j,k}(x, z, t)} = \sum\limits_k \varphi_{k,i}(x, z, t) \cdot \overline{\varphi_{k,j}(x, z, t)} \\ & = \chi_{S_i}(x)\, \delta_{i,j}\,; \text{ dabei ist } S_i = \{\, x : \tilde{n}(x) \geqq i \}\,, \\ 3. & \varphi_{i,j}(x, z, t) \text{ ist } \mathfrak{B}_{M_0 \times B}\text{-meßbar für alle } t \in G, \\ 4. & \int \varphi_{i,j}(x, z, t)\, \chi_E(x, z)\, d(\tilde{\mu} \times \nu) \text{ ist } \mathfrak{B}_G\text{-meßbar für alle} \\ & E \in \mathfrak{B}_{M_0 \times B} \text{ mit } (\tilde{\mu} \times \nu)(E) < +\infty\,. \end{cases}$$

Es genügt 4. zu beweisen. $\varphi_{i,j}(x, z, t)\, \chi_E(x, z) = \varphi_{i,j}(x, z, t)\, \chi_{E_1}(x, z)$ mit $E_1 = E \cap S_{i,j}$ und $S_{i,j} = \{(x, z) : \tilde{n}(x) \geqq \max(i, j)\}$. Dann ist $f_k = \chi_{E_1} e_k$ aus $[\tilde{\mu}, \tilde{n}]$ für $k = i, j$, da $(\tilde{\mu} \times \nu)(E_1) < +\infty$ ist. Also ist $\int \varphi_{i,j}(x,z,t)\, \chi_E(x,z)\, d(\tilde{\mu} \times \nu)$ $= \int (Q_t(x, z)\, \chi_{E_1}(x, z)\, e_j,\ \chi_{E_1}(x, z)\, e_i)\, d(\tilde{\mu} \times \nu) = (Q_t f_j, f_k) = (U_t U^I_{t^{-1}} f_j, f_k)$ stetig in t, da U und U^I stark stetige Darstellungen sind.

Dann gibt es (vgl. [8], Lemma 3.1.) eine $\mathfrak{B}_{M_0 \times B \times G}$-meßbare Funktion $\varphi_{i,j}(x, z, t)$ und eine α-Nullmenge $N_0 \in \mathfrak{B}_G$, so daß gilt: $\psi_{i,j}(x, z, t) = \varphi_{i,j}(x,z,t)$ $\tilde{\mu} \times \nu$-fast überall für $t \notin N_0$. Wegen (21) 1. können wir nach Abänderung von $\psi_{j,i}$ auf einer $\tilde{\mu} \times \nu \times \alpha$-Nullmenge noch annehmen, daß $\psi_{i,j}(x, z, t) = 0$ ist, falls $\tilde{n}(x) < i$ oder $< j$ ist. Ebenso können wir wegen (21) 2. annehmen, daß $\sum_k \psi_{i,k}(x, z, t) \cdot \overline{\psi_{j,k}(x, z, t)} = \sum_k \psi_{k,i}(x, z, t)\, \overline{\psi_{k,j}(x, z, t)} = \chi_{S_i}(x)\, \delta_{i,j}$ gilt. Wir definieren $\overline{Q}(x, z, t)$ durch $(\overline{Q}(x, z, t)\, e_j, e_i) = \psi_{i,j}(x, z, t)$ für $e_i, e_j \in \mathfrak{H}^{\tilde{n}(x)}$. $\overline{Q}(x,z,t)$ erfüllt dann (20).

$\overline{Q}(x, z, t)$ ist nach (20) 3. durch $Q_t(x, z)$ bis auf eine $\tilde{\mu} \times \nu \times \alpha$-Nullmenge bestimmt, also ist $\overline{Q}(x, z, t)$ durch $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U)$ bis auf eine $\tilde{\mu} \times \nu \times \alpha$-Nullmenge bestimmt.

Wir setzen nun

$$R(x, s, t) = \overline{Q}(x, h(s), t)\,, \tag{22}$$

dann gilt:

$$\left\{\begin{array}{l} 1.\ R(x, s, t) \text{ ist eine unitäre Transformation in } \mathfrak{H}^{\tilde{n}(x)}, \\ 2.\ R(x, \xi s, t) = R(x, s, t) \text{ für alle } \xi \in G_0, \\ 3.\ (R(x, s, t)\, P^{\tilde{n}(x)} e_j, e_i) \text{ ist } \mathfrak{B}_{M_0 \times G \times G}\text{-meßbar für } i, j = 1, 2, \ldots, \\ 4.\ R(x, s, t_1 t_2) = R(x, s, t_1)\, R(x, s t_1, t_2)\ \tilde{\mu} \times \alpha \times \alpha \times \alpha\text{-fast überall.} \end{array}\right. \tag{23}$$

Beweis von (23). 1. und 2. folgen sofort aus (22). 3. folgt aus (20) 2. und der Stetigkeit von $(x, s, t) \to (x, h(s), t)$. Wir haben noch 4. zu beweisen. Da $(x,s,t_1,t_2) \to (x,s,t_1 t_2)$ und $(x,s,t_1,t_2) \to (x, s t_1, t_2)$ stetig sind, ist $(R(x,s,t_1 t_2)\, P^{\tilde{n}(x)} e_j, e_i)$ und $(R(x, s t_1, t_2)\, P^{\tilde{n}(x)} e_j, e_i)$ $\mathfrak{B}_{M_0 \times G \times G \times G}$-meßbar. Also ist die Menge E aller (x, s, t_1, t_2), für die (23) 4. nicht gilt aus $\mathfrak{B}_{M_0 \times G \times G \times G}$. Wir haben zu zeigen, daß $(\tilde{\mu} \times \alpha \times \alpha \times \alpha)(E) = 0$ ist.

a) Es sei $E_i = \{(x, s, t_1, t_2) : t_i \in N_0\}$, $i = 1, 2$. Es ist $(\tilde{\mu} \times \alpha \times \alpha \times \alpha)(E_i) = 0$, da $\alpha(N_0) = 0$ ist. Es sei $E_3 = \{(x, s, t_1, t_2) : t_1 t_2 \in N_0\}$ und $F = \{(t_1, t_2) : t_1 t_2 \in N_0\}$. Da $\alpha \times \alpha(F) = \int \alpha(N_0 t_2^{-1})\, d\alpha(t_2) = \int \alpha(N_0)\, d\alpha(t_2) = 0$, ist auch $(\tilde{\mu} \times \alpha \times \alpha \times \alpha)(E_3) = 0$.

b) Wir haben noch zu zeigen, daß für jedes Paar t_1, t_2 mit $t_i \notin N_0$, $i = 1, 2$, und $t_1 t_2 \notin N_0$ die Menge E_{t_1, t_2} aller (x, s) mit $(x, s, t_1, t_2) \in E$ eine $\tilde{\mu} \times \alpha$-Nullmenge ist. Damit ist nach a) und dem Satz von Fubini (23) 4. bewiesen. Nach (20) 3. und (19) gilt $\overline{Q}(x, z, t_1 t_2) = \overline{Q}(x, z, t_1)\, Q(x, z t_1, t_2)$ $\tilde{\mu} \times \nu$-fast überall, also ist nach (22) die Menge $\widetilde{E}_{t_1, t_2}$ aller $(x, h(s))$ mit $(x, s) \in E_{t_1, t_2}$ eine $\tilde{\mu} \times \nu$-Nullmenge, d. h. $\nu(\widetilde{E}_{t_1, t_2, x}) = 0$ $\tilde{\mu}$-fast überall; dabei ist $\widetilde{E}_{t_1, t_2, x} = \{z : h(s) = z$ und $(x, h(s)) \in \widetilde{E}_{t_1, t_2}\}$. Nach [9], Lemma 1.3., ist dann $\alpha(E_{t_1, t_2, x}) = 0$ $\tilde{\mu}$-fast überall; dabei ist $E_{t_1, t_2, x} = \{s : (x, s) \in E_{t_1, t_2}\}$. Also ist $(\tilde{\mu} \times \alpha)(E_{t_1, t_2}) = \int \alpha(E_{t_1, t_2, x})\, d\tilde{\mu}(x) = 0$.

Durch $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U)$ ist $R(x, s, t)$ bis auf eine $\tilde{\mu} \times \alpha \times \alpha$-Nullmenge bestimmt, da $\overline{Q}(x, z, t)$ bis auf eine $\tilde{\mu} \times \nu \times \alpha$-Nullmenge bestimmt ist.

Es existiert ein Operatorfeld $B(x, s)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$(24) \quad \begin{cases} 1.\ B(x, s) \text{ ist eine unitäre Transformation in } \mathfrak{H}^{\tilde{n}(x)}, \\ 2.\ (B(x, s)\, P^{\tilde{n}(x)} e_j, e_i) \text{ ist } \mathfrak{B}_{M_0 \times G}\text{-meßbar}, \\ 3.\ R(x, s, t) = B(x, s)^{-1} B(x, st)\ \tilde{\mu} \times \alpha \times \alpha\text{-fast überall.} \end{cases}$$

Beweis. Nach (23) 4. gibt es ein $s_0 \in G$ mit $R(x, s_0, t_1 t_2) = R(x, s_0, t_1)\, R(x, s_0 t_1, t_2)$ $\tilde{\mu} \times \alpha \times \alpha$-fast überall. Wir setzen $B(x, s) = R(x, s_0, s_0^{-1} s)$. Dann erfüllt $B(x, s)$ nach (23) offensichtlich (24) 1. und 2. Ferner ist $B(x, st) = R(x, s_0, s_0^{-1} st)$ $= R(x, s_0, s_0^{-1} s)\, R(x, s, t) = B(x, s)\, R(x, s, t)$ für $\tilde{\mu} \times \alpha \times \alpha$-fast alle $(x, s_0^{-1} s, t)$, also auch für $\tilde{\mu} \times \alpha \times \alpha$-fast alle (x, s, t).

Wie weit ist $B(x, s)$ durch $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U)$ bestimmt? Es sei $R'(x, s, t)$ eine zweite Funktion, die wir wie $R(x, s, t)$ durch entsprechende Schritte aus $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U)$ erhalten. Dann ist $R'(x, s, t) = R(x, s, t)$ $\tilde{\mu} \times \alpha \times \alpha$-fast überall. Erfüllt dann $B'(x, s)$ (24) bezüglich $R'(x, s, t)$, dann ist $B'(x, s)^{-1} B'(x, st) = B^{-1}(x, s)\, B(x, st)$ $\tilde{\mu} \times \alpha \times \alpha$-fast überall. Also gibt es ein $s_0 \in G$ mit $B'(x, s_0)^{-1} B'(x, s_0 t)$ $= B^{-1}(x, s_0)\, B(x, s_0 t)\ \tilde{\mu} \times \alpha$-fast überall. Also ist $B'(x, t) = B'(x, s_0)\, B(x, s_0)^{-1}$ $B(x, t)\ \tilde{\mu} \times \alpha$-fast überall. Setzen wir $B'(x, s_0)\, B(x, s_0)^{-1} = W(x)$, so ist $W(x)$ eine unitäre Transformation in $\mathfrak{H}^{\tilde{n}(x)}$, $(W(x)\, P^{\tilde{n}(x)} e_j, e_i)$ $\mathfrak{B}_{M_0}$-meßbar und $B'(x, t) = W(x)\, B(x, t)\ \tilde{\mu} \times \alpha$-fast überall.

Wir zeigen nun, daß es zu jedem $\xi \in G_0$ ein Operatorfeld $L_\xi(x)$ über M_0 gibt mit folgenden Eigenschaften:

$$(25) \quad \begin{cases} 1.\ L_\xi(x) \text{ ist eine unitäre Transformation in } \mathfrak{H}^{\tilde{n}(x)}, \\ 2.\ (L_\xi(x)\, P^{\tilde{n}(x)} e_j, e_i) \text{ ist } \mathfrak{B}_{M_0}\text{-meßbar für alle } \xi \in G_0, \\ 3.\ L_\xi(x) = B(x, \xi s)\, B(x, s)^{-1}\ \tilde{\mu} \times \alpha\text{-fast überall.} \end{cases}$$

Beweis. Aus (23) 2. und (24) 3. folgt $B(x, \xi s)^{-1} B(x, \xi st) = B(x, s)^{-1} B(x, st)$ $\tilde{\mu} \times \alpha \times \alpha$-fast überall für alle $\xi \in G_0$. Also ist $B(x, \xi s)\, B(x, s)^{-1} = B(x, \xi st)$ $B(x, st)^{-1}\ \tilde{\mu} \times \alpha \times \alpha$-fast überall für alle $\xi \in G_0$. Wir setzen $L_\xi(x, s) = B(x, \xi s)$ $B(x, s)^{-1}$. Dann gilt also $L_\xi(x, s) = L_\xi(x, st)\ \tilde{\mu} \times \alpha \times \alpha$-fast überall. Es gibt daher ein $s_\xi \in G$, so daß $L_\xi(x, s_\xi) = L_\xi(x, s_\xi t)\ \tilde{\mu} \times \alpha$-fast überall gilt, also ist $L_\xi(x, s_\xi) = L_\xi(x, s)\ \tilde{\mu} \times \alpha$-fast überall. Wir setzen nun $L_\xi(x) = L_\xi(x, s_\xi)$, dann ist (25) offensichtlich erfüllt.

Es ist ferner

$$(26) \qquad L_{\xi_1 \xi_2}(x) = L_{\xi_1}(x)\, L_{\xi_2}(x)\ \tilde{\mu}\text{-fast überall für alle } \xi_1, \xi_2 \in G_0,$$

denn $L_{\xi_1 \xi_2}(x) = B(x, \xi_1 \xi_2 s)\, B(x, s)^{-1}$ ($\tilde{\mu} \times \alpha$-fast überall) $= B(x, \xi_1 \xi_2 s)$ $B(x, \xi_2 s)^{-1} B(x, \xi_2 s)\, B(x, s)^{-1} = L_{\xi_1}(x)\, L_{\xi_2}(x)$ ($\tilde{\mu} \times \alpha$-fast überall).

Wie weit ist $L_\xi(x)$ durch $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U)$ bestimmt? Es ist $B'(x, s) = W(x)\, B(x, s)$ $\tilde{\mu} \times \alpha$-fast überall. Also gilt für ein $L'_\xi(x)$, das (25) für $B'(x, s)$ erfüllt, $W(x)\, L_\xi(x)\, W(x)^{-1} = L'_\xi(x)\ \tilde{\mu}$-fast überall nach (25) 3.

Wir definieren nun die Transformation L_ξ in $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ durch

$$(27) \qquad (L_\xi f)(x) = \bar{L}_\xi(x) f(x) \text{ für } f \in (\tilde{\mu}, \tilde{n}).$$

$L(\xi \to L_\xi)$ ist eine stark stetige Darstellung von G_0 und jedes L ist mit den Projektionen des zu $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ gehörigen Spektralmaßes vertauschbar.

Beweis. L_ξ ist wegen (25) 1. unitär und wegen (27) mit den Projektionen des Spektralmaßes vertauschbar. Ferner ist $\bar{L}_e(x)$ die identische Transformation in $\mathfrak{H}^{\tilde{n}(x)}$ nach (25) 3., also ist L_e die identische Transformation in $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$. $L_{\xi_1\xi_2} = L_{\xi_1} L_{\xi_2}$ folgt aus (26). Wir haben also noch die starke Stetigkeit von $L(\xi \to L_\xi)$ zu beweisen.

Ist $f \in (\tilde{\mu}, \tilde{n})$ und $\psi(x, t)$ eine stetige Funktion über $M_0 \times G$ mit kompaktem Träger K, so ist $L(g) = \int \psi(x, t)\,(B(x, t) f(x), g(x))\, d(\tilde{\mu} \times \alpha)$ antilinear und beschränkt für $g \in (\tilde{\mu}, \tilde{n})$. Also gibt es ein $l_{\psi, f} \in (\tilde{\mu}, \tilde{n})$ mit $(l_{\psi, f}, g) = L(g)$. Die Menge dieser $l_{\psi, f}$ spannt $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ auf. $g_0 \in (\tilde{\mu}, \tilde{n})$ stehe senkrecht auf allen $l_{\psi, f}$, d. h. $0 = \int \psi(x, t)\,(B(x, t) f(x), g_0(x))\, d(\tilde{\mu} \times \alpha)$ für alle ψ und alle f. Also ist $(f(x), B(x, t)^{-1} g_0(x)) = 0$ $\tilde{\mu} \times \alpha$-fast überall. Also gibt es ein $t_0 \in G$, so daß $(f_\nu(x), B(x, t_0)^{-1} g_0(x)) = 0$ $\tilde{\mu}$-fast überall gilt, dabei seien die f_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, so gewählt, daß sie $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ aufspannen. Also ist $B(x, t_0)^{-1} g_0(x) = 0$ $\tilde{\mu}$-fast überall. Da $B(x, t_0)$ unitär ist, gilt $g_0(x) = 0$ $\tilde{\mu}$-fast überall, d. h. $g_0 = 0$. Nun ist $(L_\xi l_{\psi, f}, g) = (l_{\psi, f}, L_\xi^{-1} g) = \int \psi(x, t)\,(B(x, t) f(x), \bar{L}_{\xi^{-1}} g(x))\, d(\tilde{\mu} \times \alpha) = \int \psi(x, t)$ $(\bar{L}_\xi(x) B(x, t) f(x), g(x))\, d(\tilde{\mu} \times \alpha) = \int \psi(x, t)\,(B(x, \xi t) f(x), g(x))\, d(\tilde{\mu} \times \alpha)$ $= \Delta(\xi^{-1}) \int \psi(x, \xi^{-1} t)\,(B(x, t) f(x), g(x))\, d(\tilde{\mu} \times \alpha)$ und, da $\psi(x, t)$ gleichmäßig stetig ist, ist $(L_\xi l_{\psi, f}, g)$ stetig in ξ. Die $l_{\psi, f}$ spannen $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ auf, also ist $L(\xi \to L_\xi)$ schwach und damit auch stark stetig in $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$.

Wie weit ist die Darstellung $L(\xi \to L_\xi)$ durch $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U)$ bestimmt? Geht man von einem anderen $\bar{L}'_\xi(x)$ aus, so gibt es nach obiger Bemerkung ein unitäres Operatorfeld $W(x)$ mit $W(x) \bar{L}_\xi(x) W^{-1}(x) = \bar{L}'_\xi(x)$ $\tilde{\mu}$-fast überall. Also ist W mit $(Wf)(x) = W(x) f(x)$ eine unitäre Abbildung von $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ auf sich. Ist $L'(\xi \to L'_\xi)$ durch $(L'_\xi f)(x) = \bar{L}'_\xi(x) f(x)$ definiert, so ist W eine Äquivalenzabbildung von L auf L', die mit den Projektionen des zu $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ gehörigen Spektralmaßes vertauschbar ist.

Nach Lemma 7 gibt es ein Darstellungsfeld L über $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ mit $L(x)(\xi \to L_\xi(x))$, so daß $(L_\xi f)(x) = L_\xi(x) f(x)$ $\tilde{\mu}$-fast überall gilt. Ein Darstellungsfeld L über $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$, das auf diese Weise zu $(\mathfrak{H}, U', P')$ konstruiert wird, heißt ein zu $(\mathfrak{H}, U', P')$ *gehöriges Darstellungsfeld*. Es gilt übrigens

$$(28) \qquad \bar{L}_\xi(x) = L_\xi(x) \ \ \tilde{\mu}\text{-fast überall für alle } \xi \in G_0.$$

da sowohl $(L_\xi f)(x) = \bar{L}_\xi(x) f(x)$, als auch $(L_\xi f)(x) = L_\xi(x) f(x)$ für alle $f \in (\tilde{\mu}, \tilde{n})$ gilt.

Durch $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U)$ ist das zugehörige Darstellungsfeld nach obiger Bemerkung über $L'(\xi \to L'_\xi)$ und der Definition der Äquivalenz von Darstellungsfeldern bis auf Äquivalenz bestimmt.

Lemma 12: Sind $(\mathfrak{H}, U, P)$ und $(\mathfrak{H}', U', P')$ zwei äquivalente imprimitive Systeme mit der Basis $M = M_0 \times B$ und ist L bzw. L' ein zu $(\mathfrak{H}, U, P)$ bzw.

$(\mathfrak{H}', U', P')$ gehöriges Darstellungsfeld über $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ bzw. $(\tilde{\mu}', \tilde{n}')$, so sind L und L' äquivalent. Insbesondere sind also alle Darstellungsfelder äquivalent, die zu einem imprimitiven System gehören.

Beweis. L bzw. L' werde aus den zu $(\mathfrak{H}, U, P)$ bzw. $(\mathfrak{H}', U', P')$ äquivalenten imprimitiven Systemen $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U)$ bzw. $([\tilde{\mu}', \tilde{n}'], U')$ abgeleitet. Da die zugehörigen Darstellungsfelder durch $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U)$ bzw. $([\tilde{\mu}', \tilde{n}'], U')$ bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt sind, genügt es, die Äquivalenz zweier beliebiger aus $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U)$ und $([\tilde{\mu}', \tilde{n}'], U')$ abgeleiteter Darstellungsfelder zu beweisen.

Da $(\mathfrak{H}, U, P)$ und $(\mathfrak{H}', U', P')$ äquivalent sind, sind auch $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U)$ und $([\tilde{\mu}', \tilde{n}'], U')$ äquivalent. V sei eine Äquivalenzabbildung von $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U)$ auf $([\tilde{\mu}', \tilde{n}'], U')$. $\tilde{\mu}$ und $\tilde{\mu}'$ sind äquivalent und $\tilde{n}(x) = \tilde{n}'(x)$ gilt $\tilde{\mu}$-fast überall. Ferner gibt es ein Äquivalenzfeld $V(x, z)$, zu dem V gehört. Es gilt also $U'_t = V U_t V^{-1}$ und $(Vf)(x,z) = \frac{1}{\sqrt{\gamma(x)}} V(x,z) f(x,z)$ $\tilde{\mu} \times \nu$-fast überall; dabei ist $\gamma(x) = \frac{d\tilde{\mu}'}{d\tilde{\mu}}(x) \succ 0$.

Wir gehen nun die Schritte, die zu den zugehörigen Darstellungsfeldern führen, der Reihe nach durch und versehen die Größen, die aus $([\tilde{\mu}', \tilde{n}'], U')$ abgeleitet werden, mit einem Strich. Es ist $Q'_t = V U_t V^{-1} U'^{\prime}_{t^{-1}}$. Für $f \in (\tilde{\mu}', \tilde{n}')$ ergibt eine einfache Rechnung $(Q'_t f)(x,z) = V(x,z) Q_t(x,z) V(x,zt)^{-1} f(x,z)$ $\tilde{\mu} \times \nu$-fast überall. Also ist $Q'_t(x,z) = V(x,z)\, Q_t(x,z)\, V(x,zt)^{-1}$ $\tilde{\mu} \times \nu$-fast überall und daher auch $\overline{Q}'(x,z,t) = V(x,z)\, \overline{Q}(x,z,t)\, V(x,zt)^{-1}$ $\tilde{\mu} \times \nu \times \alpha$-fast überall. Dann ist auch $R'(x,s,t) = V(x,h(s))\, R(x,s,t)\, V(x,h(s)t)^{-1}$ $\tilde{\mu} \times \alpha \times \alpha$-fast überall. Erfüllt $B(x,s)$ (24), so können wir ein $B'(x,s)$, das (24) bezüglich $R'(x,s,t)$ erfüllt, so wählen, daß $B'(x,s) = B(x,s)\, V(x,h(s))^{-1}$ $\tilde{\mu} \times \alpha$-fast überall gilt. Aus (25) folgt dann $\overline{L}_\xi(x) = \overline{L}'_\xi(x)$ $\tilde{\mu}$-fast überall für alle $\xi \in G_0$. Dann ist aber W mit $(Wf)(x) = \frac{1}{\sqrt{\gamma(x)}} f(x)$ für x mit $\tilde{n}(x) = \tilde{n}'(x)$ und $(Wf)(x) = 0$ sonst eine Äquivalenzabbildung von $L(\xi \to L_\xi)$ auf $L'(\xi \to L'_\xi)$, also sind die Darstellungsfelder L und L' äquivalent.

Lemma 13: Sind $(\mathfrak{H}, U, P)$ und $(\mathfrak{H}', U', P')$ imprimitive Systeme und ist L bzw. L' ein Darstellungsfeld über $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ bzw. $(\tilde{\mu}', \tilde{n}')$, das zu $(\mathfrak{H}, U, P)$ bzw. $(\mathfrak{H}', U', P')$ gehört, dann sind $(\mathfrak{H}, U, P)$ und $(\mathfrak{H}', U', P')$ äquivalent, falls L und L' äquivalent sind.

Beweis. 1. Da $L(\xi \to L_\xi(x))$ und $L'(\xi \to L'_\xi(x))$ äquivalent sind, gibt es nach Lemma 8 ein Äquivalenzfeld $V(x)$ von $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ auf $(\tilde{\mu}', \tilde{n}')$, das bis auf eine $\tilde{\mu}$-Nullmenge $N_0 \in \mathfrak{B}_{M_0}$ definiert ist, mit $V(x)\, L_\xi(x)\, V(x)^{-1} = L'_\xi(x)$ für alle $x \notin N_0$ und alle $\xi \in G_0$. Wir gehen nun die Schritte, die nach L und L' führten, der Reihe nach rückwärts durch. Da $\overline{L}_\xi(x) = L_\xi(x)$ und $\overline{L}'_\xi(x) = L'_\xi(x)$ $\tilde{\mu}$-fast überall gilt, gilt $V(x)\, \overline{L}_\xi(x)\, V(x)^{-1} = \overline{L}'_\xi(x)$ $\tilde{\mu}$-fast überall und damit nach (25) auch $V(x)\, B(x, \xi s)\, B(x,s)^{-1} V(x)^{-1} = B'(x, \xi s)\, B'(x,s)^{-1}$ $\tilde{\mu} \times \alpha$-fast überall. Also ist $B'(x, \xi s)^{-1} V(x)\, B(x, \xi s) = B'(x,s)^{-1} V(x)\, B(x,s)$ $\tilde{\mu} \times \alpha$-fast überall.

Wir zeigen in 2. und 3., daß es ein Operatorfeld $W(x,z)$ gibt, das für alle (x,z) mit $x \notin N_0$ definiert ist und folgende Eigenschaften besitzt: 1. $W(x,z)$ ist eine unitäre Transformation in $\mathfrak{H}^{\tilde{n}(x)}$, 2. $(W(x,z)\, P^{\tilde{n}(x)} e_i, e_j)$ ist $\mathfrak{B}_{M_0 \times B}$-meßbar für $i, j = 1, 2, \ldots$, und 3. $W(x, h(s)) = B'(x,s)^{-1} V(x)\, B(x,s)$ $\tilde{\mu} \times \alpha$-

fast überall. Nach (24) gilt dann $R'(x, s, t) = W(x, h(s))\, R(x, st)\, W(x, h(s)\, t)^{-1}$ $\tilde{\mu} \times \alpha \times \alpha$-fast überall. Nach (22) und (20) gibt es dann eine α-Nullmenge N_1 mit $Q'_t(x, z) = W(x, z)\, Q_t(x, z)\, W(x, zt)^{-1}$ $\tilde{\mu} \times \nu$-fast überall für $t \notin N_1$. Wir definieren nun die Abbildung W von $[\tilde{\mu}, \tilde{n}]$ auf $[\tilde{\mu}', \tilde{n}']$ durch $(Wf)(x, z) = \frac{1}{\sqrt{\gamma(x)}}\, W(x, z)\, f(x, z)$ für $x \notin N_0$ und $(Wf)(x, z) = 0$ für $x \in N_0$; dabei ist $\gamma(x) = \frac{d\tilde{\mu}'}{d\tilde{\mu}}(x) > 0$. Nach (18) ist dann $U'_t = W\, U_t\, W^{-1}$ für $t \notin N_1$. Da $U(t \to U_t)$ und $U'(t \to U'_t)$ stark stetig sind, gilt $U'_t = W\, U_t\, W^{-1}$ auch für $t \in N_1$. W führt ferner die zu $[\tilde{\mu}, \tilde{n}]$ und $[\tilde{\mu}', \tilde{n}']$ gehörigen Spektralmaße ineinander über, d. h. W ist eine Äquivalenzabbildung von $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U)$ auf $([\tilde{\mu}', \tilde{n}'], U')$. Also sind $(\mathfrak{H}, U, P)$ und $(\mathfrak{H}', U', P')$ äquivalent.

2. Wir zeigen jetzt: Ist $f(x, s)$ eine $\mathfrak{B}_{M_0 \times G}$-meßbare Funktion mit $f(x, \xi s) = f(x, s)$ $\tilde{\mu} \times \alpha$-fast überall für alle $\xi \in G_0$, dann gibt es eine $\mathfrak{B}_{M_0 \times G}$-meßbare Funktion $g(x, s)$ mit $g(x, s) = f(x, s)$ $\tilde{\mu} \times \alpha$-fast überall und $g(x, s) = g(x, \xi s)$ für alle $\xi \in G_0$ und $(x, s) \in M_0 \times G$.

a) Zunächst zeigen wir: Ist $h(x, s) \geqq 0$ und $\mathfrak{B}_{M_0 \times G}$-meßbar, so ist $h(x, s) = 0$ $\tilde{\mu} \times \alpha$-fast überall gleichwertig mit $H(x, s) = \int h(x, \xi s)\, d\beta(\xi) = 0$ $\tilde{\mu} \times \alpha$-fast überall; dabei ist β das rechts-invariante Maß über G_0.

Beweis. $L(G)$ sei die Menge aller reellwertigen, stetigen Funktionen über G mit kompaktem Träger. Ist $l \in L(G)$, so hängt $L(s) = \int l(\xi s)\, d\beta(\xi)$ nur von der Nebenklasse $G_0 s$ ab. $L(s)$ kann daher auch als Funktion über $B = G/G_0$ betrachtet werden. L ist dann stetig und besitzt einen kompakten Träger. $\int(\int l(\xi s)\, d\beta)\, d\nu = I(l)$ ist also ein positives, lineares Funktional über $L(G)$. Es gibt also ein Maß γ über $\mathfrak{B}_G$ mit $I(l) = \int l(s)\, d\gamma(s)$ für alle $l \in L(G)$. Dann gilt aber für alle $\mathfrak{B}_G$-meßbaren t mit $t(s) \geqq 0$ $\int(\int t(\xi s)\, d\beta)\, d\nu = \int t(s)\, d\gamma$. γ ist quasi-invariant, denn aus $0 = \gamma(E) = \iint \chi_E(\xi s)\, d\beta\, d\nu$ folgt $\int \chi_E(\xi s)\, d\beta = 0$ ν-fast überall, also ist $\gamma(Et) = \iint \chi_E(\xi s t^{-1})\, d\beta\, d\nu = \int(\int \chi_E(\xi s)\, d\beta)\, d\nu_t = 0$, da ν_t äquivalent zu ν ist. Nach [9], Lemma 3.3., ist γ äquivalent zu α.

$h(x, s) = 0$ $\tilde{\mu} \times \alpha$-fast überall ist gleichwertig mit $\int h(x, s)\, d\alpha = 0$ $\tilde{\mu}$-fast überall, also auch mit $\int h(x, s)\, d\gamma = \iint h(x, \xi s)\, d\beta\, d\nu = 0$ $\tilde{\mu}$-fast überall. Das ist gleichwertig mit $\int h(x, \xi s)\, d\beta = 0$ ν-fast überall für $\tilde{\mu}$-fast alle x. Nach [9], Lemma 1.3., ist dies gleichwertig mit $H(x, s) = \int h(x, \xi s)\, d\beta = 0$ α-fast überall für $\tilde{\mu}$-fast alle x. Dies wiederum ist gleichwertig mit $H(x, s) = 0$ $\tilde{\mu} \times \alpha$-fast überall.

b) Im folgenden sei f stets eine $\mathfrak{B}_{M_0 \times G}$-meßbare Funktion mit $f(x, s) = f(x, \xi s)$ $\tilde{\mu} \times \alpha$-fast überall für alle $\xi \in G_0$. Zu jedem f gibt es eine $\tilde{\mu} \times \alpha$-Nullmenge $N'_0 \in \mathfrak{B}_{M_0 \times G}$ mit $f(x, s) = f(x, \xi s)$ β-fast überall für alle $(x, s) \notin N'_0$.

Beweis. $f(x, \xi s)$ ist $\mathfrak{B}_{M_0 \times G_0 \times G}$-meßbar, also ist $N = \{(x, \xi, s) : f(x, s) \neq f(x, \xi s)\} \in \mathfrak{B}_{M_0 \times G_0 \times G}$. Da $N_\xi = \{(x, s) : f(x, s) \neq f(x, \xi s)\}$ eine $\tilde{\mu} \times \alpha$-Nullmenge ist, ist N eine $\tilde{\mu} \times \beta \times \alpha$-Nullmenge. Also gibt es eine $\tilde{\mu} \times \alpha$-Nullmenge N'_0, die unsere Behauptung erfüllt.

c) Wir betrachten zunächst den Fall $f(x, s) = \chi_E(x, s)$. Wir setzen dazu $g_E(x, s) = \int \chi_E(x, \xi s)\, d\beta$ und $h_E(x, s) = \int(1 - \chi_E(x, \xi s))\, d\beta$. Es sei

$N_1 = \{(x, s) : g_E(x, s) = 0\}$, $N_2 = \{(x, s) : h_E(x, s) = 0\}$ und $N_3 = \{(x, s) : g_E(x, s) > 0$ und $h_E(x, s) > 0\}$. Da $g_E(x, s) + h_E(x, s) = \beta(G_0) > 0$ ist, sind die N_i paarweise fremd, ihre Vereinigung ist $M_0 \times G$. Aus $(x, s) \in N_2$ folgt $(x, \xi s) \in N_2$ für alle $\xi \in G_0$. Also gilt $\chi_{N_2}(x, \xi s) = \chi_{N_2}(x, s)$ für alle $\xi \in G_0$. Es sei $h(x, s) = |\chi_{N_2}(x, s) - \chi_E(x, s)|$. Dann ist $H(x, s) = \int h(x, \xi s)\, d\beta = 0$ $\tilde{\mu} \times \alpha$-fast überall, denn für $(x, s) \in N_1$ ist $H(x, s) = g_E(x, s) = 0$ und für $(x, s) \in N_2$ ist $H(x, s) = h_E(x, s) = 0$ und nach b) ist N_3 eine $\tilde{\mu} \times \alpha$-Nullmenge. Aus a) folgt damit $\chi_{N_2}(x, s) = \chi_E(x, s)$ $\tilde{\mu} \times \alpha$-fast überall.

d) Ist f reellwertig, so erfüllt χ_{N_λ} mit $N_\lambda = \{(x, s) : f(x, s) \geqq \lambda\}$ für jedes reelle λ die Voraussetzungen von c). Da jedes $\mathfrak{B}_{M_0 \times G}$-meßbare f Limes von Linearkombinationen der χ_{N_λ} ist, ist die Behauptung am Anfang von 2. auch für f richtig. Sie ist dann natürlich auch für komplexwertige Funktionen richtig.

3. Es sei nun $\varphi_{i,j}(x, s) = (B'(x, s)^{-1} V(x)\, B(x, s)\, P^{\tilde{n}(x)} e_j, e_i)$, falls $x \notin N_0$ und $\varphi_{j,i}(x, s) = 0$ sonst. Dann gilt $\varphi_{j,i}(x, \xi s) = \varphi_{j,i}(x, s)$ $\tilde{\mu} \times \alpha$-fast überall und $\sum\limits_k \varphi_{i,k}(x, s)\, \overline{\varphi_{j,k}(x, s)} = \sum\limits_k \varphi_{k,i}(x, s)\, \overline{\varphi_{k,j}(x, s)} = \chi_{S_i}(x)\, \chi_{N_0}(x)\, \delta_{i,j}$, da $B'(x, s)^{-1} V(x)\, B(x, s)$ unitär ist. Nach 2. gibt es also eine $\mathfrak{B}_{M_0 \times G}$-meßbare Funktion $\psi_{j,i}$ mit $\psi_{j,i}(x, s) = \psi_{j,i}(x, \xi s)$ für alle (x, s, ξ) und $\psi_{j,i}(x, s) = \psi_{j,i}(x, s)$ $\tilde{\mu} \times \alpha$-fast überall. Nach Abänderung von $\psi_{j,i}$ auf einer $\tilde{\mu} \times \alpha$-Nullmenge können wir erreichen, daß die $\psi_{j,i}$ noch folgende Bedingungen erfüllen: $\sum\limits_k \psi_{i,k}(x, s)\, \overline{\psi_{j,k}(x, s)} = \sum\limits_k \psi_{k,i}(x, s)\, \overline{\psi_{k,j}(x, s)} = \chi_{S_i}(x)\, \chi_{N_0}(x)\, \delta_{i,j}$ und $\psi_{j,i}(x, s) = 0$ für $j > \tilde{n}(x)$ oder $i > \tilde{n}(x)$. Diese Abänderung ist möglich, da die $\varphi_{j,i}$ diese Eigenschaften besitzen. Wir definieren nun $W(x, z)$ für $x \notin N_0$ durch $(W(x, h(s))\, e_j, e_i) = \psi_{j,i}(x, s)$. $W(x, z)$ erfüllt dann die in 1. geforderten Bedingungen. Damit ist Lemma 13 bewiesen.

Ist L ein Darstellungsfeld über $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ und $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U^L)$ das von L erzeugte imprimitive System, so gilt:

Lemma 14: Das Darstellungsfeld L über $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ gehört zu $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U^L)$.

Beweis. Nach (24) ist $(U_t g)(x, z) = \sqrt{\lambda(z, t)}\, L_{\xi(z,t)}(x)\, g(x, zt)$. Dabei ist $\xi(z, t)$ eine Borel-meßbare Abbildung von $B \times G$ in G_0. Ferner ist $(U_t^I g)(x, z) = \sqrt{\lambda(z, t)}\, g(x, zt)$. Also ist $(Q_t g)(x, z) = L_{\xi(z,t)}(x)\, g(x, z)$. Wir können daher $Q_t(x, z) = \overline{Q}(x, z, t) = L_{\xi(z,t)}(x)$ wählen, da $\xi(z, t)$ Borel-meßbar ist und $(L_\xi(x)\, e_j, e_i)$ nach Definition $\mathfrak{B}_{G_0 \times M_0}$-meßbar ist. Dann ist $R(x, s, t) = L_{\xi(h(s),t)}(x)$. Setzen wir $B(x, s) = L_{\eta_0}(x)\, L_{\xi(h(e),s)}(x)$ mit $\eta_0 = (h_1^{-1}(h(e)))^{-1}$, dann ist $B(x, s)^{-1} B(x, st) = L_{\xi(h(e),s)^{-1}}(x)\, L_{\xi(h(e),st)}(x) = L_{\xi(h(s),t)}(x) = R(x, s, t)$, denn es gilt $\xi(h(e), s)^{-1} \cdot \xi(h(e), st) = h_1^{-1}(h(e)\, s) \cdot s^{-1} \cdot (h_1^{-1}(h(e)))^{-1} \cdot h_1^{-1}(h(e)) \cdot st \cdot (h_1^{-1}(h(e)\, st))^{-1} = h_1^{-1}(h(s)) \cdot t \cdot (h_1^{-1}(h(s)\, t))^{-1} = \xi(h(s), t)$. Ferner ist $B(x, \xi_0 s)\, B(x, s)^{-1} = L_{\xi_0}(x)$, da $\eta_0 \cdot h_1^{-1}(h(e)) \cdot \xi_0 s \cdot (h_1^{-1}(h(e)\, \xi_0 s))^{-1} \cdot h_1^{-1}(h(e)\, s) \cdot s^{-1} \cdot (h_1^{-1}(h(e))^{-1} \cdot \eta_0^{-1} = \xi_0$ ist. Wir können daher $\overline{L}_\xi(x) = L_\xi(x)$ setzen. Nun ist aber $L(\xi \to L_\xi(x))$ bereits ein Darstellungsfeld, also gehört L zu $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U^L)$.

Damit haben wir in diesem Paragraphen folgenden wichtigen Satz bewiesen:

Satz 3: *Ist $(\mathfrak{H}, U, P)$ ein imprimitives System mit der Basis $M = M_0 \times B$ und gehört das Darstellungsfeld L über $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ zu $(\mathfrak{H}, U, P)$, so ist $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U^L)$ äquivalent zu $(\mathfrak{H}, U, P)$. Jedes imprimitive System $(\mathfrak{H}, U, P)$ ist also äquivalent*

zu einem imprimitiven System der Form $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U^L)$. *Zwei imprimitive Systeme der Form* $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U^L)$ *und* $([\tilde{\mu}', \tilde{n}'], U^{L'})$ *sind dann und nur dann äquivalent, wenn die Darstellungsfelder* L *über* $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ *und* L' *über* $(\tilde{\mu}', \tilde{n}')$ *äquivalent sind.*

Satz 5 zeigt, daß wir uns auf imprimitive Systeme der Form $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U^L)$ beschränken können. Das imprimitive System $([\tilde{\mu}, \tilde{n}], U^L)$ bezeichnen wir, wenn es uns bequem erscheint, im folgenden auch mit $\{\tilde{\mu}, L\}$, denn $\tilde{n}$ ist durch L bereits bestimmt, da $\tilde{n}(x)$ die Dimension des Darstellungsraumes von $L(x)$ $(\xi \to L_\xi(x))$ ist.

§ 7. *Direkte Summe imprimitiver Systeme*

$\{\tilde{\mu}_i, L^i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, seien endlich oder abzählbar viele imprimitive Systeme mit der Basis $M = M_0 \times B$. Wir geben in diesem Paragraphen ein Verfahren zur Berechnung der direkten Summe der $\{\tilde{\mu}_i, L^i\}$ an, d. h. wir bringen die direkte Summe wieder auf die Form $\{\tilde{\mu}, L\}$.

$\tilde{\mu}$ sei ein σ-endliches Maß über $\mathfrak{B}_{M_0}$, für das $\tilde{\mu}(E) = 0$ dann und nur dann gilt, wenn $\tilde{\mu}_i(E) = 0$ für alle $i = 1, 2, \ldots$, gilt. Daß es solche Maße gibt, ist leicht einzusehen. Ferner gibt es zu jedem i eine Menge $M_i \in \mathfrak{B}_{M_0}$, so daß $\tilde{\mu}'_i$ mit $\tilde{\mu}'_i(E) = \tilde{\mu}(E \cap M_i)$ äquivalent zu $\tilde{\mu}_i$ ist (vgl. [4], S. 78). $L^i(\xi \to L^i_\xi(x))$ ist ein Darstellungsfeld über $(\tilde{\mu}_i, \tilde{n}_i)$. Wir setzen nun $\tilde{n}'_i = \chi_{M_i} \cdot \tilde{n}_i$, dann ist $\tilde{n}'_i(x) = \tilde{n}_i(x)$ $\tilde{\mu}_i$-fast überall, da $\tilde{\mu}'_i(M_0 - M_i) = 0$ ist. Definieren wir $\tilde{L}^i(\xi \to \tilde{L}^i_\xi(x))$ durch $\tilde{L}^i_\xi(x) = L^i_\xi(x)$ für $x \in M_i$ und $\tilde{L}^i_\xi(x) = 0$ mit dem „Darstellungsraum" $\{0\}$ für $x \notin M_i$, so ist $\tilde{L}^i$ ein Darstellungsfeld über $(\tilde{\mu}'_i, \tilde{n}'_i)$, das zu L^i äquivalent ist. Also ist auch $\{\tilde{\mu}_i, L^i\}$ äquivalent zu $\{\tilde{\mu}'_i, \tilde{L}^i\}$.

Die normierten direkten Integrale $(\tilde{\mu}'_i, \tilde{n}'_i)$ und $[\tilde{\mu}'_i, \tilde{n}'_i]$ seien mit Hilfe des separablen Hilbert-Raumes $\mathfrak{H}_i$ und der Basis $e_{i,j}$, $j = 1, 2, \ldots$, gebildet. $\mathfrak{H}_x$ sei die direkte Summe der $\mathfrak{H}_i^{\tilde{n}'_i(x)}$. Ferner sei $\tilde{\varphi}_{i,j}(x) = e_{i,j}$, falls $j \leqq \tilde{n}'_i(x)$, und $\tilde{\varphi}_{i,j}(x) = 0$ sonst und $\varphi_{i,j}(x, z) = \tilde{\varphi}_{i,j}(x)$. Es sei $\tilde{\mathfrak{M}} = \{f : f(x) \in \mathfrak{H}_x$ und $(f(x), \tilde{\varphi}_{i,j}(x))$ $\mathfrak{B}_{M_0}$-meßbar für $i, j = 1, 2, \ldots\}$ und $\mathfrak{M} = \{f : f(x, z) \in \mathfrak{H}_x$ und $(f(x, z), \varphi_{i,j}(x, z))$ $\mathfrak{B}_{M_0 \times B}$-meßbar für $i, j = 1, 2, \ldots\}$. Wir bilden die direkten Integrale $\tilde{\mathfrak{S}} = (\int \mathfrak{H}_x d\tilde{\mu}, \tilde{\mathfrak{M}})$ und $\mathfrak{S} = (\int \mathfrak{H}_x d\tilde{\mu} \times \nu, \mathfrak{M})$. $\tilde{L}(\xi \to \tilde{L}_\xi(x))$ sei das Darstellungsfeld mit $\tilde{L}_\xi(x) =$ direkte Summe der $\tilde{L}^i_\xi(x)$. $\overline{U}(s \to \overline{U}_s)$ sei die Darstellung von G mit $(\overline{U}_s f)(x, s) = \sqrt{\lambda(z, s)}\, \tilde{L}_{\xi(z,s)}(x)\, f(x, zs)$ und den Darstellungsraum $\mathfrak{S}$. $(\mathfrak{S}, \overline{U}, P)$ ist ein imprimitives System, das offensichtlich äquivalent zur direkten Summe der $\{\tilde{\mu}'_i, \tilde{L}'_i\}$ ist; dabei ist P das zu $\mathfrak{S}$ gehörige Spektralmaß. Das direkte Integral $\mathfrak{S}$ ist äquivalent zum normierten direkten Integral $(\tilde{\mu}, \tilde{n}')$ mit $\tilde{n}'(x) = \dim \mathfrak{H}_x = \sum\limits_i \tilde{n}'_i(x)$. Die Äquivalenzabbildung $\tilde{V}$ von $\tilde{\mathfrak{S}}$ auf $(\tilde{\mu}, \tilde{n}')$ können wir in der Form $(\tilde{V} f)(x) = \tilde{V}(x) f(x)$ annehmen; dabei ist $V(x)$ eine unitäre Abbildung von $\mathfrak{H}_x$ auf $\mathfrak{H}^{\tilde{n}'(x)}$. $L(\xi \to L_\xi(x))$ mit $L_\xi(x) = V(x)\, \tilde{L}_\xi(x)\, V(x)^{-1}$ ist dann ein Darstellungsfeld über $(\tilde{\mu}, \tilde{n}')$. Wir bilden nun $([\tilde{\mu}, \tilde{n}'], U^L)$, dann ergibt eine einfache Rechnung, daß V mit $(V f)(x, z) = \tilde{V}(x) f(x, z)$ eine unitäre Abbildung von $\mathfrak{S}$ auf $[\tilde{\mu}, \tilde{n}']$ und eine Äquivalenzabbildung von $\overline{U}$ auf U^L ist. *Also ist die direkte Summe der* $[\tilde{\mu}_i, L^i]$ *äquivalent zu* $[\tilde{\mu}, L]$.

Ein imprimitives System $(\mathfrak{H}, U, P)$ heißt *irreduzibel*, wenn es keinen echten von $\{0\}$ verschiedenen Teilraum von $\mathfrak{H}$ gibt, der für alle U_s und P_E invariant ist.

Satz 4: *Ein imprimitives System mit der Basis $M = M_0 \times B$ ist dann und nur dann irreduzibel, wenn es äquivalent zu einem imprimitiven System der Form $\{\delta_{x_0}, L\}$ ist, bei dem δ_{x_0} das Dirac-Maß mit dem Träger $x_0 \in M_0$ und $L(x_0)$ $(\xi \to L_\xi(x_0))$ eine irreduzible Darstellung von G_0 ist.*[11]

Beweis. Nur dann: Ein imprimitives System $\{\tilde{\mu}, L\}$ ist offensichtlich nur dann irreduzibel, wenn es keine zwei zueinander fremde Mengen aus $\mathfrak{B}_{M_0}$ gibt, die beide positives $\tilde{\mu}$-Maß besitzen. Also ist $\tilde{\mu}$ äquivalent zum Dirac-Maß δ_{x_0} für einen Punkt $x_0 \in M_0$. Wäre die Darstellung $L(x_0)$ $(\xi \to L_\xi(x_0))$ direkte Summe der Darstellungen $L^i(x_0)$ $(\xi \to L^i_\xi(x_0))$, $i = 1, 2, \ldots$, so wäre nach obigen Überlegungen $\{\delta_{x_0}, L\}$ äquivalent zur direkten Summe $\{\delta_{x_0}, L^1\}$ und $\{\delta_{x_0}, L^2\}$.

Dann: $\{\delta_{x_0}, L\}$ sei gegeben und die x_0 zugeordnete Darstellung $L(x_0)$ $(\xi \to L_\xi(x_0))$ sei irreduzibel. Nehmen wir nun an, $\{\delta_{x_0}, L\}$ sei nicht irreduzibel, so ist $\{\delta_{x_0}, L\}$ direkte Summe zweier imprimitiver Systeme $\{\tilde{\mu}_i, L^i\}$, $i = 1, 2$. Bilden wir nach obigen Verfahren die direkte Summe dieser beiden imprimitiven Systeme, und bezeichnen das Ergebnis mit $\{\tilde{\mu}, \tilde{L}\}$, so ist $\{\tilde{\mu}, \tilde{L}\}$ äquivalent zu $\{\delta_{x_0}, L\}$. Also ist $\tilde{\mu}$ äquivalent zu δ_{x_0}. Dann muß auch $\tilde{\mu}_1$ und $\tilde{\mu}_2$ äquivalent zu δ_{x_0} sein. Ferner muß $\tilde{L}(x_0)$ äquivalent zu $L(x_0)$ sein und auch zur direkten Summe von $L^1(x_0)$ und $L^2(x_0)$. Das ist ein Widerspruch, da $L(x_0)$ irreduzibel ist.

§ 8. *Normalformen imprimitiver Systeme bei kompakten G_0*

Ist G_0 eine kompakte Untergruppe von G, so kann man für die Äquivalenzklassen der imprimitiven Systeme noch weiter ins einzelne gehende Repräsentanten angeben, indem man unter der Menge der äquivalenten Darstellungsfelder bestimmte auswählt.

In diesem Paragraphen sei G_0 stets kompakt. $L^i(\xi \to L^i_\xi)$, $i = 1, 2, \ldots$, sei ein vollständiges System paarweise inäquivalenter, irreduzibler, unitärer Darstellungen von G_0. Der Darstellungsraum von L^i sei der endlich-dimensionale Hilbert-Raum $\mathfrak{H}_i$. $e^i_1, \ldots, e^i_{\varkappa_i}$ sei eine orthonormierte Basis von $\mathfrak{H}_i$. $\mathfrak{H}_{i,0}$ sei der Hilbert-Raum $\{(f_1, f_2, \ldots) : f_\nu \in \mathfrak{H}_i$ und $\sum_{\nu=1}^{\infty} |f_\nu(x)|^2 < +\infty\}$. $\mathfrak{H}_{i,0}$ ist also direkte Summe von abzählbar vielen Exemplaren der $\mathfrak{H}_i$. Ferner sei $e_1 = (e^i_1, 0, 0, \ldots)$, $e_2 = (e^i_2, 0, 0, \ldots), \ldots e_{\varkappa_i} = (e^i_{\varkappa_i}, 0, 0, \ldots)$, $e_{\varkappa_i+1} = (0, e^i_1, 0, 0, \ldots), \ldots$. $e_1, e_2, \ldots$ ist dann eine orthonormierte Basis von $\mathfrak{H}_{i,0}$. Mit dieser Basis bilden wir die folgenden direkten Integrale.

Es sei $\tilde{\mu}$ ein σ-endliches Maß über $\mathfrak{B}_{M_0}$ und k eine $\mathfrak{B}_{M_0}$-meßbare Funktion über M_0 mit 1. $k(x) \geqq 0$, $k(x) =$ ganz oder ∞, 2. $\{x : k(x) = 0\}$ ist eine $\tilde{\mu}$-Nullmenge. $L^i_k(\xi \to L^i_\xi(x))$ sei das Darstellungsfeld über $(\tilde{\mu}, \varkappa_i \cdot k)$ mit $L^i_\xi(x)$ $(f_1, \ldots, f_{k(x)}, 0, 0, \ldots) = (L^i f_1, \ldots, L^i f_{k(x)}, 0, \ldots)$, falls $k(x) < \infty$, und $L^i_\xi(x)$ $(f_1, f_2, \ldots) = (L^i f_1, L^i f_2, \ldots)$, falls $k(x) = \infty$. Mit $\{\tilde{\mu}, k\}_i$ bezeichnen wir das imprimitive System $([\tilde{\mu}, \varkappa_i k], L^i_k) = \{\tilde{\mu}, L^i_k\}$ mit der Basis $M = M_0 \times B$.

---

[11]) Vergleiche [7].

Ist umgekehrt ein Darstellungsfeld $L(\xi \to L_\xi(x))$ von G_0 über $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ gegeben, so bezeichnen wir mit $k_i^L(x)$ die Vielfachheit mit der $L^i(\xi \to L_\xi^i)$ in $L(x)$ $(\xi \to L_\xi(x))$ vorkommt.

Lemma 15: $\{\tilde{\mu}, L\}$ ist äquivalent zur direkten Summe der imprimitiven Systeme $\{\tilde{\mu}_i, k_i^L\}_i$ mit $\tilde{\mu}_i \neq 0$, dabei ist $\tilde{\mu}_i(E) = \tilde{\mu}(E \cap M_i)$ und $M_i = \{x : k_i^L(x) \neq 0\}$.

Beweis. Wenn wir voraussetzen, daß $(M_0, \mathfrak{B}_{M_0})$ ein Standard-Borel-Raum ist, dann folgt Lemma 15 sofort aus den Überlegungen von § 7 und von [11], Theorem 8.2. und 10.1. Da wir die maßtheoretischen Sätze, die [11] zugrunde liegen, nicht benutzen wollen, geben wir einen direkten Beweis, der auch für allgemeine Borel-Räume gilt. Obwohl die Beweisidee naheliegend ist, ist der Beweis etwas umständlich. Wir geben daher nur eine Beweisskizze. Zu den im Beweis verwendeten Eigenschaften des Gruppenringes $L^2(G_0)$ der über G_0 bezüglich des invarianten Maßes β quadratisch integrierbaren Funktionen vgl. [6], § 39 und § 40.

a) Wir ordnen jedem $f \in L(G_0)$ das Operatorfeld $T_f(x)$ zu, das durch $(T_f(x)\, P^{\tilde{n}(x)} u, v) = \int f(\xi)\, (L_\xi(x)\, P^{\tilde{n}(x)} u, v)\, d\beta(\xi)$, $u, v \in \mathfrak{H}_0$, definiert wird, dabei ist $T_f(x)$ ein Operator in $\mathfrak{H}^{\tilde{n}(x)}$. $T(x)$ $(f \to T_f(x))$ ist eine *-Darstellung von $L^2(G_0)$ und $(T_f(x)\, P^{\tilde{n}(x)} u, v)$ ist $\mathfrak{B}_{M_0}$-meßbar, da $(L_\xi(x)\, P^{n(x)} u, v)$ $\mathfrak{B}_{M_0 \times G_0}$-meßbar ist. $L^2(G_0)$ ist direkte Summe von endlich oder abzählbar vielen zweiseitigen Idealen N_i, $i = 1, 2, \ldots$, die alle endlich-dimensional sind. ε_i seien die selbst-adjungierten Einheiten von N_i. Die ε_i gehören zum Zentrum von $L^2(G_0)$, sie annullieren sich gegenseitig, und es gilt $f = f\varepsilon_1 + f\varepsilon_2 + \cdots$ für alle $f \in L^2(G_0)$. Also ist $T_{\varepsilon_i}(x)$ eine Projektion, die mit allen $T_f(x)$ vertauschbar ist. Die Teilräume $\mathfrak{H}_i^x = T_{\varepsilon_i}(x)\, \mathfrak{H}^{\tilde{n}(x)}$ sind also paarweise orthogonal und spannen $\mathfrak{H}^{\tilde{n}(x)}$ auf. Die Beschränkung von $L(x)$ $(\xi \to L_\xi(x))$ auf $\mathfrak{H}_i^x$ ist eine Darstellung, die (nach geeigneter Umnummerierung) äquivalent zur $k_i^L(x)$-fachen Summe von $L^i(\xi \to L_\xi^i)$ ist. Da $(T_{\varepsilon_i}(x)\, P^{\tilde{n}(x)} u, v)$ $\mathfrak{B}_{M_0}$-meßbar ist, können wir die direkten Integrale $\int \mathfrak{H}_i^x\, d\tilde{\mu}$ und $\int \mathfrak{H}_i^x\, d\tilde{\mu} \times \nu$ bilden mit der Meßbarkeitsbasis $T_{\varepsilon_i}(x)\, P^{n(x)} e_j$, $j = 1, 2, \ldots$ (vgl. [13]), die wir als Teilräume von $(\tilde{\mu}, \tilde{n})$ bzw. $[\tilde{\mu}, \tilde{n}]$ betrachten können. Die Beschränkung des imprimitiven Systems auf $\int \mathfrak{H}_i^x\, d\tilde{\mu}_i \times \nu$ ist äquivalent zu einem imprimitiven System der Form $\{\tilde{\mu}_i, \tilde{L}^i(x)\}$, wobei $\tilde{L}^i(x)$ $(\xi \to \tilde{L}_\xi^i(x))$ äquivalent zur k_i^L-fachen direkten Summe von $L^i(\xi \to L_\xi^i)$ ist, dabei hat $\tilde{\mu}_i$ die in Lemma 15 behauptete Form.

b) Wir haben noch zu zeigen, daß $\{\tilde{\mu}_i, \tilde{L}^i(x)\}$ äquivalent zu $\{\tilde{\mu}_i, k_i^L\}_i$ ist. Dazu bilden wir die $T_f(x)$ für $\{\tilde{\mu}_i, \tilde{L}^i(x)\}$. Es ist $T_f(x) = 0$, falls f orthogonal zu N_i ist. In N_i gibt es endlich viele selbst-adjungierte idempotente Elemente $\varepsilon_1^i, \ldots, \varepsilon_{\varkappa_i}^i$, die paarweise orthogonal sind, mit $\sum_{j=1}^{\varkappa_i} \varepsilon_j^i = \varepsilon_i$. Die $I_j^i = L^2(G_0)\, \varepsilon_j^i$ sind paarweise orthogonale minimale Linksideale der Dimension $\varkappa_i$, die N_i aufspannen. Also sind die $T_{\varepsilon_j^i}(x)$ paarweise orthogonale Projektionen in $\mathfrak{H}^{\tilde{n}(x)}$ mit $\sum_{j=1}^{\varkappa_i} T_{\varepsilon_j^i}(x) = I(x) =$ identische Projektion in $\mathfrak{H}^{\tilde{n}(x)}$.

Wir setzen nun $S_1 = \{x : T_{\varepsilon_1^i}(x)\, P^{\tilde{n}(x)} e_1 \neq 0\}$ und $\mathfrak{H}_1^x = \{T_f(x)\, P^{\tilde{n}(x)} e_1 : f \in I_1^i\}$. Dann ist $S_1 = \{x : \mathfrak{H}_1^x \neq 0\}$. $P_1(x)$ sei die Projektion von $\mathfrak{H}^{\tilde{n}(x)}$ auf $\mathfrak{H}_1^x$. Da I_1^i

endlich-dimensional ist, wird $\mathfrak{H}_1^x$ von endlich vielen $T_{f_\nu}(x)\, P^{\tilde{n}(x)} e_1$ aufgespannt. Also ist $(P_1(x)\, P^{\tilde{n}(x)} u, v)$ $\mathfrak{B}_{M_0}$-meßbar für alle $u, v \in \mathfrak{H}_0$ (vgl. [12], S. 5 (5)). $\mathfrak{H}_1^x$ ist invariant für alle $T_f(x)$ mit $f \in L^2(G_0)$, also auch für $L^i(x)\,(\xi \to L^i_\xi(x))$. Beschränken wir das imprimitive System, wie in a), auf $\int \mathfrak{H}_1^x d(\tilde{\mu}_{i,1} \times \nu)$, so ist diese Beschränkung äquivalent zu $\{\tilde{\mu}_{i,1}, \tilde{L}^{i,1}\}$, wobei $\tilde{\mu}_{i,1} = \chi_{s_1} \tilde{\mu}_i$ ist und $L^{i,1}(x)\,(\xi \to L^{i,1}_\xi(x))$ äquivalent zu $L^i(\xi \to L^i_\xi)$ ist. Ferner ist $T_f(x) = 0$, gebildet für $\{\tilde{\mu}_{i,1}, \tilde{L}^{i,1}\}$, für alle f orthogonal zu I^i_1.

Wir setzen nun $e_1^2(x) = (P^{\tilde{n}(x)} - P_1(x))\, e_1$ und $s_2 = \{x : T_{e^i_2}(x)\, P^{\tilde{n}(x)} e_1^2(x) \neq 0\}$ und $\mathfrak{H}_2^x = \{T_f(x)\, P^{\tilde{n}(x)} e_1^2(x) : f \in I^i_2\}$. $\mathfrak{H}_1^x$ und $\mathfrak{H}_2^x$ sind orthogonal. Also ist $\int \mathfrak{H}_1^x d(\tilde{\mu}_{i,1} \times \nu)$ orthogonal zu $\int \mathfrak{H}_2^x d(\tilde{\mu}_{i,2} \times \nu)$. Wir bilden wie oben $\{\tilde{\mu}_{i,2}, \tilde{L}^{i,2}\}$. So fahren wir fort, bis nach höchstens $\varkappa_i$ Schritten e_1 „verbraucht" ist, und beginnen dann dasselbe Spiel mit $e_2^1(x) = (P^{n(x)} - (P_1(x) + \cdots + P_{\varkappa_i}(x))\, e_2)$ usw. Insgesamt erhalten wir dann: $\{\tilde{\mu}_i, L^i\}$ ist direkte Summe von endlich oder abzählbar vielen $\{\tilde{\mu}_{i,\nu}, \tilde{L}^{i,\nu}\}$ mit $\tilde{L}^{i,\nu}(x)\,(\xi \to L^{i,\nu}_\xi(x))$ äquivalent zu $L^i(\xi \to L^i_\xi)$, und $T_f(x)$ gebildet für $\{\tilde{\mu}_{i,\nu}, L^{i,\nu}\}$ ist 0 für f orthogonal zu einem bestimmten der Ideale I^i_j.

c) Wenn wir noch zeigen, daß $\{\tilde{\mu}_{i,\nu}, \tilde{L}^{i,\nu}\}$ äquivalent zu $\{\tilde{\mu}_{i,\nu}, 1\}_i$ ist, und die direkte Summe nach § 7 bilden, so ist bewiesen, daß $\{\tilde{\mu}_i, \tilde{L}^i\}$ äquivalent zu $\{\tilde{\mu}_i, k_i^L\}_i$ ist. Wir zeigen, daß $\{\tilde{\mu}_{i,\nu}, \tilde{L}^{i,\nu}\}$ äquivalent zu $\{\tilde{\mu}_{i,\nu}, \nu\}_i$ ist. Die Abbildung $\mathfrak{V}(x)\, f \to T_f(x)\, e_i (T_f(x)$ gebildet für $\{\tilde{\mu}_{i,\nu}, \tilde{L}^{i,\nu}\})$ liefert eine ein-eindeutige Abbildung eines minimalen Linksideals I^i_j auf den $\varkappa_i$-dimensionalen Darstellungsraum $\mathfrak{H}_0^{\varkappa_i}$ der $\tilde{L}^{i,\nu}(x)$. Diese Abbildung ist eine Äquivalenzabbildung von $\tilde{L}^{i,\nu}(x)$ auf eine feste Darstellung $\hat{L}^i(\xi \to \hat{L}^i_\xi)$, die zu $L^i(\xi \to L^i_\xi)$ äquivalent ist. Damit ist gezeigt, daß $\{\tilde{\mu}_{i,\nu}, \tilde{L}^{i,\nu}\}$ äquivalent zu $\{\tilde{\mu}_{i,\nu}, 1\}_i$ ist. Damit ist Lemma 15 bewiesen.

Satz 5: *Ist $(\mathfrak{H}, U, P)$ ein imprimitives System und G_0 eine kompakte Gruppe, so ist $(\mathfrak{H}, U, P)$ äquivalent zu einer direkten Summe der Form $\{\tilde{\mu}_1, k_1\}_1 \oplus \{\tilde{\mu}_2, k_2\}_2 \oplus \cdots$, dabei können einzelne Summanden fehlen. Zwei solche Summen sind dann und nur dann äquivalent, wenn in beiden Summen die gleichen Summanden fehlen und die anderen paarweise äquivalent sind. Zwei imprimitive Systeme $\{\tilde{\mu}_i, k_i\}_i$ und $\{\tilde{\mu}'_i, k'_i\}_i$ sind dann und nur dann äquivalent, wenn $\tilde{\mu}_i$ äquivalent zu $\tilde{\mu}'_i$ ist und $k_i(x) = k'_i(x)$ $\tilde{\mu}_i$-fast überall gilt.*

Beweis. Wir haben noch zu zeigen, daß für zwei äquivalente direkte Summen $\{\tilde{\mu}_1, k_1\}_1 \oplus \{\tilde{\mu}_2, k_2\}_2 \oplus \cdots$ und $\{\tilde{\mu}'_1, k'_1\}_1 \oplus \{\tilde{\mu}'_2, k'_2\}_2 \oplus \cdots$ die obige Behauptung richtig ist. Wir bilden die beiden direkten Summen nach § 7 und erhalten $\{\tilde{\mu}, L\}$ bzw. $\{\tilde{\mu}', L'\}$. Dabei ist $\tilde{\mu}$ äquivalent zu $\tilde{\mu}'$ und $L(x)$ äquivalent zu $L'(x)$ $\tilde{\mu}$-fast überall. Wären nun $\tilde{\mu}_i$ und $\tilde{\mu}'_i$ nicht äquivalent oder würde ein Summand mit Index i fehlen, ohne daß der andere fehlt, so gibt es stets eine Menge $E \in \mathfrak{B}_{M_0}$ mit $\tilde{\mu}_i(E) \neq 0$ und $\tilde{\mu}'_i(E) = 0$ oder umgekehrt. Dann wäre auch $\tilde{\mu}(E) \neq 0$, und auf E wären $L(x)$ und $L'(x)$ nicht äquivalent. Das ist ein Widerspruch. Wären $k_i(x)$ und $k'_i(x)$ nicht $\tilde{\mu}_i$-fast überall gleich, so gäbe es eine Menge $E \in \mathfrak{B}_{M_0}$ mit $\tilde{\mu}_i(E) \neq 0$ und $k_i(x) > k'_i(x)$ (oder umgekehrt) für alle $x \in E$. Dann wäre wieder $\tilde{\mu}(E) \neq 0$ und $L(x)$ enthält für alle $x \in E$ $L^i(\xi \to L^i_\xi)$ öfter als $L'(x)$, d. h. $L(x)$ und $L'(x)$ sind nicht äquivalent. Das ist ein Widerspruch.

III. Anwendungen

§ 9. *Semi-direkte Produkte*

Es seien G und T zwei separable, lokal-kompakte Gruppen. Ferner sei $g \to h_g$ ein Homomorphismus von G in die Gruppe der stetigen Automorphismen von T. $(t, g) \to h_g(t)$ sei eine stetige Abbildung von $T \times G$ auf T. Führen wir im topologischen Produkt $\mathfrak{G} = T \times G$ eine Multiplikation durch $(t, g)(t', g') = (t h_g(t'), g g')$ ein, so erhalten wir eine lokal-kompakte Gruppe. $\mathfrak{G}$ heißt semidirektes Produkt von T und G.

Im folgenden sei T stets abelsch und $\hat{T}$ sei die duale Gruppe von T. Ist $\tau \in \hat{T}$, so ist τg mit $(\tau g)(t) = \tau(h_g(t))$ ebenfalls aus $\hat{T}$. Man beweist leicht, daß $\tau, g \to \tau g$ eine stetige Abbildung von $\hat{T} \times G$ auf $\hat{T}$ ist, die (1) erfüllt, wenn man M durch $\hat{T}$ und $\mathfrak{B}_M$ durch den σ-Körper $\mathfrak{B}_{\hat{T}}$ der Borelmengen von $\hat{T}$ ersetzt.

$U((t, g) \to U_{(t,g)})$ sei eine stark stetige, unitäre Darstellung von $\mathfrak{G}$ mit dem Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ als Darstellungsraum. $W(g \to W_g)$ bzw. $V(t \to V_t)$ sei die Darstellung von G bzw. T mit $W_g = U_{(e,g)}$ bzw. $V_t = U_{(t,e)}$. Dann ist

$$U_{(t,g)} = V_t W_g \,. \tag{29}$$

Da T abelsch ist, gibt es genau ein Spektralmaß $(\mathfrak{H}, P)$ über $\mathfrak{B}_{\hat{T}}$ mit

$$(V_t u, v) = \int \tau(t)\, d(Pu, v) \quad \text{für alle } u, v \in \mathfrak{H} \,. \tag{30}$$

Man rechnet leicht nach, daß $(\mathfrak{H}, W, P)$ ein imprimitives System von G mit der Basis $\hat{T}$ ist. Der Beweis von (2) 4. verläuft z. B. folgendermaßen: $t \to V_{h_g(t)}$ ist eine Darstellung von G. Also gibt es ein eindeutig bestimmtes Spektralmaß P' mit $(V_{h_g(t)} u, v) = \int \tau(t)\, d(P' u, v)$. Wegen $W_g V_t W_{g^{-1}} = V_{h_g(t)}$ gilt $(V_{h_g(t)} u, v) = \int \tau(t)\, d(W_g P W_{g^{-1}} u, v)$. Also ist $P'_E = W_g P_E W_{g^{-1}}$. Andererseits gilt $(V_{h_g(t)} u, v) = \int \tau(h_g(t))\, d(Pu, v) = \int (\tau g)(t)\, d(Pu, v) = \int \tau(t)\, d(P'' u, v)$, falls $P''_E = P_{Eg^{-1}}$ gesetzt wird. Also ist $P''_E = P'_E$ und daher $W_g P_E W_{g^{-1}} = P_{Eg^{-1}}$.

Ist umgekehrt $(\mathfrak{H}, W, P)$ ein imprimitives System von G mit der Basis $\hat{T}$, so liefert (30) eine Darstellung $V(t \to V_t)$ von T und (29) dann eine Darstellung von $\mathfrak{G}$. Man erhält so eine ein-eindeutige Zuordnung zwischen den Darstellungen von $\mathfrak{G}$ und den imprimitiven Systemen von G mit der Basis $\hat{T}$.

Man verifiziert leicht, daß äquivalenten Systemen äquivalente Darstellungen entsprechen, und daß einer direkten Summe von imprimitiven Systemen eine direkte Summe von Darstellungen entspricht. Insbesondere entsprechen irreduzible imprimitive Systeme irreduziblen Darstellungen. Eine Übersicht über die Darstellungen von $\mathfrak{G}$ erhält man also, wenn man eine Übersicht über die imprimitiven Systeme von G mit der Basis $\hat{T}$ angeben kann.

§ 10. *Die Darstellungen der Überlagerungsgruppe der inhomogenen Bewegungsgruppe des R_3*

R_3 sei der 3-dimensionale euklidische Raum, d. h. die Menge aller reellen Vektoren $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit der üblichen euklidischen Metrik. T sei die Menge der

Translationen des R_3. Wir können $T = R_3$ setzen, wenn wir $\mathfrak{a} \in R_3$ die Translation $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x} + \mathfrak{a}$ zuordnen. G' sei die Menge der orthogonalen 3-reihigen Matrizen mit Determinante 1. Zu $\tilde{A} \in G'$ gehört also die eigentliche Drehung $\mathfrak{x} \to \tilde{A}\mathfrak{x}$. G sei die Gruppe der 2-reihigen unitären Matrizen mit Determinante 1. G ist die Menge aller Matrizen der Form $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. G ist die universelle Überlagerungsgruppe von G'. Als Überlagerungshomomorphismus $A \to \tilde{A}$ wählen wir

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2 + \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2), & \frac{i}{2}(-\alpha^2 - \beta^2 + \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2), & -\alpha\beta - \bar{\alpha}\bar{\beta} \\ \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2 - \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2), & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2), & i(-\alpha\beta + \bar{\alpha}\bar{\beta}) \\ \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha}, & i(\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}), & \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} \end{pmatrix}$$

Jedem $A \in G$ ordnen wir den Automorphismus $\mathfrak{a} \to \tilde{A}\mathfrak{a}$ von T zu. $\mathfrak{G}$ sei dann das semi-direkte Produkt von T und G mit $(\mathfrak{a}, A)(\mathfrak{b}, B) = (\mathfrak{a} + \tilde{A}\mathfrak{b}, AB)$.

$\hat{T}$ sei die duale Gruppe von T. Es ist $\hat{T} = R_3$ und zu $\mathfrak{x} \in \hat{T}$ gehört der Charakter $\mathfrak{a} \to e^{i(\mathfrak{a};\mathfrak{x})}$, wobei $(\mathfrak{a};\mathfrak{x})$ das Skalarprodukt in R_3 bezeichnet. Ist $A \in G$ und $\mathfrak{x} \in \hat{T}$, so gehört zu $\mathfrak{x}A$ der Charakter $\mathfrak{a} \to e^{i(\tilde{A}\mathfrak{a};\mathfrak{x})} = e^{i(\mathfrak{a};\tilde{A}^{-1}\mathfrak{x})}$, also gilt $\mathfrak{x}A = \tilde{A}^{-1}\mathfrak{x}$. Die Bahnen von $\mathfrak{x}$, $A \to \mathfrak{x}A$ sind also die Sphären $S_r = \{\mathfrak{x} : |\mathfrak{x}| = r\}$ $(r \geqq 0)$. Wir zerlegen die Basis $\hat{T}$ in $Z_0 = \{0\}$ und $Z_1 = \{\mathfrak{x} : |\mathfrak{x}| > 0\}$. Nach Lemma 4 erhalten wir eine Zerlegung der imprimitiven Systeme in eine direkte Summe und damit eine entsprechende Zerlegung der Darstellungen von $\mathfrak{G}$.

Die Darstellungen, die zu Z_0 gehören, erhält man ohne weiteres, wenn man beachtet, daß $V_t = I$ für jedes $t \in T$ gilt, da $e^{i(\mathfrak{a};0)} = 1$ ist. Diese Darstellungen sind also Darstellungen von G. Da G eine kompakte Gruppe ist, ist jede Darstellung direkte Summe irreduzibler Darstellungen von G. Die irreduziblen Darstellungen von G bezeichnen wir mit $D_0, D_1, D_2, \ldots$, dabei sei D_k die Darstellung vom Gewicht k.

Bleibt noch der Fall der Darstellungen, die zu Z_1 gehören. Wir können in diesem Falle Z_1 als Basis wählen. Da man Z_1 als Produkt $R^+ \times S_1$ mit $R^+ = \{r : r = \text{reell und } r > 0\}$ betrachten kann, indem man $\mathfrak{x} = (|\mathfrak{x}|, \mathfrak{x}/|\mathfrak{x}|)$ setzt, können wir auf diese imprimitiven Systeme die Ergebnisse von II. anwenden. Ein quasi-invariantes Maß auf S_1 ist das invariante Oberflächenmaß o. Dann ist $\lambda(\mathfrak{x}, A) \equiv 1$ (vgl. (9)). Es sei $\mathfrak{e}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $G_0 = \{A : \mathfrak{e}_0 A = \mathfrak{e}_0\}$. Es ist $G_0 = \{A_z(\varphi) : \varphi = \text{reelle Zahl}\}$, wobei $A_z(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}$ ist. Wegen $A_z(\varphi + \varphi') = A_z(\varphi) + A_z(\varphi')$ ist diese Gruppe isomorph zur additiven Gruppe der reellen Zahlen modulo 4π. Da $\Psi(G_0 A) = \tilde{A}^{-1}\mathfrak{e}_0$ eine Homöomorphie von G/G_0 auf S_1 ist, können wir G/G_0 mit S_1 identifizieren. Die kanonische Abbildung h von G auf $G/G_0 = S_1$ ist dann $h(A) = \tilde{A}^{-1}\mathfrak{e}_0$. Die irreduziblen Darstellungen von G_0 sind die eindimensionalen Darstellungen L^k mit $A_z(\varphi) = e^{ik\varphi}$, $k = 0, \pm 1/2, \pm 1, \ldots$. Also ist jedes imprimitive System mit der Basis Z_1 direkte Summe von imprimitiven Systemen der Form $\{\tilde{\mu}_k, \tilde{v}_k\}_k$, $k = 0, \pm 1/2, \pm 1, \ldots$, und die einzelnen Summanden sind, soweit sie nicht fehlen, bis auf Äquivalenz bestimmt. Damit haben wir eine vollständige Übersicht über die Äquivalenzklassen der

Darstellungen von $\mathfrak{G}$ erhalten. Die zu den imprimitiven Systemen $\{\tilde{\mu}, \tilde{v}\}_k$ gehörigen Darstellungen von $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir ebenfalls mit $\{\tilde{\mu}, \tilde{v}\}_k$.

Um nach (15) die Darstellungen der Form $\{\tilde{\mu}, \tilde{v}\}_k$ explizit angeben zu können, benötigen wir noch eine Borelmenge C von G, die mit jeder Rechtsnebenklasse von G/G_0 genau ein Element gemeinsam hat. C können wir z. B. folgendermaßen wählen: Es sei $A_y(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta/2, & -\sin\vartheta/2 \\ \sin\vartheta/2, & \cos\vartheta/2 \end{pmatrix}$. Jedem $\mathfrak{e} \in S_1$ ordnen wir ein $C(\mathfrak{e}) \in G$ folgendermaßen zu: $C(\mathfrak{e}) = A_z(\varphi)\, A_y(-\vartheta)\, A_z(-\varphi)$ für $\mathfrak{e} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$ mit $0 \leqq \vartheta < \pi$ und $C(\mathfrak{e}) = A_y(\pi)^{-1}$, für $\mathfrak{e} = -\mathfrak{e}_0$. $C(\mathfrak{e})$ hängt für $\mathfrak{e} \neq -\mathfrak{e}_0$ von φ nur modulo 2π ab. Wir können dann für C die Menge $\{C(\mathfrak{e}) : \mathfrak{e} \in S_1\}$ wählen. Im folgenden halten wir dieses C fest. Es ist $\mathfrak{e}_0 C(\mathfrak{e}) = \tilde{C}(\mathfrak{e})^{-1}\mathfrak{e}_0 = \mathfrak{e}$, also ist $h_1(C(\mathfrak{e})) = h(C(\mathfrak{e})) = \mathfrak{e}$. Nach (15) erhält man dann

$$\xi(\mathfrak{e}, A) = C(\mathfrak{e})\, A(C(\tilde{A}^{-1}\mathfrak{e}))^{-1}. \tag{31}$$

Da $\xi(\mathfrak{e}, A) \in G_0$ ist, gilt $\xi(\mathfrak{e}, A) = A_z(\varphi(\mathfrak{e}, A))$. Dadurch ist $\varphi(\mathfrak{e}, A)$ modulo 4π bestimmt. Die Darstellung $\{\tilde{\mu}, v\}_k$ von $\mathfrak{G}$ hat den Darstellungsraum $[\tilde{\mu}, \tilde{v}]$ und es gilt

$$\begin{cases} (V_a f)(\mathfrak{x}) = e^{i(a;\mathfrak{x})} f(\mathfrak{x}), \\ (W_A f)(\mathfrak{x}) = e^{ik\varphi(\mathfrak{x}, A)} f(\tilde{A}^{-1}\mathfrak{x}), \end{cases} \tag{32}$$

mit $\varphi(\mathfrak{x}, A) = \varphi\left(\frac{\mathfrak{x}}{|\mathfrak{x}|}, A\right)$. Aus Satz 4 folgt noch, daß neben den irreduziblen Darstellungen von G noch die Darstellungen $\{\delta_r, 1\}_k$ irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{G}$ ergeben.

Ganz entsprechend kann man die Fälle $n > 3$ behandeln.

§ 11. Berechnung des Kroneckerproduktes irreduzibler Darstellungen von $\mathfrak{G}$

Wir benutzen nun die Ergebnisse von § 6, um die Normalformen der Kroneckerprodukte von irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{G}$ zu berechnen. Bekanntlich gilt $D_k \otimes D_{k'} = D_{|k-k'|} \oplus D_{|k-k'|+1} \oplus \cdots \oplus D_{k+k'}$. Ferner gilt

$$\{\delta_{r_0}, 1\}_k \otimes D_{k'} = \{\delta_{r_0}, 1\}_{k-k'} \oplus \{\delta_{r_0}, 1\}_{k-k'+1} \oplus \cdots \oplus \{\delta_{r_0'}, 1\}_{k+k'} \quad \text{und} \tag{33}$$

$$\{\delta_{r_1}, 1\}_{k_1} \otimes \{\delta_{r_2}, l\}_{k_2} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \{L_{(|r_1-r_2|, r_1+r_2)}, 1\}_{k+\varepsilon}, \tag{34}$$

dabei ist $L_{(|r_1-r_2|, r_1+r_2)}$ das Lebesguesche Maß über dem offenen Intervall $(|r_1 - r_2|, r_1 + r_2)$ und $\varepsilon = 0$ oder $1/2$, je nachdem $k_1 + k_2 = 0$ oder $= 1/2$ modulo 1 ist.

Beweis von (33). Als Darstellungsraum von $D_{k'}(A \to U_A)$ wählen wir $C_{2k'+1} = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2k'+1} \end{pmatrix} : x_i = \text{komplexe Zahl}\right\}$. U_A können wir dann als Matrix

betrachten. Insbesondere können wir annehmen, daß $U_{A_z(\psi)} =$ die Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} e^{-ik'\psi} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{ik'\psi} \end{pmatrix}$ ist. Als Darstellungsraum für $\{\delta_{r_0}, l\}_k \otimes D_{k'}$ können wir den Raum aller Vektorfunktionen $\begin{pmatrix} \alpha_1(\mathfrak{x}) \\ \vdots \\ \alpha_{2k'+1}(\mathfrak{x}) \end{pmatrix}$ über S_r mit $\int \sum_{i=1}^{2k'+1} |\alpha_i(\mathfrak{x})|^2 do < \infty$ wählen. Das ist der Raum $[\delta_{r_0}, 2k'+1]$.

Es gilt dann für die Darstellung (34)

$$(V_a f)(\mathfrak{x}) = e^{i(a;\mathfrak{x})} f(\mathfrak{x}) \text{ und } (W_A f)(\mathfrak{x}) = e^{ik\varphi(\mathfrak{x},A)} U_A f(\mathfrak{x}A).$$

Das imprimitive System $([\delta_{r_0}, 2k'+1], W)$ behandeln wir nun nach § 6. Für Q_A (vgl. (17)) erhalten wir dann $(Q_A f)(\mathfrak{x}) = e^{ik\varphi(\mathfrak{x},A)} U_A f(\mathfrak{x}A)$. Also können wir (vgl. (17)) $Q_A(\mathfrak{x}) = e^{ik\varphi(\mathfrak{x},A)} U_A$ setzen. Dann gilt (vgl. (19)) $Q_{A_1 A_2}(\mathfrak{x}) = Q_{A_1}(\mathfrak{x})\, Q_{A_2}(\mathfrak{x}A_1)$ für alle $\mathfrak{x} \in S_{r_0}$ und $A_1, A_2 \in G$. Da $(Q_A(\mathfrak{x})\, e_i, e_j) = e^{ik\varphi(\mathfrak{x},A)}(U_A e_i, e_j)$ $\mathfrak{B}_{G \times S_{r_0}}$-meßbar ist (vgl. Bem. nach Satz 2), können wir $\overline{Q}(\mathfrak{x}, A) = Q_A(\mathfrak{x})$ setzen. (20) 3. und (19) gilt dann überall und nicht nur fast überall. Da (20) 3. überall gilt und nicht nur fast überall, gelten auch die übrigen Formeln von § 6 nicht nur fast überall, sondern überall. Also ist $L_{A_z(\psi)}(r_0) = \overline{Q}_A(r_0\mathfrak{e}_0) = e^{ik\varphi(\mathfrak{e}_0, A_z(\psi))} U_{A_z(\psi)}$ ein zum imprimitiven System $([\delta_{r_0}, 2k'+l], W)$ gehöriges Darstellungsfeld (es kommt nur auf $r = r_0$ an). Aus (31) folgt ohne weiteres $\varphi(\mathfrak{e}_0, A_z(\psi)) = \psi$, also ist $L_{A_z(\psi)}(r_0) = e^{ik\psi} \cdot \begin{pmatrix} e^{-ik'\psi} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{ik'\psi} \end{pmatrix}$, d. h. $L(r_0) = L^{k-k'} \oplus \cdots \oplus L^{k+k'}$. Damit ist (33) bewiesen.

Beweis von (34). Als Darstellungsraum der Darstellung $\{\delta_{r_1}, 1\}_{k_1} \otimes \{\delta_{r_2}, 1\}_{k_2}$ wählen wir die Menge $L_0^2(S_{r_1} \times S_{r_2})$ der über $S_{r_1} \times S_{r_2}$ bezüglich o quadratisch integrierbarer Funktionen; dabei ist o das Produktmaß aus den Oberflächenmaßen o_1 und o_2 von S_{r_1} bzw. S_{r_2} mit $o_1(S_{r_1}) = o_2(S_{r_2}) = 1$. Die Darstellung $\{\delta_{r_1}, l\}_{k_1} \otimes \{\delta_{r_2}, l\}_{k_2}$ hat dann die Form

$$\text{(35)} \qquad \begin{cases} (V_a f)(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = e^{i(a;\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x}_2)} f(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)\,, \\ (W_A f)(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = e^{i(k_1\varphi(\mathfrak{x}_1,A) + k_2\varphi(\mathfrak{x}_2,A))} f(\mathfrak{x}_1 A, \mathfrak{x}_2 A)\,. \end{cases}$$

Die Abbildung $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2), A \to (\mathfrak{x}_1 A, \mathfrak{x}_2 A)$ ist eine stetige Abbildung von $S_{r_1} \times S_{r_2} \times G$ auf $S_{r_1} \times S_{r_2}$. Die Bahnen dieser Abbildungen sind die Mengen $B_r = \{(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) : |\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2| = r\}$ mit $|r_1 - r_2| \leq r \leq r_1 + r_2$. Da $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) \to |\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2|$ eine stetige Abbildung von $S_{r_1} \times S_{r_2}$ auf das Intervall $[|r_1 - r_2|, r_1 + r_2]$ ist, ist $S_{r_1} \times S_{r_2}$ eine reguläre Basis. $B_{|r_1 - r_2|}$ und $B_{r_1+r_2}$ sind offensichtlich o-Nullmengen. Also können wir $S_{r_1} \times S_{r_2}$ durch $S = S_{r_1} \times S_{r_2} - B_{|r_1 - r_2|} \cup B_{|r_1 + r_2|}$ ersetzen, und $L_o^2(S)$ an Stelle von $L_o^2(S_{r_1} \times S_{r_2})$ als Darstellungsraum verwenden. (35) bleibt dabei gültig.

Wir zerlegen nun o nach (6), so daß $o(E) = \int \mu_r'(E \cap B_r)\, d\tilde{\mu}'$ für alle $E \in \mathfrak{B}_S$ gilt. Eine einfache Rechnung ergibt, daß $\tilde{\mu}'$ das Maß über den offenen Intervall $(|r_1 - r_2|, r_1 + r_2)$ mit $d\tilde{\mu}' = \frac{1}{2r_1 r_2}\, \varrho\, d\varrho$ ist. Ferner sind die μ_r' $\tilde{\mu}'$-fast überall quasi-invariant (vgl. Bem. nach (6)) und $\mu_r'(B_r) = 1$ $\tilde{\mu}'$-fast überall.

Es sei nun $\bar{S} = (|r_1 - r_2|, r_1 + r_2) \times S^2 \times S^1$, wobei S^2 bzw. S^1 die Einheitssphäre in R_3 bzw. R_2 ist. T sei die Abbildung von S auf $\bar{S}$ mit $T(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = (r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y})$ und $r = |\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2|$, $\mathfrak{e} = \frac{\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2}{|\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2|}$, $\mathfrak{y} = \frac{P_0 \tilde{C}(\mathfrak{e}) \mathfrak{x}_1}{|P_0 \tilde{C}(\mathfrak{e}) \mathfrak{x}_1|}$, dabei ist P_0 die Projektion des R_3 auf den Teilraum mit $x_3 = 0$, den wir als R_2 betrachten. Man rechnet leicht nach, daß T eine ein-eindeutige Abbildung von S auf $\bar{S}$ ist, und daß T das System der Borel-Mengen von S ein-eindeutig auf das System der Borel-Mengen von $\bar{S}$ abbildet. Übertragen wir mit Hilfe von T die Transformationen $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) \to (\mathfrak{x}_1 A, \mathfrak{x}_2 A)$ auf $\bar{S}$, so erhalten wir nach einfacher Rechnung die Transformation $(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}) \to (r, \mathfrak{e}A, \mathfrak{y}\xi(\mathfrak{e}, A))$. Wir setzen daher $(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}) A = (r, \mathfrak{e}A, \mathfrak{y}\xi(\mathfrak{e}, A))$. (Zur Definition von $\xi(\mathfrak{e}, A)$ vgl. (31).)

Wir übertragen mit T auch das Maß o auf $\bar{S}$ und erhalten das Maß μ mit $\mu(E) = o(T^{-1}(E))$. $L^2_\mu(\bar{S})$ sei die Menge der bezüglich μ über $\bar{S}$ quadratisch integrierbaren Funktionen. U_T mit $(U_T f)(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}) = f(T^{-1}(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}))$ ist dann eine unitäre Abbildung von $L^2_0(S)$ auf $L^2_\mu(\bar{S})$. Mit Hilfe von U_T übertragen wir die Darstellung (35) auf $L^2_\mu(\bar{S})$ und erhalten die Darstellung $\{U, L^2_\mu(\bar{S})\}$ mit $U_{(a,A)} = V_a W_A$ und

$$(36)\qquad \begin{cases} (V_a f)(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}) = e^{i(a; r\mathfrak{e})} f(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}), \\ (W_A f)(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}) = e^{i\bar{\varphi}(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}, A)} f((r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}) A) \text{ mit} \end{cases}$$

$\bar{\varphi}(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}, A) = k_1 \varphi(\mathfrak{x}_1, A) + k_2 \varphi(\mathfrak{x}_2, A)$, wobei $T(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = (r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y})$. $e^{i\bar{\varphi}(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}, A)}$ ist $\mathfrak{B}_{\bar{S} \times G}$-meßbar, da $e^{i(k_1 \varphi(\mathfrak{e}_1, A) + k_2 \varphi(\mathfrak{e}_2, A))}$ $\mathfrak{B}_{S \times G}$-meßbar ist.

Wir betrachten auf $\bar{S}$ das Maß $\mu_1 = \tilde{\mu}_1 \times o^2 \times o^1$, dabei sei $d\tilde{\mu}_1 = \frac{1}{2r_1 r_2}\, r\, dr$ und o^2 bzw. o^1 das Oberflächenmaß von S^2 bzw. S^1 mit $o^1(S^1) = o^2(S^2) = 1$. Wir übertragen μ_1 durch T^{-1} auf S und erhalten ein Maß o'', das ebenfalls invariant gegenüber den Transformationen $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) \to (\mathfrak{x}_1 A, \mathfrak{x}_2 A)$ ist, da μ_1 invariant gegenüber $(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}) \to (r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}) A$ ist. Wir können o'' nach (6) zerlegen in $o''(E) = \int \mu_r''(E \cap B_r)\, d\tilde{\mu}''$. Einfache Rechnungen zeigen, daß $\tilde{\mu}'' = \tilde{\mu}'$ ist, und daß $\mu_r''(E \cap B_r) = o^2 \times o^1(T(E \cap B_r))$ gewählt werden kann. μ_r' und μ_r'' sind $\tilde{\mu}'$-fast überall äquivalent, da sie quasi-invariant sind. Also ist o äquivalent zu o'', und damit auch μ äquivalent zu μ_1. Es sei nun $\mu_2 = L \times o^2 \times o^1$, wobei L das Lebesguesche Maß über $(|r_1 + r_2|, r_1 + r_2)$ ist. Da μ_2 zu μ_1 äquivalent ist, ist μ äquivalent zu μ_2, und beide Maße sind invariant gegenüber den Transformationen $(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}) \to (r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}) A$.

Es sei $\sigma(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y})$ die Radon-Nikodym-Ableitung von μ bezüglich μ_2. Wir können annehmen, daß $\sigma(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}) > 0$ für alle $(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}) \in \bar{S}$ ist. Die Abbildung U mit $(Uf)(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}) = \sqrt{\sigma(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y})}\, f(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y})$ von $L^2_\mu(\bar{S})$ auf $L^2_{\mu_2}(\bar{S})$ ist eine unitäre Abbildung. Mit U übertragen wir die Darstellung (36) auf $L^2_{\mu_2}(\bar{S})$. Die Bezeichnungen V_a und W_A behalten wir bei. Für V_a gilt offensichtlich wieder (36). Für W_A erhalten wir $(W_A f)(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}) = \sqrt{\frac{\sigma(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y})}{\sigma((r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}) A)}}\, e^{i\bar{\varphi}(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}, A)} f((r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}) A)$.

Aus der Invarianz von μ und μ_2 folgt ohne weiteres, daß $\sigma(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}) = \sigma((r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}) A)$ μ_2-fast überall gilt. Also gilt auch (36) für W_A, da es auf μ_2-Nullmengen nicht ankommt. Das Kroneckerprodukt ist also äquivalent zur Darstellung (36) über $L^2_{\mu_2}(\bar{S})$.

$\mathfrak{H}_0$ sei der Hilbert-Raum $L_0^2(S^1)$ aller über S^1 bezüglich o^1 quadratisch integrierbarer Funktionen $e(\mathfrak{y})$ mit der orthonormierten Basis $e_0, e_1, \ldots$; für $\mathfrak{y} = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \\ 0 \end{pmatrix}$ sei dabei $e_n(\mathfrak{y}) = e^{i l_n \psi}$ mit $l_0 = 0, l_1 = 1, l_2 = -1, \ldots$. Wir bilden das direkte Integral $(L \times o^2, \infty) = [L, \infty]$ mit $\mathfrak{H}_0$ und dieser Basis. Dann ist U_0 mit $U_0 f = g$ und $g(r, \mathfrak{e})(\mathfrak{y}) = f(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y})$, falls $\int |f(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y})|^2 do^1 < \infty$, und $g(r, \mathfrak{e}) = 0$ sonst, eine unitäre Abbildung von $L^2_{\mu_2}(\bar{S})$ auf $[L, \infty]$. Mit U_0 übertragen wir die Darstellung (36) auf $[L, \infty]$ und erhalten

$$(37)\qquad \begin{cases} (V_{\mathfrak{a}} g)(r, \mathfrak{e}) = e^{i(\mathfrak{a};\, r\mathfrak{e})}, \\ (W_A g)(r, \mathfrak{e}) = Q_A(r, \mathfrak{e})\, g(r, \mathfrak{e}A), \end{cases}$$

dabei ist $(Q_A(r, \mathfrak{e})\, e)(\mathfrak{y}) = e^{i\bar{\psi}(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}, A)} e(\mathfrak{y}\xi(\mathfrak{e}, A))$. Damit ist gezeigt, daß das Kroneckerprodukt äquivalent zu einer Darstellung ist, zu der das imprimitive System $([L, \infty], W)$ gehört.

Man rechnet leicht nach, daß $(Q_A(r, \mathfrak{e})\, e_n)(\mathfrak{y}) = e^{i\bar{\psi}(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}, A)} e^{-i l_n \varphi(\mathfrak{e}, A)} e_n(\mathfrak{y})$ ist. Also ist $(Q_A(r, \mathfrak{e})\, e_n, e_{n'})$ $\mathfrak{B}_{G \times I \times S^2}$-meßbar, wobei $I = (|r_1 - r_2|, r_1 + r_2)$ ist. Zum imprimitiven System $([L, \infty], W)$ suchen wir nach § 6 ein zugehöriges Darstellungsfeld. Es gilt (vgl. (17)) $(Q_A g)(r, \mathfrak{e}) = Q_A(r, \mathfrak{e})\, g(r, \mathfrak{e})$. Auf Grund der Definition von $Q_A(r, \mathfrak{e})$ gilt $Q_{A_1 A_2}(r, \mathfrak{e}) = Q_{A_1}(r, \mathfrak{e})\, Q_{A_2}(r, \mathfrak{e}A_1)$ überall und nicht nur fast überall (vgl. (19)). Da $(Q_A(r, \mathfrak{e})\, e_n, e_{n'})$ $\mathfrak{B}_{G \times I \times S^2}$-meßbar ist, können wir $\bar{Q}(r, \mathfrak{e}, A) = Q_A(r, \mathfrak{e})$ setzen (vgl. (20)) und (20) 3. gilt überall. In § 6 gelten dann auch die folgenden Formeln überall und nicht nur fast überall. Also ist (vgl. (25)) $L_{A_z(\psi)}(r) = Q_{A_z(\psi)}(r, \mathfrak{e}_0)$ ein zu $([L, \infty], W)$ gehöriges Darstellungsfeld. Es ist aber $Q_{A_z(\varphi)}(r, \mathfrak{e}_0)\, e_n(\mathfrak{y}) = e^{i\bar{\psi}(r, \mathfrak{e}_0, \mathfrak{y}, A_z(\psi))} e^{-i l_n \varphi(\mathfrak{e}_0, A_z(\psi))} e_n(\mathfrak{y})$ und $e^{i\bar{\psi}(r, \mathfrak{e}_0, \mathfrak{y}, A_z(\psi))} = e^{i(k_1 \varphi(\mathfrak{x}_1(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}), A_z(\psi)) + k_2 \varphi(\mathfrak{x}_2(r, \mathfrak{e}_0, \mathfrak{y}), A_z(\psi))}$ mit $(\mathfrak{x}_1(r, \mathfrak{e}_0, \mathfrak{y}), \mathfrak{x}_2(r, \mathfrak{e}_0, \mathfrak{y})) = T^{-1}(r, \mathfrak{e}_0, \mathfrak{y})$. Ferner ist $\mathfrak{x}_1(r, \mathfrak{e}_0, \mathfrak{y}) \neq -\lambda_1 \mathfrak{e}_0$ und $\mathfrak{x}_2(r, \mathfrak{e}_0, \mathfrak{y}) \neq -\lambda_2 \mathfrak{e}_0$ für $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$, da sonst $\mathfrak{x}_1(r, \mathfrak{e}_0, \mathfrak{y})$ linear abhängig von $\mathfrak{x}_2(r, \mathfrak{e}_0, \mathfrak{y})$ wäre, d. h. $(\mathfrak{x}_1(r, \mathfrak{e}_0, \mathfrak{y}), \mathfrak{x}_2(r, \mathfrak{e}_0, \mathfrak{y}))$ wäre nicht in S. Aus (31) folgt aber, daß $\varphi(\mathfrak{x}, A_z(\psi)) = \psi$ für alle $\mathfrak{x} \neq -r\mathfrak{e}_0$ gilt. Also gilt $e^{i\bar{\psi}(r, \mathfrak{e}_0, \mathfrak{y}, A_z(\psi))} = e^{i(k_1 \psi + k_2 \psi)}$ und $e^{-i l_n \varphi(\mathfrak{e}_0, A_z(\psi))} = e^{-i l_n \psi}$, d. h. es gilt $(L_{A_z(\psi)}(r)\, e_n)(\mathfrak{y}) = e^{i(k_1 + k_2 - l_n)\psi} e_n(\mathfrak{y})$. Also ist $L_{A_z(\psi)}(r) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} L^{k_1 + k_2 - k}_{A_z(\psi)}(r)$. Damit ist (34) bewiesen.

Für $n \geqq 4$ kann man ganz entsprechend vorgehen. An die Stelle der e_n treten dann Kugelfunktionen. Wir behandeln einen analogen Fall bei der Lorentzgruppe.

§ 12. *Die Darstellungen der universellen Überlagerungsgruppe der inhomogenen Lorentzgruppe*

Die homogene Lorentzgruppe G' ist die Gruppe aller reellen 4×4-Matrizen $\tilde{A}$, für die gilt: 1. $\tilde{A}' F \tilde{A} = F$, 2. $\det A = 1$ und 3. $a_{4,4} > 0$, dabei ist $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $\tilde{A}'$ die transponierte Matrix von $\tilde{A}$. Ist $\mathfrak{x} \in R_4$ und $\mathfrak{y} \in R_4$, so setzen wir $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\} = -x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 + x_4 y_4$. G sei die Gruppe aller komplexen 2×2-

Matrizen A mit $\det A = 1$. G ist die universelle Überlagerungsgruppe von G'. Als Überlagerungshomomorphismus $A \to \tilde{A}$ wählen wir

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\bar\alpha\delta+\bar\beta\gamma), & \mathrm{Im}(\alpha\bar\delta-\beta\bar\gamma), & \mathrm{Re}(\gamma\alpha-\delta\bar\beta), & \mathrm{Re}(\gamma\bar\alpha+\delta\bar\beta)\\ \mathrm{Im}(\bar\alpha\delta+\bar\beta\gamma), & \mathrm{Re}(\alpha\bar\delta-\beta\bar\gamma), & \mathrm{Im}(\gamma\bar\alpha-\delta\bar\beta), & \mathrm{Im}(\gamma\bar\alpha+\delta\bar\beta)\\ \mathrm{Re}(\bar\alpha\beta-\bar\gamma\delta), & \mathrm{Im}(\alpha\bar\beta-\gamma\delta), & \frac{1}{2}(|\alpha|^2-|\beta|^2-|\gamma|^2+|\delta|^2), & \frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2-|\gamma|^2-|\delta|^2)\\ \mathrm{Re}(^{-}\beta+\bar\gamma\delta), & \mathrm{Im}(\alpha\bar\beta+\gamma\delta), & \frac{1}{2}(|\alpha|^2-|\beta|^2+|\gamma|^2-|\delta|^2), & \frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2+|\delta|^2) \end{pmatrix}$$

Es sei T die Translationsgruppe des R_4. Wir können $T = R_4$ wählen, wenn wir dem Vektor $\mathfrak{a}$ die Translation $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x} + \mathfrak{a}$ zuordnen. $\mathfrak{S}$ sei das semi-direkte Produkt von G und T mit $(\mathfrak{a}, A)\,(\mathfrak{b}, B) = (\mathfrak{a} + \tilde{A}\mathfrak{b}, A B)$. Als duale Gruppe $\hat{T}$ von T können wir wieder R_4 wählen, wenn wir jedem $\mathfrak{x} \in R_4$ den Charakter $\mathfrak{a} \to e^{i\{\mathfrak{x},\mathfrak{a}\}}$ zuordnen. Wir erhalten dann (vgl. § 9) $\mathfrak{x}, A \to \mathfrak{x}A = \tilde{A}^{-1}\mathfrak{x}$. Nach § 9 genügt es, alle imprimitiven Systeme von G mit der Basis $\hat{T}$ anzugeben, um alle unitären Darstellungen von $\mathfrak{S}$ zu kennen. Zum imprimitiven System $(\mathfrak{H}, W, P)$ gehört die Darstellung $(\mathfrak{a}, A) \to U_{(\mathfrak{a}, A)} = V_\mathfrak{a} W_A$, wobei $W(A \to W_A)$ die Darstellung von G aus dem imprimitiven System ist und $(V_\mathfrak{a} f, g) = \int e^{i\{\mathfrak{a},\mathfrak{x}\}}\, d(Pf, g)$ ist.

Die Bahnen von $\mathfrak{x}, A \to \mathfrak{x}A$ sind: 1. $M_0^0 = \{0\}$, 2. $M_0^+ = \{\mathfrak{x} : \{\mathfrak{x},\mathfrak{x}\} = 0, x_4 > 0\}$ und $M_0^- = \{\mathfrak{x} : \{\mathfrak{x}, \mathfrak{x}\} = 0, x_4 < 0\}$, 3. $M_m^+ = \{\mathfrak{x} : \{\mathfrak{x}, \mathfrak{x}\} = m^2, x_4 > 0\}$ und $M_m^- = \{\mathfrak{x} : \{\mathfrak{x},\mathfrak{x}\} = m^2, x_4 < 0\}$, 4. $M_m = \{\mathfrak{x} : \{\mathfrak{x}, \mathfrak{x}\} = -m^2\}$, $(m > 0)$. Wir zerlegen $\hat{T}$ in folgende Teilmengen: M_0^0, M_0^+, M_0^-, $M_+^+ = \bigcup_{m>0} M_m^+$, $M_+^- = \bigcup_{m>0} M_m^-$ und $M_- = \bigcup_{m>0} M_m$. Aus Lemma 4 folgt, daß wir uns auf die Untersuchung imprimitiver Systeme mit den Basen M_0^0, M_0^+, M_0^-, M_+^+, M_+^- und M_- beschränken können.

Die imprimitiven Systeme mit der Basis M_0^0 sind genau diejenigen, zu denen Darstellungen mit $V_\mathfrak{a} = I$ für jedes $\mathfrak{a} \in T$ gehören. Das sind also im wesentlichen Darstellungen von G. Diesen Fall wollen wir nicht mehr weiter verfolgen, da unsere Methode für diese Darstellungen keine Vereinfachung bringt (vgl. [2] und [9]).

M_0^+ und M_0^- bestehen nur aus einer Bahn. Also können wir sie als Produktbasen betrachten. R^+ sei die Menge der positiven reellen Zahlen. Wir bilden $R^+ \times M_1^+$ durch $(m, \mathfrak{x}) \to m\mathfrak{x}$ auf M_+^+ ab. Also können wir $M_+^+ = R^+ \times M_1^+$ setzen und ganz entsprechend $M_+^- = R^+ \times M_1^-$ und $M_- = R^+ \times M_1$. Damit können wir M_+^+, M_+^- und M_- als Produktbasen behandeln und die Ergebnisse von Teil II anwenden. Da die Fälle M_0^- bzw. M_+^- ganz analog behandelt werden können wie M_0^+ bzw. M_+^+, können wir uns auf die Fälle M_0^+, M_+^+ und M_- beschränken.

Betrachten wir in M_0^+ bzw. M_1^+ bzw. M_1 die ersten 3 Komponenten x_1, x_2, x_3 eines Vektors als Parameter, so ist das Maß $ds = \frac{1}{|x_4|}\, d x_1 d x_2 d x_3$ invariant gegenüber $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}A = \tilde{A}^{-1}\mathfrak{x}$. Wir bezeichnen dieses Maß im folgenden mit s^0 bzw. s^+ bzw. s^- für M_0^+ bzw. M_1^+ bzw. M_1 und verwenden stets diese Maße. Dann ist $\lambda = 1$ (vgl. (9)).

Es sei $\mathfrak{e}^-$ der Vektor mit den Komponenten 0,0, 1,0 aus M_1. Die Gruppe $G_0^- = \{A : \mathfrak{e}^- A = \mathfrak{e}^-\}$ ist dann eine zweifache Überlagerungsgruppe der Lorentzgruppe mit zwei Raum- und einer Zeitkomponente. Um alle imprimitiven Systeme mit der Basis M_- zu erhalten, benötigt man eine Übersicht über die Darstellungsfelder von G_0^- und damit eine Übersicht über die Darstellungen von

G_0^- (vgl. dazu [1]); eine Übersicht über die irreduziblen alleine genügt nicht. Da G_0^- nicht kompakt ist, können wir auch nicht die Ergebnisse von § 8 anwenden. Wir behandeln diesen Fall nicht mehr weiter.

Es sei $\mathfrak{e}^+$ der Vektor mit den Komponenten 0,0, 0,1 aus M_1^+. Die Gruppe $G_0^+ = \{A : \mathfrak{e}^+ A = \mathfrak{e}^+\}$ ist die Gruppe aller unitären Matrizen aus G. G_0^+ ist also die universelle Überlagerungsgruppe der Drehgruppe des R_3. Diese Gruppe ist kompakt und ihre irreduziblen Darstellungen sind $D_0, D_{1/2}, D_1, \ldots,$ wobei $0, {}^1/_2, 1, \ldots,$ das Gewicht der Darstellung ist. Also ist jedes imprimitive System mit der Basis M_+^+ direkte Summe von Darstellungen der Form $\{\tilde{\mu}, k\}_i$, $i = 0, {}^1/_2, 1, \ldots$ μ ist dabei ein Maß über R^+. Damit haben wir eine vollständige Übersicht über die Darstellungen von $\mathfrak{G}$, die zu dieser Basis gehören. Irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{G}$ erhalten wir, wenn wir μ durch das Dirac-Maß δ_r für einen Punkt $r \in R^+$ ersetzen. Also sind die Darstellungen $\{\delta_r, 1\}_i$ mit $r \in R^+$ und $i = 0, {}^1/_2, 1, \ldots,$ alle irreduziblen Darstellungen, die zur Basis M_+^+ gehören.

Um diese Darstellungen explizit anschreiben zu können, benötigen wir einen Borelschnitt in G. Mit Hilfe der Abbildung $\Psi(G_0^+ A) = \mathfrak{e}^+ G_0^+ A = \mathfrak{e}^+ A = \tilde{A}^{-1}\mathfrak{e}^+$ identifizieren wir G/G_0^+ mit M_1^+. Die kanonische Abbildung von G auf $M_1^+ = G/G_0^+$ ist dann $h(A) = \mathfrak{e}^+ A = \tilde{A}^{-1}\mathfrak{e}^+$. Wir ordnen nun jedem $\mathfrak{e} \in M_1^+$ das eindeutig bestimmte Element $C^+(\mathfrak{e})$ aus G zu, das folgende Eigenschaften besitzt: 1. $\tilde{C}^+(\mathfrak{e})^{-1}\mathfrak{e}^+ = \mathfrak{e}^+$; 2. $C(\mathfrak{e}) = U A_t^{-1} U^{-1}$ mit $U \in G_0^+$, dabei ist $A_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$ und $t \geqq 0$. Dann ist $C^+ = \{C^+(\mathfrak{e}) : \mathfrak{e} \in M_1^+\}$ ein Borelschnitt. Man beweist leicht, daß C^+ abgeschlossen, $C^+(\mathfrak{e})$ stetig und $h(C^+(\mathfrak{e})) = \mathfrak{e}$ ist. (Man beachte dazu, daß G_0^+ kompakt ist.)

Nach (15) ist $\xi^+(\mathfrak{e}, A) = C^+(\mathfrak{e})\, A(C^+(\mathfrak{e}A))^{-1}$. Also ist $\xi^+(\mathfrak{e}, A)$ stetig in $\mathfrak{e}$ und A. Es gilt $\xi^+(\mathfrak{e}, U) = U$ für alle $U \in G_0^+$ und $\mathfrak{e} \in M_1^+$, denn es gilt $C^+(\mathfrak{e}, U) = U^{-1}C^+(\mathfrak{e})\, U$. Wir geben noch eine explizite Form für die irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{G}$ an, die zur Basis M_+^+ gehören. Es sei $\{\delta_r, 1\}_k$ das zugehörige imprimitive System und $A \to M_A^k$ eine Matrizdarstellung von G_0^+ vom Gewicht k. M_A^k ist also eine quadratische Matrix mit $2k+1$ Reihen. $\mathfrak{H}$ sei der Hilbert-Raum aller Abbildungen α von M_1^+ in den $2k+1$-dimensionalen komplexen Raum C_{2k+1} mit folgenden Eigenschaften: 1. Die Komponenten $\alpha_i(\mathfrak{e})$, $i = 1, \ldots, 2k+1$, von $\alpha(\mathfrak{e})$ sind Borel-meßbare Funktionen. 2. $\int \sum_{i=1}^{2k+1} |\alpha_i(\mathfrak{e})|^2 ds^+ = \int |\alpha(\mathfrak{e})|^2 ds^+ < \infty$. 3. Die Norm in $\mathfrak{H}$ ist $|\alpha| = \sqrt{\int |\alpha(\mathfrak{e})|^2 ds^+}$. Dann hat die Darstellung $\{\delta_r, 1\}_k$ die Form

$$\left\{\begin{aligned} (W_A\alpha)(\mathfrak{e}) &= M^k_{\xi^+(\mathfrak{e},A)}\,\alpha(\mathfrak{e}A)\,, \\ (V_a\alpha)(\mathfrak{e}) &= e^{ir(\mathfrak{e},a)}\,\alpha(\mathfrak{e})\,. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Im Falle M_0^+ sei $\mathfrak{e}^0$ der Vektor mit den Komponenten 0, 0,1, 1. Dann ist $G_0^0 = \{A : \mathfrak{e}^0 A = \tilde{A}^{-1}\mathfrak{e}^0 = \mathfrak{e}^0\}$ die Menge aller Matrizen der Form $\begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & e^{-i\varphi/2}\beta \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}$, wobei φ eine reelle Zahl ist, die modulo 4π bestimmt ist, und β eine komplexe Zahl ist. Für diese Matrizen schreiben wir kurz $[\beta, \varphi]$. Dann gilt $[\beta, \varphi]\,[\beta', \varphi'] = [\beta + e^{i\varphi}\beta', \varphi + \varphi']$. G_0^0 ist also eine zweifache Überlagerungsgruppe der inhomogenen Bewegungsgruppe der Ebene (vgl. [14]). Da M_0^+ nur aus einer

Bahn besteht, sind die imprimitiven Systeme mit der Basis M_0^+ bereits durch eine Darstellung L von G_0^0 eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen diese Darstellung von $\mathfrak{G}$ mit $\{L\}$. In [13] haben wir eine vollständige Übersicht über alle unitären Darstellungen von G_0^0 angegeben. Damit haben wir auch eine vollständige Übersicht über die unitären Darstellungen von $\mathfrak{G}$, die zur Basis M_0^+ gehören. Irreduzible Darstellungen von G_0^0 sind die eindimensionalen Darstellungen $L^k([\beta, \varphi] \to e^{ik\varphi})$, $k = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \ldots$. Außerdem gibt es noch folgende irreduzible Darstellungen von G_0^0: $L^{r,\varepsilon}([\beta, \varphi] \to U^{r,\varepsilon}_{[\beta,\varphi]})$ mit $(U^{r,\varepsilon}_{[\beta,\varphi]} f)(z) = e^{ir\,\mathrm{Re}(z\beta)} e^{i\varepsilon\varphi} f(e^{-i\varphi} z)$. Dabei ist z aus der Menge K_1 aller komplexen Zahlen mit $|z| = 1$ und f ist aus der Menge $L_l^2(K)$ aller bezüglich des invarianten Maßes l des Einheitskreises quadratisch integrierbarer Funktionen, r ist eine reelle Zahl > 0 und $\varepsilon = 0$ oder $1/2$ (vgl. [13]).

Wir benötigen noch einen Borel-Schnitt B^0 von G. Mit Hilfe der Abbildung $\Psi(G_0^0 A) = \mathfrak{e}^0 A = \tilde{A}^{-1}\mathfrak{e}^0$ identifizieren wir G/G_0^0 und M_0^+. Die kanonische Abbildung von G auf $G/G_0^0 = M_0^+$ hat dann die Form $h(A) = \tilde{A}^{-1}\mathfrak{e}^0$. Ist $\mathfrak{e} = r\begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi\\ \sin\vartheta\sin\varphi\\ \cos\vartheta\\ 1\end{pmatrix}$ mit $r > 0$, $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$, dann setzen wir $C^0(\mathfrak{e}) = A_z(\varphi)\, A^{-1}_{\log r}\, A_y^{-1}(\vartheta)\, A_z^{-1}(\varphi)$ mit $A_z(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0\\ 0 & e^{i\varphi/2}\end{pmatrix}$, $A_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0\\ 0 & e^{-t/2}\end{pmatrix}$, $A_y(\vartheta) = \begin{pmatrix}\cos\delta/2, & -\sin\delta/2\\ \sin\delta/2, & \cos\delta/2\end{pmatrix}$, falls $\vartheta \neq \pi$ ist, und $C^0(\mathfrak{e}) = A^{-1}_{\log r} A_y^{-1}(\pi)$, falls $\vartheta = \pi$ ist. $C^0(\mathfrak{e})$ hängt von φ nur modulo 2π ab. $B^0 = \{C^0(\mathfrak{e}) : \mathfrak{e} \in M_0^+\}$ ist dann ein Borel-Schnitt und es gilt $h_1^{-1}(\mathfrak{e}) = C^0(\mathfrak{e})$. Also ist $\xi^0(\mathfrak{e}, A) = C^0(\mathfrak{e})\, A\,(C^0(\tilde{A}^{-1}\mathfrak{e}))^{-1} = [\beta(\mathfrak{e}, A), \tilde{\varphi}(\mathfrak{e}, A)]$, dabei ist $\tilde{\varphi}(\mathfrak{e}, A)$ modulo 4π bestimmt. Man prüft leicht nach, daß $\xi^0(\mathfrak{e}, A_z(\varphi)) = A_z(\varphi) = [0, \varphi]$ für $\mathfrak{e} \neq -r\mathfrak{e}^0$ und $= A_z(-\varphi) = [0, -\varphi]$ für $\mathfrak{e} = -r\mathfrak{e}^0$ gilt.

Die irreduzible Darstellung $\{L^k\}$ hat dann den Darstellungsraum $L^2(M_0^+)$ aller über M_0^+ quadratisch integrierbarer Funktionen und es gilt $(W_A f)(\mathfrak{e}) = e^{ik\tilde{\varphi}(\mathfrak{e},A)} f(\tilde{A}^{-1}\mathfrak{e})$ und $(V_a f)(\mathfrak{e}) = e^{i(a,\mathfrak{e})} f(\mathfrak{e})$. Die irreduzible Darstellung $\{L^{r,\varepsilon}\}$ hat den Darstellungsraum $L^2_{l\times s^0}(K_1 \times M_0^+)$ aller über M_0^+ bezüglich $l \times s^0$ quadratisch integrierbarer Funktionen und es gilt $(W_A f)(z, \mathfrak{e}) = e^{ir\,\mathrm{Re}(\bar{z}\,\beta(\mathfrak{e},A))}\, e^{i\varepsilon\tilde{\varphi}(\mathfrak{e},A)} f(e^{-i\tilde{\varphi}(\mathfrak{e},A)} z, \tilde{A}^{-1}\mathfrak{e})$ und $(V_a f)(z, \mathfrak{e}) = e^{i(a,\mathfrak{e})} f(z, \mathfrak{e})$.

§ 13. *Berechnung der Kroneckerprodukte irreduzibler Darstellungen*

Wir berechnen im folgenden die Kroneckerprodukte einiger irreduzibler Darstellungen der inhomogenen Lorentzgruppe. Mit L_r bezeichnen wir im folgenden stets das Lebesguesche Maß über dem offenen Intervall (r, ∞). Es gelten folgende Formeln:

$$\text{(39)}\qquad \{\delta_{r_1}, 1\}_{k_1} \otimes \{\delta_{r_2}, 1\}_{k_2} = \begin{cases}\{L_{r_1+r_2}, n_0\}_0 \oplus \{L_{r_1+r_2}, n_1\}_1 \oplus \cdots, & \text{bzw.}\\ \{L_{r_1+r_2}, n_{1/2}\}_{1/2} \oplus \{L_{r_1+r_2}, n_{3/2}\}_{3/2} \oplus \cdots, & \end{cases}$$

je nachdem $k_1 + k_2 = 0$ bzw. $= 1/2$ modulo 1 ist; dabei sei $k_1 \geqq k_2$ und

$$n_k = \begin{cases}(1 + 2k_1)(1 + 2k_2) & \text{für } k \geqq k_1 + k_2,\\ (1 + k + k_1 - k_2)(1 + k - k_1 + k_2) + (1 + 2k)(k_1 + k_2 - k) & \text{für } k_1 - k_2 \leqq k \leqq k_1 + k_2\\ (1 + 2k)(1 + 2k_2) & \text{für } 0 \leqq k \leqq k_1 - k_2\end{cases}$$

$$\text{(40)}\qquad \{\delta_{r_1}, 1\}_{k_1} \otimes \{L^{k_2}\} = \begin{cases}\{L_{r_1}, n_0\}_0 \oplus \{L_{r_1}, n_1\}_1 \oplus \cdots, & \text{falls } k_1 + k_2 = 0 \bmod 1,\\ \{L_{r_1}, n_{1/2}\}_{1/2} \oplus \{L_{r_1}, n_{3/2}\}_{3/2} \oplus \cdots, & \text{falls } k_1 + k_2 = 1/2 \bmod 1.\end{cases}$$

dabei ist

$$n_k = \begin{cases} 0 \text{ für } 0 \leq k < |k_2| - k_1 \text{ und } |k_2| \geqq k_1\,,^{12)} \\ 2k+1 \text{ für } 0 \leq k \leq k_1 - |k_2| \text{ und } |k_2| < k_1\,, \\ k - |k_2| + k_1 + 1 \text{ für } |k_2| - k_1 \leq k \leq |k_2| + k_1 \text{ und } |k_2| \geqq k_1\,, \\ k + k_1 - |k_2| + 1 \text{ für } k_1 - |k_2| \leq k \leq |k_2| + k_1 \text{ und } |k_2| < k_1\,, \\ 2k_1 + 1 \text{ für } k \geqq |k_2| + k_1\,. \end{cases}$$

$$(41)\quad \{\delta_{r_1}, 1\}_{k_1} \otimes \{L^{r,\varepsilon}\} = \begin{cases} \{L_{r_1}, n_0\}_0 \oplus \{L_{r_1}, n_1\}_1 \oplus \cdots, & \text{falls } k_1 + \varepsilon = 0 \bmod 1\,, \\ \{L_{r_1}, n_{1/2}\}_{1/2} \oplus \{L_{r_1}, n_{3/2}\}_{3/2} \oplus \cdots, & \text{falls } k_1 + \varepsilon = 1/2 \bmod 1, \end{cases}$$

dabei ist $n_k = (2k+1)(2k_1+1)$.

$$(42)\qquad \{L^{k_1}\} \otimes \{L^{k_2}\} = \{L_0, 1\}_{|k_1 - k_2|} \oplus \{L_0, 1\}_{|k_1 - k_2| + 1} \oplus \cdots$$

$$(43)\quad \{L^{k_1}\} \otimes \{L^{r,\varepsilon}\} = \begin{cases} \{L_0, n_0\}_0 \oplus \{L_0, n_1\}_1 \oplus \cdots, & \text{falls } k_1 + \varepsilon = 0 \bmod 1\,, \\ \{L_0, n_{1/2}\}_{1/2} \oplus \{L_0, n_{3/2}\}_{3/2} \oplus \cdots, & \text{falls } k_1 + \varepsilon = 1/2 \bmod 1\,, \end{cases}$$

dabei ist $n_k = (2k+1)$.

$$(44)\quad \{L^{r_1,\varepsilon_1}\} \otimes \{L^{r_2,\varepsilon_2}\} = \begin{cases} \{L_0, \infty\}_0 \oplus \{L_0, \infty\}_1 \oplus \cdots, & \text{falls } \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0 \bmod 1\,, \\ \{L_0, \infty\}_{1/2} \oplus \{L_0, \infty\}_{3/2} \oplus \cdots, & \text{falls } \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = {}^1/_2 \bmod 1\,. \end{cases}$$

Wir werden die ersten beiden dieser Formeln ableiten. Das Verfahren für die übrigen ist ganz entsprechend. Für die Darstellung $\{\delta_{r_1}, 1\}_{k_1} \otimes \{\delta_{r_2}, 1\}_{k_2}$ benutzen wir den Hilbert-Raum aller Vektorfelder $f(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = (\alpha_{i,j}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2))$, $i = 1, \ldots, 2k_1 + 1, j = 1, \ldots, 2k_2 + 1$ über $M_1^+ \times M_1^+$ mit

$$\int \sum_{i=1}^{2k_1+1} \sum_{j=1}^{2k_2+1} |\alpha_{i,j}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)|^2 ds^+ ds^+ < \infty\,.$$

Ferner sei $M_U^{k_1} \otimes M_U^{k_2}$ das Kroneckerprodukt der Matrizen $M_U^{k_1}$ und $M_U^{k_2}$. Es gilt dann für $\{\delta_{r_1}, 1\}_{k_1} \otimes \{\delta_{r_2}, 1\}_{k_2}$

$$(45)\quad \begin{aligned} (W_A f)(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) &= M^{k_1}{}_{\xi^+(\mathfrak{x}_1, A)} \otimes M^{k_2}{}_{\xi^+(\mathfrak{x}_2, A)}\, f(\tilde{A}^{-1}\mathfrak{x}_1, \tilde{A}^{-1}\mathfrak{x}_2) \text{ und} \\ (V_{\mathfrak{a}} f)(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) &= e^{i(\mathfrak{a}, r_1\mathfrak{x}_1 + r_2\mathfrak{x}_2)} f(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)\,. \end{aligned}$$

Die Abbildung $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2), A \to (\tilde{A}^{-1}\mathfrak{x}_1, \tilde{A}^{-1}\mathfrak{x}_2)$ von $M_1^+ \times M_1^+ \times G$ auf $M_1^+ \times M_1^+$ erfüllt (1). Die Bahnen dieser Abbildung sind $B_r = \{(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) : \{r_1\mathfrak{x}_1 + r_2\mathfrak{x}_2, r_1\mathfrak{x}_1 + r_2\mathfrak{x}_2\} = r^2\}$ mit $r \geqq r_1 + r_2$. Es gilt $B_{r_1 + r_2} = \{(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) : \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_2\}$. $B_{r_1 + r_2}$ ist also eine $s^+ \times s^+$-Nullmenge. Wir können daher ohne weiteres $M_1^+ \times M_1^+$ durch $S = M_1^+ \times M_1^+ - B_{r_1 + r_2}$ ersetzen. Es sei nun $(r_1 + r_2, \infty)$ das offene Intervall von $r_1 + r_2$ bis ∞ und S^2 die Einheitssphäre des R_3. Wir betrachten dann folgende Abbildung T von S auf $(r_1 + r_2, \infty) \times M_1^+ \times S^2 = \bar{S}$ mit $T(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = (r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y})$, dabei ist $r = \sqrt{\{r_1\mathfrak{x}_1 + r_2\mathfrak{x}_2, r_1\mathfrak{x}_1 + r_2\mathfrak{x}_2\}}$, $\mathfrak{e} = (1/r)(r_1\mathfrak{x}_1 + r_2\mathfrak{x}_2)$ und $\mathfrak{y} = \dfrac{P_0\tilde{C}^+(\mathfrak{e})\mathfrak{x}_1}{|P_0\tilde{C}^+(\mathfrak{e})\mathfrak{x}_1|}$, dabei ist P_0 die orthogonale Projektion des R_4 auf den R_3 mit $x_4 = 0$. T ist eine ein-eindeutige und stetige Abbildung von S auf $\bar{S}$, da $\mathfrak{e} \to C^+(\mathfrak{e})$ stetig ist. Wir benutzen diese Abbildung, um die Darstellung (45) auf den Raum $\bar{S}$ zu übertragen. Die Übertragung der Abbildung $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2), A \to (\tilde{A}^{-1}\mathfrak{x}_1, \tilde{A}^{-1}\mathfrak{x}_2)$ ergibt $(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}), A \to (r, \tilde{A}^{-1}\mathfrak{e}, \widetilde{\xi^+(\mathfrak{e}, A)}^{-1}\mathfrak{y})$. Die Übertragung des Maßes $s^+ \times s^+$ liefert

[12]) $\{L_r, n_k\}_k$ bleibt weg, falls $n_k = 0$ ist.

ein Maß μ. Aus (45) folgt dann, daß unsere Darstellung die folgende Form erhält:

$$(46)\qquad \begin{cases} (W_A g)\,(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}) = M((r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}), A)\, g(r, \tilde{A}^{-1}\mathfrak{e}, \widetilde{\xi^+(\mathfrak{e}, A)}^{-1}\mathfrak{y})\,, \\ (V_a g)\,(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}) = e^{ir(a,\mathfrak{e})}\, g(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y})\,, \end{cases}$$

dabei ist $M((r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}), A) = M^{k_1}_{\xi^+(\mathfrak{x}_1, A)} \otimes M^{k_2}_{\xi^+(\mathfrak{x}_2, A)}$ mit $T(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = (r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y})$. Wir zeigen unten, daß das Maß μ äquivalent zum Maß $L_{r_1+r_2} \times s^+ \times o$ ist, wobei L_r das Lebesguesche Maß über (r, ∞) ist und o das Oberflächenmaß von S^2 ist. Also gilt $\varrho(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y})\, d\mu = dL\, ds\, do$. $f \to \frac{1}{\sqrt{\varrho}} f$ ist eine Äquivalenzabbildung des Hilbert-Raumes gebildet mit dem Maß μ auf den entsprechenden Hilbert-Raum gebildet mit dem Maß $L \times s^+ \times o$. Beide Maße sind invariant bezüglich der Transformationen $(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}) \to (r, \tilde{A}^{-1}\mathfrak{e}, \widetilde{\xi^+(\mathfrak{e}, A)}^{-1}\mathfrak{y})$. Also gilt $\varrho(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}) = (r, \tilde{A}^{-1}\mathfrak{a}, \widetilde{\xi^+(\mathfrak{e}, A)}^{-1}\mathfrak{y})$ μ-fast überall. Übertragen wir mit Hilfe der Äquivalenzabbildung $f \to \frac{1}{\sqrt{\varrho}} f$ die Darstellung (46), so ergibt eine einfache Rechnung, daß die Form (46) erhalten bleibt, da es auf Nullmengen bei den Vektorfunktionen f nicht ankommt. Wir können also annehmen, daß in (46) das Maß $L \times s^+ \times o$ benutzt wird.

Wir zeigen, daß μ und $L \times s^+ \times o$ äquivalent sind. Wir übertragen μ bzw. $L \times s^+ \times o$ mit Hilfe von T^{-1} auf S und erhalten $s^+ \times s^+$ bzw. ein Maß μ_1. Man kann in S folgende Parameter t_1, t_2 und $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$ einführen: $\mathfrak{x}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{Sin}\, t_1\, \mathfrak{r}_1 \\ \mathfrak{Cos}\, t_1 \end{pmatrix}$ und $\tilde{C}^+(\mathfrak{x}_1)\mathfrak{x}_2 = \begin{pmatrix} \mathfrak{Sin}\, t_2\, \mathfrak{r}_2 \\ \mathfrak{Cos}\, t_2 \end{pmatrix}$, wobei $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ Einheitsvektoren des R_3 sind und t_1 und t_2 nicht negative reelle Zahlen sind. Dann erhält man $ds^+ ds^+ = \mathfrak{Sin}\, t_1\, dt_1\, \mathfrak{Sin}\, t_2\, dt_2\, do_1\, do_2$, wobei o_1 und o_2 das Oberflächenmaß von S^2 ist. $t_2 =$ konstant liefert die Bahnen von S. Also kann man $s^+ \times s^+$ in der Form $s^+ \times s^+(E) = \int \nu_r(E \cap B_r)\, d\tilde{\mu}_0$ schreiben, wo $\tilde{\mu}_0$ ein zum Lebesgueschen Maß über $(r_1 + r_2, \infty)$ äquivalentes Maß ist und ν_r ein invariantes Maß über B_r ist. μ_1 kann man offensichtlich in der Form $\mu_1(E) = \int \nu_r'(E \cap B_r)\, dr$ schreiben, wo ν_r' ebenfalls invariant über B_r ist. Als invariante Maße sind ν_r und ν_r' stets äquivalent, also sind μ_1 und $s^+ \times s^+$ äquivalent und daher auch μ und $L \times s^+ \times o$.

Den Darstellungsraum von (46) können wir nun in naheliegender Weise als normiertes direktes Integral $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}^{(r,\mathfrak{e})}\, dL_{r_1+r_2}\, ds^+$ auffassen, wobei $\mathfrak{H}^{(r,\mathfrak{e})}$ stets der Hilbert-Raum der Vektorfunktionen $(\alpha_{i,j}(\mathfrak{y})) = \alpha(\mathfrak{y})$ über S^2 ist mit $\int \sum_{i,j} |\alpha_{i,j}(\mathfrak{y})|^2 do < \infty$. Dann gilt für $h(r, \mathfrak{e}) \in \mathfrak{S}$ $(W_A h)\,(r, \mathfrak{e}) = Q_A(r, \mathfrak{e})\, h(r, \tilde{A}^{-1}\mathfrak{e})$ und $(V_a h)\,(r, \mathfrak{e}) = e^{ir(a,\mathfrak{e})}\, h(r, \mathfrak{e})$ mit $(Q_A(r, \mathfrak{e})\alpha)\,(\mathfrak{y}) = M((r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}), A)\, \alpha(\widetilde{\xi^+(\mathfrak{e}, A)}^{-1}\mathfrak{y})$. Aus der Definition von $Q_A(r, \mathfrak{e})$ folgt, daß $Q_A(r, \mathfrak{e})$ (17) überall erfüllt und ebenso (19). Daraus folgt, daß wir die Schritte in § 6 durchführen können, ohne auf Nullmengen achten zu müssen. Es ergibt sich, daß das Darstellungsfeld $L(r)$ mit $L_U(r) = Q_U(r, \mathfrak{e}^+)$ zu unserer Darstellung gehört. Wir haben noch $Q_U(r, \mathfrak{e}^+)$ in irreduzible Teile zu zerlegen. Es ist $(Q_U(r, \mathfrak{e}^+)\, \alpha(\mathfrak{y})) = M((r, \mathfrak{e}^+, \mathfrak{y}), U)\, \alpha(\widetilde{\xi^+(\mathfrak{e}^+, U)}^{-1})$. Da $\xi^+(\mathfrak{e}, U) = U$ für alle $\mathfrak{e} \in M_1^+$ gilt, ist $(Q_U(r, \mathfrak{e}^+)\, \alpha)\,(\mathfrak{y}) = M^{k_1}_U \otimes M^{k_2}_U\, \alpha(\tilde{U}^{-1}\mathfrak{y})$.

Die Darstellung $M(U \to M_U)$ mit $(M_U f)(\mathfrak{y}) = f(\tilde{U}^{-1}\mathfrak{y})$ für $f \in L_0^2(S^2)$ besitzt bekanntlich die Zerlegung $M^0 \oplus M^1 \oplus M^2 + \cdots$. $Q_U(r, \mathfrak{e}^+)$ ist also das Kroneckerprodukt von $M_U^{k_1} \otimes M_U^{k_2} \otimes M_U$. Also ist $Q_U(r, \mathfrak{e}^+)$ äquivalent zur direkten Summe $\sum_{k=0}^{\infty} M^{k_1} \otimes M^{k_2} \otimes M^k$. Hieraus folgt sofort, daß (39) gilt.

Wir betrachten noch den Fall $\{\delta_{r_1}, 1\}_{k_1} \otimes \{L^{k_2}\}$. Als Darstellungsraum wählen wir den Raum aller $f(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = (\alpha_i(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2))$, $i = 1, \ldots, 2k_1 + 1$ über $M_1^+ \times M_0^+$ mit $\int \sum_{i=1}^{2k_1+1} |\alpha_i(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)|^2 ds^+ ds^0 < \infty$. Dann gilt $(W_A f)(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = e^{ik_2\tilde{\varphi}(\mathfrak{x}_2, A)} M^{k_1}_{\xi^+(\mathfrak{x}_1, A)} f(\tilde{A}^{-1}\mathfrak{x}_1, \tilde{A}^{-1}\mathfrak{x}_2)$ und $(V_\mathfrak{a} f)(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = e^{i(\mathfrak{a}, r_1\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2)} f(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$. Wir definieren die Abbildung T von $M_1^+ \times M_0^+$ auf $\bar{S} = (r_1, \infty) \times M_1^+ \times S^2$ wie oben durch $T(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = (r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y})$ mit $r = \sqrt{\{r_1\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2, r_1\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2\}}$, $\mathfrak{e} = (1/r)(r_1\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2)$ und $\mathfrak{y} = \dfrac{P_0\tilde{C}^+(\mathfrak{e})\mathfrak{x}_1}{|P_0\tilde{C}^+(\mathfrak{e})\mathfrak{x}_1|}$. Wir können wie oben auf $\bar{S}$ das Maß $L_{r_1} \times s^+ \times o$ verwenden und erhalten $(W_A f)(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}) = e^{ik_2\tilde{\varphi}(\mathfrak{x}_2, A)} M^{k_1}_{\xi^+(\mathfrak{x}_1, A)} f(r, \tilde{A}^{-1}\mathfrak{e}, \widetilde{\xi^+(\mathfrak{e}, A)}^{-1}\mathfrak{y})$ mit $T(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = (r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y})$ und $(V_\mathfrak{a} f)(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y}) = e^{ir(\mathfrak{a}, \mathfrak{e})} f(r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y})$. Also erhalten wir ganz analog wie oben $(W_A g)(r, \mathfrak{e}) = Q_A(r, \mathfrak{e}) g(r, \tilde{A}^{-1}\mathfrak{e})$ mit $(Q_A(r, \mathfrak{e})\alpha)(\mathfrak{y}) = e^{ik_2\tilde{\varphi}(\mathfrak{x}_2, A)} M^{k_1}_{\xi^+(\mathfrak{x}_1, A)} \alpha(\widetilde{\xi^+(\mathfrak{e}, A)}^{-1}\mathfrak{y})$ mit $T(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = (r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y})$. Wie oben zeigt man, daß $L_U(r) = Q_U(r, \mathfrak{e}^+)$ ein Darstellungsfeld dieses imprimitiven Systemes ist. Also gilt $(L_U(r) g)(\mathfrak{y}) = e^{ik_2\tilde{\varphi}(\mathfrak{x}_2, U)} M^{k_1}_{\xi^+(\mathfrak{x}_1, U)} g(\widetilde{\xi^+(\mathfrak{e}^+, U)}^{-1}\mathfrak{y})$ mit $T(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = (r, \mathfrak{e}, \mathfrak{y})$. Man rechnet ohne weiteres nach, daß $\mathfrak{x}_1 = \dfrac{r^2 - r_1^2}{2rr_1}\mathfrak{y} + \dfrac{r^2 + r_1^2}{2rr_1}\mathfrak{e}^+$ und $\mathfrak{x}_2 = -\dfrac{r^2 - r_1^2}{2r}\mathfrak{y} + \dfrac{r^2 - r_1^2}{2r}\mathfrak{e}^+$ ist. Ferner ist $\xi^+(\mathfrak{x}, U) = U$ für alle $\mathfrak{x} \in M_1^+$. Wir berechnen noch $\tilde{\varphi}(\mathfrak{x}_2, U)$. Es ist $\tilde{\varphi}(\mathfrak{x}_2, U) = \varphi(-\mathfrak{y}, U)$, dabei wird $\varphi(-\mathfrak{y}, U)$ nach (31) berechnet, wobei $\mathfrak{y}$ als dreidimensionaler Vektor betrachtet wird, indem man die 4. Komponente, die stets Null ist, einfach wegläßt. Ein Vergleich der Definition von $C^0(\mathfrak{x}_2)$ und $C(-\mathfrak{y})$ ergibt $C^0(\mathfrak{x}_2) = A_t^{-1}\left(\log \dfrac{r^2 - r_1^2}{2rr_1}\right) C(-\mathfrak{y})$, also ist $\xi^0(\mathfrak{x}_2, U) = C^0(\mathfrak{x}_2) U (C^0(\tilde{U}^{-1}\mathfrak{x}_2))^{-1} = A_t^{-1}\left(\log\left(\dfrac{r^2 - r_1^2}{2rr_1}\right)\right) C(-\mathfrak{y}) U (C(-\tilde{U}^{-1}\mathfrak{y}))^{-1} A_t\left(\log\left(\dfrac{r^2 - r_1^2}{2rr_1}\right)\right) = A_t^{-1}\left(\log \dfrac{r^2 - r_1^2}{2rr_1}\right) \xi(-\mathfrak{y}, U) A_t\left(\log \dfrac{r^2 - r_1^2}{2rr_1}\right) = \xi(-\mathfrak{y}, U)$. Das letzte Gleichheitszeichen gilt, da im vorletzten Ausdruck alle Matrizen Diagonalmatrizen sind. Also gilt $(L_U(r) g)(\mathfrak{y}) = e^{ik\varphi(-\mathfrak{y}, U)} M_U^{k_1}(g(\tilde{U}^{-1}\mathfrak{y}))$, wobei $\varphi(-\mathfrak{y}, U)$ nach (31) zu berechnen ist. Es gilt also $L_U(r) = M_U^{k_1} \otimes W_U^{k_2}$ mit $(W_U^k \alpha)(\mathfrak{y}) = e^{ik_2\varphi(-\mathfrak{y}, U)} \alpha(\tilde{U}^{-1}\mathfrak{y})$ für $\alpha \in L_0^2(S^2)$. Die Darstellung $U \to W_U^{k_2}$ liefert ein imprimitives System der Drehgruppe des R_3 mit der Basis S^2, denn es gilt $W_U^{k_2} \chi_E W_{U^{-1}}^{k_2} = \chi_{EU^{-1}}$ für alle Borel-meßbaren charakteristischen Funktionen über S^2. Ein zu diesem imprimitiven System gehöriges Darstellungsfeld erhält man nach § 6 durch entsprechende Überlegungen. Es ergibt sich $L_{A_3(\psi)} = e^{ik_2\varphi(-\mathfrak{e}_0, A_3(\psi))}$. Eine einfache Rechnung ergibt $\varphi(-\mathfrak{e}_0, A_3(\psi)) = -\psi$. Also ist $L_{A_3(\psi)} = e^{-ik_2\psi}$. Nach [9], Theorem 8.2., S. 120, ist dann W^{k_2} äquivalent zur direkten Summe der $M^{|k_2|+j}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ Also ist $L_U(r)$ äquivalent zur direkten Summe der $M^{k_1} \otimes M^{|k_2|+j}$, $j = 0, 1, \ldots$ Daraus ergibt sich ohne weiteres die Formel (40).

Literatur

[1] BARGMANN, V.: Irreducible unitary representations of the Lorentz-group. Ann. Math. 48, 568—640 (1947).
[2] GELFAND, I. M., u. M. A. NEUMARK: Unitäre Darstellungen der klassischen Gruppen. Berlin 1957.
[3] HALMOS, P. R.: The decoposition of measures. Duke Math. J. 8, 386—392 (1941).
[4] HALMOS, P. R.: Introduction to the Hilbert-space. New York 1951.
[5] ITÔ, S.: Unitary representations of some linear groups. Nagoya Math. J. 5, 79—96 (1953).
[6] LOOMIS, L. H.: An introduction to abstract harmonic analysis. New York 1953.
[7] MACKEY, G. W.: Imprimitivity for representations of locally compact groups I. Proc. Nat. Acad. Sci. US 35, 537—545 (1949).
[8] MACKEY, G. W.: On the theorem of Stone and von Neumann. Duke Math. J. 16, 313—326 (1949).
[9] MACKEY, G. W.: Induced representations of locally compact groups I. Ann. Math. 55, 101—139 (1952).
[10] MACKEY, G. W.: Induced representations of locally compact groups II. Ann. Math. 58, 193—221 (1955).
[11] MACKEY, G. W.: Borel structure in groups and their duals. Trans. Am. Math. Soc. 85, 134—165 (1957).
[12] THOMA, E.: Zur Reduktionstheorie in separablen Hilbert-Räumen. Math. Z. 67, 1—9 (1957).
[13] THOMA, E.: Die unitären Darstellungen der universellen Überlagerungsgruppe der Bewegungsgruppe des R^2. Math. Ann. 134, 428—452 (1958).
[14] WIGNER, E.: On unitary representations of the inhomogenous Lorentz group. Ann. Math. 40, 149—204 (1939).

(Eingegangen am 4. April 1960)

KLEE, V.
Math. Annalen 141, 281—285 (1960)

Shrinkable neighborhoods in Hausdorff linear spaces

By

VICTOR KLEE* in Seattle and Copenhagen

Suppose U is a neighborhood of a point p in a Hausdorff linear space. Then U will be called *shrinkable* (at p) provided $[0,1[\ \mathrm{cl}(U-p) \subset \mathrm{int}(U-p)$. It is evident that every convex neighborhood is shrinkable and we shall show that in an arbitrary Hausdorff linear space the shrinkable neighborhoods play a role analogous to that of the convex neighborhoods in a locally convex space. In particular, every neighborhood of 0 must contain a shrinkable neighborhood and the gauge functional of a shrinkable neighborhood is continuous. This answers a question of LANDSBERG (Problem 270 of [6]). And the following paper [11] shows now, with the aid of shrinkable neighborhoods, the Leray-Schauder theory can be extended to an arbitrary Hausdorff linear space (not necessarily locally convex). The notion of shrinkable neighborhood first appears in the doctoral thesis of R. T. IVES [9], as does Theorem 5 below.

Let us begin by establishing

1. Theorem. *Every Hausdorff linear space is linearly homeomorphic with a linear subspace of a product of metric linear spaces.*

Proof. Let E be a Hausdorff linear space and $\mathscr{U}$ the class of all open neighborhoods U of 0 in E such that $U = [-1,1]\ U$. Every neighborhood of 0 contains a member of $\mathscr{U}$. For each $U \in \mathscr{U}$ let $U^0, U^1, U^2, \ldots,$ be a sequence of members of $\mathscr{U}$ such that $U^0 = U$, and $U^n + U^n \subset U^{n-1}$ for $n = 1, 2, \ldots$ Let $L_U = \bigcap\limits_0^\infty U^n$. Then clearly $L_U = [-1,1]\ L_U$ and $L_U + L_U \subset L_U$, whence L_U is a linear subspace of E. Let Q_U denote the quotient space E/L_U and φ_U the natural map of E onto Q_U. Let Q_U be topologized by taking the sets $\{\varphi_U U^n\}_{n=1}^\infty$ as a fundamental system of neighborhoods of the origin, the neighborhoods of other points being obtained by translation. It is easily verified that Q_U is a topological linear space and φ_U is continuous. And

$$\varphi_U^{-1}(\varphi_U U^n) = U^n + L_U \subset U^n + U^n \subset U^{n-1},$$

whence it follows that $\bigcap\limits_1^\infty \varphi_U U^n = \{L\}$. Thus the topology of Q_U is Hausdorff, and since there is a countable fundamental system of neighborhoods of 0 the space is metrizable. Let P denote the product space $\times_{U \in \mathscr{U}} Q_U$ and for each $x \in E$ let $\varphi x \in P$ be defined by the condition that $(\varphi x)_U = \varphi_U x$ for all $U \in \mathscr{U}$. Then φE is a linear subspace of P and φ is a linear homeomorphism, completing the proof of Theorem 1.

* Research fellow of the Alfred P. Sloan Foundation.

The reader will easily prove the next two remarks.

2. Proposition. *Suppose E is a Hausdorff linear space, L is a linear subspace of E, and U is a shrinkable neighborhood of 0 in E. Then $U \cap L$ is a shrinkable neighborhood of 0 in L.*

3. Proposition. *Suppose $\{E_a : a \in A\}$ is a family of Hausdorff linear spaces, U_a is a shrinkable neighborhood of the origin of E_a for each $a \in A$, and $U_a = E_a$ for all but finitely many $a \in A$. Then the set $\times_{a \in A} U_a$ is a shrinkable neighborhood of the origin in the product space $\times_{a \in A} E_a$.*

4. Theorem. *In a Hausdorff linear space, every neighborhood of a point contains a shrinkable neighborhood of that point.*

Proof. In view of the preceding three results, it suffices to consider a neighborhood U of 0 in a metric linear space E. According to a result of EIDELHEIT and MAZUR [5], the topology of E can be generated by an invariant metric ϱ which is strictly monotone in the sense that $\varrho(sx, 0) < \varrho(tx, 0)$ whenever $0 \leqq s < t$ and $x \in E \sim \{0\}$. Now of course for some $\varepsilon > 0$, U contains the closed neighborhood $N_\varepsilon 0 = \{x \in E : \varrho(x, 0) \leqq \varepsilon\}$. Whenever $x \in N_\varepsilon 0$ and $0 \leqq s < 1$ we have

$$\varepsilon - \varrho(sx, 0) \geqq \varrho(x, 0) - \varrho(sx, 0) = \delta > 0$$

and hence $N_\delta sx \subset N_\varepsilon 0$. Thus $N_\varepsilon 0$ is shrinkable and the proof of Theorem 4 is complete.

The following theorem and its proof are due to R. T. IVES.

5. Theorem. (IVES [9]). *Let U be a starshaped neighborhood of 0 in a Hausdorff linear space E and let μ be the gauge functional of U. Then μ is upper semicontinuous if and only if* $\operatorname{int} U = \{x \in E : \mu x < 1\}$, *lower semicontinuous if and only if* $\operatorname{cl} U = \{x \in E : \mu x \leqq 1\}$, *and continuous if and only if U is shrinkable.*

Proof. Observe first of all that

$$\operatorname{int} U \subset \{x \in E : \mu x < 1\} \subset U \subset \{x \in E : \mu x \leqq 1\} \subset \operatorname{cl} U .$$

From this it follows that $\operatorname{int} U = \{x \in E : \mu x < 1\}$ if and only if the latter set is open, while $\operatorname{cl} U = \{x \in E : \mu x \leqq 1\}$ if and only if the latter set is closed. Since μ is positively homogeneous, openness of the set $\{x \in E : \mu x < 1\}$ is equivalent to that of the set $\{x \in E : \mu x < s\}$ for all $s > 0$, and that in turn is equivalent to upper semicontinuity. A similar statement applies to lower semicontinuity. This establishes the stated characterizations of upper and lower semicontinuity and shows that continuity of μ implies shrinkability of U.

Now suppose U is shrinkable and consider an arbitrary $y \in E$ for which $\mu y < 1$. Let $a = \max(\frac{1}{2}, \mu y) < 1$. Then $\mu\left(\frac{1}{a}\, y\right) = \frac{1}{a}\, \mu y \leqq 1$, so $\frac{1}{a}\, y \in \operatorname{cl} U$ and $y \in a \operatorname{cl} U \subset \operatorname{int} U$, where the last inclusion is justified by shrinkability. Thus $\{x \in E : \mu x < 1\}$ is open and μ must be upper semicontinuous. To establish lower semicontinuity of μ it suffices to show that if $z \in \operatorname{cl} U$, then $\mu z \leqq 1$. But if $\mu z > 1$ then $\mu((\mu z)^{-1/2} z) = (\mu z)^{1/2} > 1$ and

$$(\mu z)^{-1/2} z \subset (\mu z)^{-1/2} \operatorname{cl} U \subset \operatorname{int} U \subset \{x \in E : \mu x < 1\} ,$$

a contradiction completing the proof of Theorem 5.

6. Proposition. *Suppose E is a real or complex Hausdorff linear space, U a shrinkable neighborhood of 0 in E, A the set of all scalars a with $|a| = 1$, and $V = AU$. Then $AV = V$ and V is a shrinkable neighborhood of 0.*

Proof. The first assertion is obvious. For the second, use compactness of A to show that $\mathrm{cl}\, V = A\, \mathrm{cl}\, U$ and then observe that for $t \in [0,1]$ we have

$$t\, \mathrm{cl}\, V = A(t\, \mathrm{cl}\, U) \subset A\, \mathrm{int}\, U \subset \mathrm{int}\, V\, .$$

Results 4., 5., and 6. imply that in every Hausdorff linear space the topology can be generated by a family of continuous absolutely homogeneous "pseudonorms". This answers a question of Landsberg [6 — p. 28]. For locally bounded spaces the result is due to Bourgin [2 — p. 653].

7. Proposition. *In a Hausdorff linear space E every open shrinkable neighborhood is homeomorphic with E.*

Proof. Let U be open and shrinkable at 0, and denote by μ the gauge functional of U at 0. For each $x \in E$, let $hx = (1 + \mu x)^{-1} x$. Since μ is continuous and $U = \{x \in E : \mu x < 1\}$, it is easy to verify that h is a homeomorphism of E onto U.

8. Proposition. *In a Hausdorff linear space E every closed shrinkable neighborhood is a retract of E.*

Proof. Let U be closed and shrinkable at 0, and denote by μ the gauge functional of U at 0. For $x \in E$ let $rx = \begin{cases} x \text{ when } x \in U\, , \\ x/\mu x \text{ when } x \in E \sim U\, . \end{cases}$
Then r is a retraction of E onto U.

Now suppose Y is a topological space and $\mathfrak{X}$ is a class of topological spaces. Then Y is an *extension space* for $\mathfrak{X}$ (an $ES\mathfrak{X}$) provided whenever A is a closed subset of a member X of $\mathfrak{X}$ and f a continuous map of A into Y, then f can be extended to a continuous map of X into Y. And Y is a *neighborhood extension space* for $\mathfrak{X}$ (an $NES\mathfrak{X}$) provided every f as described can be extended to a neighborhood of A in X.

9. Proposition. *Suppose U is a closed shrinkable neighborhood in a Hausdorff linear space E and B is the boundary of U. Then each of the following conditions implies that U is an extension space for $\mathfrak{X}$ and B is a neighborhood extension space for $\mathfrak{X}$:*

E is locally convex and $\mathfrak{X}$ is the class of all metric spaces;

E is a locally convex complete metric linear space and $\mathfrak{X}$ is the class of all collectionwise normal spaces;

E is a separable locally convex complete metric linear space and $\mathfrak{X}$ is the class of all normal spaces.

Proof. Clearly U is contractible and hence by a theorem of Hanner [8 — p. 331] U is an $ES\mathfrak{X}$ if it is an $NES\mathfrak{X}$. And in order to show that U and B are $NES\mathfrak{X}$ it suffices, by other theorems of Hanner [8 — p. 341] to show that each is locally an $NES\mathfrak{X}$. Now by results of Dugundji [4 — p. 357] and Hanner [7 — p. 380, 8 — p. 334] (see also Dowker [3]) each of the above three conditions implies that every closed convex subset of E is an $ES\mathfrak{X}$. Thus to prove Proposition 9 it suffices to show that each point p of B admits neighborhoods re-

lative to U and relative to B which are homeomorphic with closed convex subsets of E. (Or to see that U is an $ES\mathfrak{X}$, refer to Proposition 8.) We may suppose that U is shrinkable at 0 and let f denote a continuous linear functional on E such that $fp = 1$. Let V be a closed convex neighborhood of p in the hyperplane $f^{-1}1$ such that $\mu x > 0$ for all $x \in V$, and let $W = [0, \infty[\, V$. Let $h0 = 0$ and for each $x \in W \sim \{0\}$ let $hx = (fx/\mu x)\, x$. Then h is a homeomorphism of W into W which carries $W \cap U$ onto $[0,1]\, V$ and $W \cap B$ onto V. Since W is a neighborhood of p in E and V and $[0,1]\, V$ are closed and convex, this completes the proof of Proposition 8.

DUGUNDJI's theorem [4] actually asserts that an arbitrary convex subset of a locally convex space is an ES (metric). From this it follows by the above reasoning that in a strictly convexifiable normed linear space, every shrinkable neighborhood is an ES (metric).

All the extension results thus far refer to locally convex spaces. Our sole result for more general spaces is somewhat limited in scope. Let us agree to call a Hausdorff linear space E *admissible* provided every compact subset of E admits arbitrarily small continuous displacements into finite-dimensional linear subspaces of E. These spaces are discussed in [11], where it is proved that an admissible space need not be locally convex.

10. Theorem. *Every admissible complete metric linear space is an extension space for the class of all compact Hausdorff spaces.*

Proof. Let X be a compact Hausdorff space, A a closed subset of X, and f a continuous map of A into an admissible complete metric linear space E. Then fA is a compact subset of E. Let ϱ be a complete invariant strictly monotone metric for E [5]. Since E is admissible, there is a continuous map ξ_1 of fA into a finite-dimensional subspace L_1 of E such that $\varrho(y, \xi_1 y) < \frac{1}{2}$ for all $y \in fA$; with $\varphi_1' = \xi_1 f$, we have $\varphi_1' A \subset L_1$ and $\varrho(fa, \varphi_1' a) < \frac{1}{2}$ for all $a \in A$. And with $g_1 = f - \varphi_1$, we have $g_1 A \subset V(\frac{1}{2}) = \{y \in E : \varrho(y, 0) < \frac{1}{2}\}$. Since L_1 is an ES (normal), φ_1' admits a continuous extension φ_1 mapping X into L_1. Now $g_1 A$ is compact, so by admissibility of E there is a continuous map φ_2' of A into a finite-dimensional subspace L_2 of E such that $\varrho(g_1 a, \varphi_2' a) < 1/4$ for all $a \in A$. With $g_2 = g_1 - \varphi_2'$, we have $g_2 A \subset V(1/4)$. And $\varphi_2' A$ lies in the set $L_2 \cap V(\frac{1}{2} + 1/4)$, which is an ES (normal) by Proposition 9, so φ_2' admits a continuous extension φ_2 mapping X into $V(\frac{1}{2} + 1/4)$. Proceeding in a manner which is now obvious, we obtain a sequence φ_α of continuous maps of A into E and a sequence φ_α of continuous maps of X into E such that

$$g_n = f - (\varphi_1 + \cdots + \varphi_n), \quad g_n A \subset V(2^{-n}) \text{ for } n = 1, 2, \ldots;$$

$$\varphi_n X \subset V(2^{1-n} + 2^{-n}) \text{ for } n = 2, 3, \ldots.$$

Thus the series $\sum_1^\infty \varphi_i$ converges uniformly to a continuous map φ of X into E, and $\varphi a = fa$ for all $a \in A$. The proof of Theorem 10 is complete.

We do not know whether E as described must be an ES (separable metric). This is closely related to a problem of KURATOWSKI [12 — p. 191].

By Propositions 7 and 8, Theorem 10 applies also to open or closed shrinkable neighborhoods in admissible complete metric linear spaces. However, we do not know whether it applies to arbitrary shrinkable neighborhoods or to closed convex sets. Of special interest is the case of compact convex sets, since an outstanding problem is to determine whether (in a metric linear space) a compact convex set must have the fixed-point property, and since the fixed-point property is possessed by every compact metric space which is an ES (compact metric). We note

11. Proposition. *Suppose E is a Hausdorff linear space, U a shrinkable neighborhood of* 0 *in E, and S a compact subset of E which is starshaped from* 0. *Then* $S + U$ is a shrinkable neighborhood of 0.

Proof. For $t \in [0,1]$ we have

$$\operatorname{cl} t(S + U) = tS + t \operatorname{cl} U \subset S + \operatorname{int} U \subset \operatorname{int}(S + U) .$$

From our results 7., 8., 10., and 11. we see that if C is a compact convex subset of a metric linear space, then

1° C is a compact subset of a metric space E;

2° every neighborhood of C in E contains an open (and also a closed) neighborhood which is contractible, locally contractible, and an ES (compact metric);

3° C is contractible;

4° C is locally contractible.

An example of Borsuk [1] shows that a space may satisfy all four conditions without being an ES (compact metric). An example of Kinoshita [10] satisfies 1°, 2°, and 3° but lacks the fixed-point property. However, it seems to be unknown whether the fixed-point property for C follows from 1°, 2°, and 4° —— or from 1°, 3°, and 4°.

References

[1] Borsuk, Karol: Sur un espace compact localement contractile qui n'est pas un rétracte absolu de voisinage. Fundamenta Math. **35**, 175—180 (1948).

[2] Bourgin, D. G.: Linear topological spaces. Am. J. Math. **65**, 637—659 (1943).

[3] Dowker, C. H.: On a theorem of Hanner. Arkiv Mat. **2**, 307—313 (1952).

[4] Dugundji, J.: An extension of Tietze's theorem. Pacific J. Math. **1**, 353—367 (1951).

[5] Eidelheit, M., and S. Mazur: Eine Bemerkung über die Räume von Typus (F). Studia Math. **7**, 159—161 (1938).

[6] Fast, H., and S. Swierczkowski (editors): The New Scottish Book. Wroctaw 1946-1958.

[7] Hanner, Olof: Solid spaces and absolute retracts. Arkiv Mat. **1**, 375—382 (1951).

[8] Hanner, Olof: Retraction and extension of mappings of metric and non-metric spaces. Arkiv Mat. **2**, 315—360 (1952).

[9] Ives, Robert Trull: Semi-convexity and locally bounded spaces. Ph. D. Thesis, University of Washington, Seattle, Washington, U.S.A. June 1957.

[10] Kinoshita, S.: On some contractible continua without fixed-point property. Fundamenta Math. **40**, 96—98 (1953).

[11] Klee, Victor: Leray-Schauder theory without local convexity. Math. Ann. **141**, 286—296 (1960).

[12] Kuratowski, C.: Sur quelques problèmes topologiques concernant le prolongement des fonctions continues. Coll. Math. **2**, 186—191 (1951).

(Received April 6, 1960)

KLEE, V.
Math. Annalen 141, 286—296 (1960)

Leray-Schauder theory without local convexity

By

VICTOR KLEE* in Seattle and Copenhagen

0. Introduction. As initiated by LERAY-SCHAUDER [10] and developed by LERAY [9], NAGUMO [14], ALTMAN [1, 2] and others, the Leray-Schauder theory applies in an arbitrary locally convex Hausdorff linear space E. It assigns a *degree* to certain mappings and establishes properties of the degree which lead to fixed-point and domain-invariance theorems. When E is a Banach space, a recent *homotopy extension* theorem of GRANAS [6] yields many of the useful conclusions of the Leray-Schauder theory while avoiding the more complicated notions of the latter.

The preceding paper [7] discussed the *shrinkable neighborhoods* of a Hausdorff linear space and showed that they resemble convex neighborhoods in certain important respects. We remark now that by the use of shrinkable neighborhoods it is possible to carry over to an arbitrary Hausdorff linear space the Leray-Schauder theory and also the homotopy extension approach of GRANAS. Since the necessary refinements of the existing theory are not difficult, and are mainly technical in nature, it seems superfluous to supply full details. However, the avoidance of local convexity is of interest in that so little is currently known about the structure of spaces which are not locally convex — and therefore we do wish to supply *some* details. We have chosen to discuss Granas's approach, the discussion in § 1 below being little more than a paraphrase of papers of GRANAS [6] and ALTMAN [1,2]. § 2 deals with the approachable sets defined in § 1. For the reader who is primarily interested in extending the Leray-Schauder theory proper, we recommend perusal of the paper [7] and of § 1 below, followed by the papers of NAGUMO [14] and ALTMAN [1, 2].

1. The homotopy extension approach. When T is a topological space and E is a Hausdorff linear space we shall denote by $C(T, E)$ the class of all mappings φ of T into E such that φ is *compact*, this meaning that φ is continuous and φT is a relatively compact subset of E. We denote by $A(T, E)$ the class of all mappings of T into E such that φ is *approachable*, this meaning that for each neighborhood U of the origin 0 in E there exist a finite-dimensional linear subspace L of E and a compact mapping ζ of T into L such that $\zeta t \in \varphi t + U$ for all $t \in T$. Clearly every approachable mapping is continuous, and it is well-known that every compact mapping is approachable when E is locally convex. This holds also for certain spaces which are not locally convex (see § 2) but we do not know whether it is true in general. Thus we shall denote by $CA(T, E)$ the class of all compact approachable mappings of T into E and shall assign to $CA(T, E)$

* Research fellow of the Alfred P. Sloan Foundation.

the role usually played (for locally convex E) by $C(T, E)$ in the Leray-Schauder theory and in the homotopy extension approach of Granas. When $X \subset E$ we shall denote by $D(X, E)$ the class of all mappings f of X into E such that $I - f \in CA(X, E)$, where I is the identity map in E. Mappings f for which $I - f \in C(X, E)$ are often referred to as *completely continuous displacements* or *completely continuous vector fields*. For $p \in E$ we denote by $D_p(X, E)$ the class of all $f \in D(X, E)$ for which $p \notin fX$. Two members f and g of $D_p(X, E)$ are said to be *homotopic in* $D_p(X, E)$ provided there exists $h \in CA(X \times [0,1], E)$ such that with $h_t x = h(x, t)$, then $I - h_0 = f$, $I - h_1 = g$, and always $I - h_t \in D_p(X, E)$ (that is, $h_t x \neq x - p$).

A neighborhood N of the origin in E is said to be *shrinkable* provided $[0,1]\,\mathrm{cl}\,N \subset \mathrm{int}\,N$. As is proved in [7], the gauge functional of such a neighborhood is continuous and every Hausdorff linear space admits a fundamental system of shrinkable neighborhoods of the origin.

The following result is needed as a tool in proving the homotopy extension theorem (Theorem 1.2 below).

1.1 Proposition. *Suppose E is a Hausdorff linear space, S_1 and S_2 are closed subsets of a Hausdorff space, and φ_i is a mapping of S_i into E. Suppose that both φ_1 and φ_2 are approachable, that $\varphi_1 s = \varphi_2 s$ for all $s \in S_1 \cap S_2$, and that S_1 is normal or $S_1 \cap S_2$ is a retract of S_1. Then $\varphi_1 \cup \varphi_2$ is an approachable mapping of $S_1 \cup S_2$ into E.*

Proof. Consider an arbitrary neighborhood U of 0 and let V be a shrinkable open neighborhood of 0 such that $V + V \subset U$, W a neighborhood of 0 such that $W - W \subset V$. Since φ_1 and φ_2 are approachable, there exist finite-dimensional linear subspaces L_1 and L_2 of E and compact mappings ζ_i of S_i into L_i such that $\zeta_i s \in \varphi_i s + W$ for all $s \in S_i$. For each $s \in S_1 \cap S_2$, let

$$\xi s = \zeta_2 s - \zeta_1 s \in (\varphi_2 s + W) - (\varphi_1 s + W) = W - W \subset V .$$

Then $\xi(S_1 \cap S_2) \subset (L_1 - L_2) \cap V$. When S_1 is normal, observe that ξ can be extended to a compact mapping ξ' of S_1 into $(L_1 - L_2) \cap V$, for the latter is homeomorphic with $L_1 - L_2$ by a result in [7], and every compact subset of $L_1 - L_2$ lies in a compact subset which is an extension space for the class of all normal spaces. When S_1 admits a continuous retraction r onto $S_1 \cap S_2$, let $\xi' = r\xi$.

Now let the mapping ζ of $S_1 \cup S_2$ be defined as follows:

$$\zeta s = \begin{cases} \zeta_1 s + \xi' s \ \text{ for } s \in S_1 \\ \zeta_2 s \text{ for } s \in S_2 . \end{cases}$$

Then ζ is compact and $\zeta(S_1 \cup S_2)$ lies in the finite-dimensional subspace $L_1 + L_2$. For $s \in S_1$ we have

$$\zeta s = \zeta_1 s + \xi' s \in (\varphi_1 s + W) + V \subset (\varphi_1 \cup \varphi_2)\, s + U,$$

and for $s \in S_2$,

$$\zeta s = \zeta_2 s \in \varphi_2 s + W \subset (\varphi_1 \cup \varphi_2)\, s + U .$$

Since U was an arbitrary neighborhood of 0 it follows that $\varphi_1 \cup \varphi_2$ is approachable and the proof of 1.1 is complete.

1.2 Theorem. *Suppose E is a Hausdorff linear space, N is a closed shrinkable neighborhood of the origin in E, $N \neq E$, and B is the boundary of N. Suppose $f, g \in D_p(B, E)$, f and g are homotopic in $D_p(B, E)$, and $g \subset g' \in D_p(N, E)$. Then there exists $f' \in D_p(N, E)$ such that $f \subset f'$ and f' and g' are homotopic in $D_p(N, E)$.*

Proof. We assume without loss of generality that $p = 0$. Then by hypothesis there exists $h \in CA(N \times [0,1], E)$ such that $I - h_0 = f$, $I - h_1 = g$, and always $h_t x \neq x$. Let $Y = (B \times [0,1]) \cup (N \times \{1\})$, a closed subset of $N \times [0,1]$, and let $h^* = h \cup (I - g')$. That is, for each $(x, t) \in Y$ define

$$h^*(x, t) = \begin{cases} h(x, t) & \text{when } x \in B\,, \\ (I - g')\,x & \text{when } t = 1\,. \end{cases}$$

Let J denote set of all points of the form $x - h^*(x, t)$ for $(x, t) \in Y$. We wish to show that J is closed in E. Consider a limit v of a net in J; say $x_\alpha - h^*(x_\alpha, t_\alpha) \to v$ where α ranges over some directed set. Since $[0,1]$ is compact and $h^* Y$ is obviously relatively compact, we may assume that $t_\alpha \to t \in [0,1]$ and $h^*(x_\alpha, t_\alpha) \to w \in E$. But then $x_\alpha \to v + w$, and since h^* is continuous it follows that $h^*(x_\alpha, t_\alpha) \to h^*(v + w, t)$. Consequently

$$v = v + w - h^*(v + w, t) \in J\,,$$

and J must be closed.

Since J is closed and $0 \notin J$ there exists $q \in E \sim \{0\}$ such that $[0,1]\, q \subset E \sim J$. Now it can be verified that $N \times [0,1] = [0,1]\, Y$, and in fact each point (x, t) of $N \times [0,1]$ other than $(0,0)$ admits a *unique* expression in the form $r(x, t)\, y(x, t)$ for $r(x, t) \in [0,1]$ and $y(x, t) \in Y$. Specifically,

$$\text{when } \begin{matrix} 0 < t \geqq \mu x \\ 0 < \mu x \geqq t \\ 0 = t = \mu x \end{matrix} \quad \text{then } r(x, t) = \begin{cases} t \\ \mu x \\ 0 \end{cases} \text{ and } y(x, t) = \begin{cases} (x/t, 1) \\ (x/\mu x, t/\mu x), \\ \text{arbitrary} \in Y \end{cases}$$

where μ is the gauge functional of N. Now for each $(x, t) \in N \times [0,1]$ define

$$h^{**}(x, t) = (1 - r(x, t))\, q + r(x, t)\, h^*(y(x, t))\,.$$

Then $h^* \subset h^{**}$ and it is easy to verify that h^{**} is compact; that is, $h^{**} \in C(N \times [0,1], E)$.

Let Z denote the set of all $x \in N$ such that $h^{**}(x, t) = x$ for some $t \in [0,1]$. For a point $x \in N$ the condition that

$$x = (1 - r(x, t))\, q + r(x, t)\, h^*(y(x, t))$$

implies respectively, for the three cases listed above in defining the functions $r(\ ,\ )$ and $y(\ ,\ )$, that

$$\frac{1 - t}{t}\, q = \frac{x}{t} - h^*\left(\frac{x}{t}, 1\right) \in J$$

$$\frac{1 - \mu x}{\mu x}\, q = \frac{x}{\mu x} - h^*\left(\frac{x}{\mu x}, \frac{t}{\mu x}\right) \in J$$

$$q = 0,$$

all impossible when $\mu x \geqq \frac{1}{2}$ by the fact that $q \neq 0$ and $[0,1]\, q \subset E \sim J$. Consequently $Z \subset \frac{1}{2} N$. For each $x \in N$ let $\eta x = 2 \max(\mu x - \frac{1}{2}, 0)$. Then η is a

continuous map of N into $[0,1]$ such that $\eta = 0$ on Z and $\eta = 1$ on B. For all $(x, t) \in N \times [0,1]$, set

$$h'(x, t) = h^{**}(x, 1 - (\eta x)(1 - t)).$$

Clearly $h' \in C(N \times [0,1], E)$. When $x \in B$ or $t = 1$ we have $h'(x, t) = h^{*}(x, t)$, so $I - h'_0 = f' \supset f$ and $I - h'_1 = g'$. Now if $h^{**}(x, 1 - (\eta x)(1 - t)) = x$, then $x \in Z$, whence $\eta x = 0$ and $h'(x, t) = h^{**}(x, 1) = (I - g')\, x$. But $g' \in D_0(N, E)$ so $g' x \neq 0$ and consequently $h'(x, t) \neq x$. Thus to complete the proof of 1.2 it remains only to show that the mapping h' is approachable.

Since h and $I - g'$ are approachable by hypothesis, and since $N \times \{1\}$ is a retract of Y, it follows from Proposition 1.1 that h^{*} is approachable. Now consider an arbitrary neighborhood U of 0 and let V be a neighborhood of 0 such that $[0,1]\, V \subset U$. Since h^{*} is approachable, there is a compact mapping ζ^{*} of Y into a finite-dimensional subspace L of E such that $\zeta^{*}(x, t) \in h^{*}(x, t) + V$ for all $(x, t) \in Y$. Now for each $(x, t) \in N \times [0,1]$ define

$$\zeta^{**}(x, t) = (1 - r(x, t))\, q + r(x, t)\, \zeta^{*}(y(x, t)).$$

Then ζ^{**} maps $N \times [0,1]$ compactly into the subspace $L + Rq$, and

$$\zeta^{**}(x, t) \subset (1 - r(x, t))\, q + r(x, t)\, h^{*}(x, t) + r(x, t)\, V \subset h^{**}(x, t) + U.$$

Consequently h^{**} is approachable, and it is then easily verified that h' is approachable. The proof of 1.2 is complete.

1.3 Corollary. *Suppose E, N, and B are as in 1.2, and $\xi \in CA(N, E)$. Then if ξ admits no fixed point in N, every member f of $D_0(N, E)$ which is homotopic to $I - \xi$ in $D_0(B, E)$ must admit an extension $f' \in D_0(N, E)$.*

Proof. Let $g = I - \xi | B$ and $g' = I - \xi$. The conditions of 1.2 are satisfied and f' must exist as described.

A function $f \in D_p(B, E)$ will be called *p-inessential* provided $f \subset f' \in D_p(N, E)$; if no such f' exists, f is called *p-essential.*

1.4 Theorem. *Suppose E is a Hausdorff linear space, N is a closed symmetric shrinkable neighborhood of 0 in E, $N \neq E$, and B is the boundary of N. Suppose $f \in D_0(B, E)$ and for each $x \in B$ the point fx lies outside the segment* $[0,1]\, f(-x)$. *Then f is 0-essential.*

Proof. Let J denote the set of all points of the form $fx - tf(-x)$ for $x \in B$ and $t \in [0,1]$. Consider an arbitrary point $w \in \mathrm{cl}\, J$. Since $[0,1]$ is compact and $(I - f)\, B$ is relatively compact, there exist nets t_α in $[0,1]$ and x_α in B (where α ranges over some directed set) such that $t_\alpha \to t \in [0,1]$, $x_\alpha - fx_\alpha \to u \in E$, $-x_\alpha - f(-x_\alpha) \to v \in E$, and $fx_\alpha - t_\alpha f(-x_\alpha) \to w$. And

$$(fx_\alpha - x_\alpha) - t_\alpha(f(-x_\alpha) + x_\alpha) + (1 + t_\alpha)\, x_\alpha = fx_\alpha - t_\alpha f(-x_\alpha),$$

so it follows that $x_\alpha \to q \in B$, where $q = (1 + t)^{-1}(w + u - tv)$. Consequently $w = fq - tf(-q) \in J$ and J must be closed.

Now suppose f is 0-inessential, whence $f \subset f' \in D_0(N, E)$. By reasoning similar to that of the preceding paragraph, the set $f'N$ is closed. Since $0 \notin J \cup f'N$, there is a neighborhood U of 0 such that $U - [0,1]\, U \subset E \sim \sim (J \cup f'N)$. Now since $I - f' \in CA(N, E)$, there exist a finite-dimensional

linear subspace L_1 of E and a continuous map ζ of N into a relatively compact subset of L_1 such that $\zeta x \in (I - f')\, x + U$ for all $x \in N$. Choose $b \in B$ and let L denote the linear extension of $L_1 \cup \{b\}$, $N_0 = N \cap L$, and for each $x \in N_0$ let $f_0 x = x - \zeta_0 x$. Then $f_0 \in D(N_0, L)$. If $f_0 x = 0$ for $x \in N_0$, then

$$x = \zeta x \in (I - f')\, x + U = x - f'x + U\,,$$

whence $f'x \in U$; since $x \in N$, this contradicts the choice of U. Consequently $f_0 \in D_0(N_0, E)$. For each $t \in [0,1]$ and $x \in B_0 = B \cap L$ (the nonempty boundary of N_0 relative to L) we have

$$\begin{aligned} f_0 x - t f_0(-x) &= x - \zeta x - t(-x - \zeta(-x)) \\ &\in x - [(I - f)\, x + U] - t(-x - [(I - f)\,(-x) + U]) \\ &= f x - t f(-x) - U + tU\,. \end{aligned}$$

Hence if $f_0 x = t f_0(-x)$ then J intersects the set $U - tU$, again contradicting the choice of U. Thus we have $f_0 \in D_0(N_0, L)$, and for each $x \in B_0$ the point $f_0 x$ lies outside the segment $[0,1]\, f_0(-x)$. In short, the original problem has been reduced to a finite-dimensional one, since by [7] the set N_0 is a shrinkable neighborhood of 0 in L.

Let μ denote the gauge functional of N_0 at 0 in L. Then μ is continuous, and we may extend f_0 to a function η defined on all of L by setting

$$\eta x = \begin{cases} f_0 x & \text{when } x \in N_0 \\ (\mu x) \quad f_0(x/\mu x) & \text{when } x \in L \sim N_0\,. \end{cases}$$

Now the set ζN is a compact subset of L, so L must contain a spherical cell C (in terms of a Euclidean norm for L) which is centered at 0 and is such that $\zeta N - [0,1]\, \zeta N \subset \frac{1}{2} C$. Consider an arbitrary point x of the boundary of C. If $x \in \operatorname{int} N_0$ then clearly $\eta x \notin [0,1]\, \eta(-x)$. If $x \in N_0$ then $\eta x = f_0 x$, $\eta(-x) = f_0(-x)$, and thus if $\eta x = r\eta(-x)$ for $r \in [0,1]$ it follows that $f_0 x = r f_0(-x)$. But $f_0 x \in x - \zeta N$ and $f_0(-x) \in -x - \zeta N$, whence $(1 + r)\, x \in \zeta N - r \zeta N \subset \frac{1}{2} C$, contradicting the choice of C (for $x \in \operatorname{bdry} C$).

Now for each $x \in \operatorname{bdry} C$ and $t \in [0,1]$ let

$$\eta(x, t) = \eta_t x = \frac{1}{1+t}\, \eta x - \frac{t}{1+t}\, \eta(-x)\,.$$

Then since always $\eta x \notin [0,1]\, \eta(-x)$, it is clear that $\eta_t x = 0$. Since $\eta(\ ,\ )$ is continuous and always $\eta_t x \in [0,1]\, \eta C + [0,1]\, \eta C$, it is clear that η_0 and η_1 are homotopic in $D_0(\operatorname{bdry} C, L)$. But of course $\eta_0 = \eta | \operatorname{bdry} C$ and η_1 is an antipodal mapping — that is $\eta_1(-x) = -\eta_1 x$. Since $\eta_0 \subset \eta \in D_0(\operatorname{bdry} C, E)$, it follows by Theorem 1.2 (or by the original homotopy extension theorem of Borsuk) that η_1 can be similarly extended. But η_1 must be essential by Borsuk's well-known theorem on antipodal mappings [3], and the contradiction completes the proof of 1.4.

1.5 Corollary. *With E, N, and B as in 1.4, suppose that $\varphi \in CA(N, E)$ and that for each $x \in B$, x lies outside the segment $[\varphi x, -\varphi(-x)]$. Then there exists $x_0 \in N \sim B$ such that $\varphi x_0 = x_0$.*

Proof. Let $f = I - \varphi$. Then $f \in D_0(B, E)$. Now if (for $x \in B$) $fx = tf(-x)$ for $t \in [0,1]$, then $x = (1+t)^{-1}\varphi x + t(1+t)^{-1}(-\varphi(-x))$, contradicting the hypothesis. Thus f must be essential by 1.4 and the desired conclusion follows from 1.3.

1.6 Corollary. *With E, N, and B as in 1.4, suppose that $\xi \in CA(N, E)$ with $\xi B \subset N$. Then there exists $x_0 \in N$ such that $\xi x_0 = x_0$.*

Proof. By hypothesis, ξN lies in a compact subset of E, and the same is therefore true of the set $Z \bigcup_{x \in N} [\xi x, -\xi(-x)]$. Thus for a sufficiently large k, Z is interior to the neighborhood kN. For $x \in kN$ let us define

$$r x = \begin{cases} x \text{ for } x \in N \\ x/\mu x \text{ for } x \in kN \sim N\,. \end{cases}$$

Then r is a continuous retraction of kN onto N. With B replaced by kB and φ by $r\xi$, the conditions of 1.5 are satisfied and therefore $r\xi$ admits a fixed point x_0. But with $r\xi x_0 = x_0$ we must have $x_0 \in N$. Now we claim $\xi x_0 \in N$. For if $\xi x_0 \notin N$ then $r\xi x_0 \in B$ by the definition of r, whence $x_0 \in B$ and $\xi x_0 \in N$ by hypothesis. Since $\xi x_0 \in N$ we have $r\xi x_0 = \xi x_0$ and consequently $\xi x_0 = x_0$.

1.7 Corollary. *Suppose E is a Hausdorff linear space and J is a compact retract of E which admits arbitrary small continuous displacements into finite-dimensional subspaces of E. Then J has the fixed-point property.*

Proof. Clearly there must exist a closed symmetric shrinkable neighborhood N of 0 in E such that $J \subset N \neq E$. Let r be a continuous retraction of E onto J and r_1 the restriction of r to N. Consider an arbitrary continuous map η of J into itself, and let $\xi = r\eta$. Then the conditions of 1.6 are satisfied by ξ, so ξ admits a fixed point and this is clearly a fixed point for η. The proof of 1.7 is complete.

The second property of J mentioned in 1.7 amounts to the condition that the map $I|J \in C(J, E)$ is approachable. We shall express this more briefly by saying that J is *approachable*. Now consider the following two assertions about a compact convex subset K of a Hausdorff linear space E: A_1: K is a retract of E; A_2: K is approachable. When E is locally convex, A_2 must be true (cf. Nagumo [15]) but A_1 may fail (cf. Michael [12] and Klee [8]). Thus 1.7 does not cover the fact that K must have the fixed-point property when E is locally convex (Tychonoff [19]). However, when E is locally convex and metrizable, A_1 must hold by a theorem of Dugundji [5], a more elementary argument due to Kakutani [14], or, when E is separable and normable, by an especially simple argument involving nearest-point mappings. Thus 1.7 does cover Schauder's theorem [18] to the effect that a compact convex subset of a Banach space must have the fixed-point property. When E is assumed merely to be metrizable, it is unknown whether A_1 or A_2 is true, and also whether K has the fixed-point property. (Schauder's proof in [18] makes implicit use of local convexity.) See [7] for further remarks on this problem.

Now as in 1.4—1.6, let N denote a closed symmetric shrinkable neighborhood of 0 in a Hausdorff linear space E, with $N \neq E$, and let B denote the boundary

of N. Following ALTMAN [2], we say that a function f' on N is a *∂-mapping* provided whenever $x_1, x_2 \in N$ with $f'x_1 = f'x_2$, then $x_1 - x_2 \notin B$.

1.8 Proposition. *Suppose N is a closed symmetric shrinkable neighborhood of 0 in a Hausdorff linear space E, $N \neq E$, and B is the boundary of E. Suppose $f' \in D(N, E)$ and f' is a ∂-mapping on N. Then $f'0 \notin f'B$ and the restriction f of f' to B is $f'0$-essential.*

Proof. The fact that $f'0 \notin f'B$ is immediate from the definition of a ∂-mapping. We assume without loss of generality that $f'0 = 0$. Now for each $x \in B$ and $t \in [0,1]$ let

$$h(x, t) = (I - f')\left(\frac{x}{1+t}\right) - (I - f')\left(\frac{-tx}{1+t}\right),$$

which is well-defined since $[-1,1]\,B \subset N$. It is clear that $h_0 = I - f$, h is continuous, and $h(B \times [0,1])$ lies in the relatively compact set $(I - f')N - (I - f')N$. And if $h_t x = x$, then $f'\left(\frac{x}{1+t}\right) = f'\left(\frac{x}{1+t} - x\right)$, an impossibility since f' is a ∂-mapping. It follows that if the mapping h is approachable, then f and $I - h_1$ are homotopic in $D_0(B, E)$. But it is easily checked that $I - h_1$ is an antipodal mapping and hence must be 0-essential by 1.4. From 1.2 it then follows that f is 0-essential. Thus to complete the proof of 1.8 it remains only to show that h is approachable.

Consider an arbitrary neighborhood U of the origin in E, and let V be a neighborhood of 0 such that $V - V \subset U$. Since $I - f'$ is approachable, there exist a finite-dimensional linear subspace L of E and a compact mapping ζ of N into L such that $\zeta x \in (I - f')\,x + V$ for all $x \in N$. For $(x, t) \in B \times [0,1]$, let $\eta(x, t) = \zeta\left(\frac{x}{1+t}\right) - \zeta\left(\frac{-tx}{1+t}\right)$. Then it is clear that ζ is a compact mapping of $B \times [0,1]$ into $L - L = L$, and that always

$$\eta(x, t) \in h(x, t) + V - V \subset h(x, t) + U\,.$$

Thus h is approachable and the proof of 1.8 is complete.

Now if G is an open subset of E and $\xi \in D(G, E)$, then ξ will be called a *local ∂-mapping* provided for each $p \in G$ there exists a closed symmetric shrinkable neighborhood N_p of 0 such that $p + N_p \subset G$, and such that if $x_1, x_2 \in p + N_p$ with $\xi x_1 = \xi x_2$, then $x_1 - x_2 \notin \mathrm{bdry}\, N_p$.

1.9 Theorem. *Suppose G is an open set in the Hausdorff linear space E, $\xi \notin D(G, E)$, and ξ is a local ∂-mapping. Then ξG is an open subset of E.*

Proof. Consider an arbitrary point $q \in \xi G$; say $q = \xi p$ for $p \in G$. Let $N (= N_p)$ be as in the above definition of local ∂-mapping, and for each $x \in N$ let $f'p = \xi(x + p)$. Let B denote the boundary of N and f the restriction of f' to B. It is evident that $f' \in D(N, E)$, f' is a ∂-mapping on N, and $f'0 = \xi p = q$. Thus by 1.8, $q \notin FB$ and f is q-essential. Now fB is closed by the usual sort of argument, and thus there is a neighborhood W of 0 in E such that $q + [0,1]\,W \subset$ $\subset E \sim fB$. We will show that $q + W \subset fN$, whence $q + W \subset \xi G$ and it follows that ξG is open.

Consider an arbitrary point $w \in W$. For each $x \in B$ and $t \in [0,1]$, let $h(x, t) = (I - f)\,x + tw$. Clearly h is compact and approachable. And if

$h(x, t) = x - q$, then $fx = q + tw$ and $fx \in fB \cap (q + [0,1]\,W)$, an impossibility. Consequently $h \in D_q(B \times [0,1], E)$, and $I - h_0$ and $I - h_1$ are homotopic in $D(B, E)$. But $I - h_0 = f$, which is q-essential, and thus $I - h_1$ is also q-essential by 1.2. Let $g'x = fx - w$ for all $x \in N$. Then $I - h_1 \subset g' \in D(N, E)$, and consequently $g'x = q$ for some $x \in N$. But then $fx = q + w$ and $q + w \in fN$. It follows that $q + W \subset fN$ and the proof of 1.9 is complete.

1.10 Corollary. *Suppose G is an open subset of the Hausdorff linear space E, $\xi \in D(G, E)$, and ξ is locally biunique. Then ξG is an open subset of E.*

GRANAS's homotopy extension theorem [6] was restricted to a Banach space but applied to arbitrary subsets rather than merely to shrinkable neighborhoods. We shall now indicate another easily proved generalization of this theorem. Consider a class $\mathscr{A}$ of subsets of a Hausdorff linear space E, assumed always to be saturated ($A \subset S \in \mathscr{A}$ implies $A \in \mathscr{A}$). For a topological space T, let $C(T, \mathscr{A})$ denote the class of all continuous mappings φ of T into E such that $\varphi T \in \mathscr{A}$. For $X \subset E$, let $D(X, \mathscr{A})$ denote the class of all mappings f of X into E such that $I - f \in C(X, \mathscr{A})$. The definitions of $D_p(X, \mathscr{A})$ and of homotopy in $D_p(X, \mathscr{A})$ are analogous to those given earlier for $D_p(X, E)$.

1.11 Theorem. *Let $\mathscr{A}$ be a saturated class of subsets of a Hausdorff linear space E, X' a subset of E, X a relatively closed subset of X, $p \in E$, and $f, g \in D_p(X, \mathscr{A})$. Assume that f and g are homotopic in $D_p(X, \mathscr{A})$ and $g \subset g' \in D_p(X', \mathscr{A})$. Then each of the following additional conditions guarantees the existence of $f' \in D_p(X', \mathscr{A})$ such that $f \subset f'$ and f' and g' are homotopic in $D_p(X', \mathscr{A})$:*

1° *X' is normal and every member of $\mathscr{A}$ lies in a member of $\mathscr{A}$ which is an extension space for the space $X' \times [0,1]$; $S, S' \in \mathscr{A}$ implies $S \cup S' \in \mathscr{A}$;*

2° *E is locally convex and X' is metrizable; $S, S' \in \mathscr{A}$ implies $S \cup S' \in \mathscr{A}$ and $\operatorname{conv} S \in \mathscr{A}$;*

3° *E is complete, metrizable, and locally convex; $\mathscr{A}$ is the class of all relatively compact subsets of E;*

4° *E is complete, metrizable, and locally convex; $\mathscr{A}$ is the class of all subsets of weakly compact subsets of E.*

Sufficiency of 1° is immediate from the reasoning of GRANAS [6]. That 2° implies 1° follows from DUGUNDJI's extension theorem [5], that 3° implies 2° from a theorem of MAZUR and BOURBAKI [4], and that 4° implies 2° from a theorem of PTAK [16].

2. Admissible spaces. In connection with the material of § 1, it would be of interest to know exactly which Hausdorff linear spaces E have the following property:

P_1 — whenever T is a topological space and φ is a compact mapping of T into E, then φ is approachable.

This condition is clearly equivalent to

P_2 — every compact subset of E is approachable.

A space E which has properties P_1 and P_2 will here be called *admissible*. It is well-known that every locally convex space is admissible (cf. NAGUMO [14]) and we shall establish the admissibility of certain spaces which are not locally

convex. However, we do not know whether all Hausdorff linear spaces are admissible. It would be of special interest to know about admissibility of the space of all measurable real functions on [0,1], in the topology corresponding to convergence in measure.

We do not know whether the completion of an admissible space must be admissible. However, we are able to prove

2.1 Proposition. *If E is a dense linear subspace of an admissible Hausdorff linear space F, then E is also admissible.*

Proof. Consider a compact subset X of E and a neighborhood U of the origin in F. Let V be a neighborhood of 0 such that $V + V \subset U$. By hypothesis there exist a finite-dimensional subspace M of F and a continuous map ζ of X into M such that $\zeta x \in x + V$ for all $x \in X$. Let n denote the dimension of M and let W be an open neighborhood of 0 in E such that V contains the set of all sums of the form $\sum_0^n t_i w_i$ for $|t_i| \leq 1$ and $w_i \in W$. Since the set $Y = \zeta X$ is a compact subset of M, and since E is dense in F, there exists an n-dimensional linear subspace L of E such that $y + W$ intersects L for all $y \in Y$. Now for each $y \in Y$ let Φy denote the convex hull of the set $(y + W) \cap L$. It is easily verified that Φ is lower semicontinuous and, by use of Caratheodory's theorem on the representation of convex hulls, that $\Phi y \subset y + V$ for each $y \in Y$. Since L is finite-dimensional and Y is perfectly normal, a theorem of MICHAEL [13] guarantees the existence of a continuous selection for the carrier Φ; that is, there is a continuous mapping φ of Y into L such that $\varphi y \in \Phi y$ for each $y \in Y$. Then the mapping $\eta = \varphi\zeta$ is a continuous mapping of X into L, and for each $x \in X$ we have

$$\eta x = \varphi\zeta x \in \Phi\zeta x \subset \zeta x + V \subset x + V + V \subset x + U .$$

It follows that X is approachable and the proof of 2.1 is complete.

We shall now establish the admissibility of some spaces which are not locally convex. Following W. ROBERTSON [17], a topological linear space (E, σ) is said to be *ultrabarrelled* provided σ is finer than every topology τ under which (E, τ) is a topological linear space admitting a fundamental system of σ-closed neighborhoods of 0. A *Schauder basis* for a Hausdorff linear space E is a sequence b_α in E such that for each $x \in X$ there is a unique sequence x^α in R for which $x = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n x^i b_i$. From ROBERTSON's version [17] of the Banach-Steinhaus theorem it follows that Schauder bases in ultrabarrelled spaces behave much as they do in Banach spaces. In particular:

2.2 Proposition. *Suppose b_α is a Schauder basis for an ultrabarrelled Hausdorff linear space E and π_α is the associated sequence of projections $\left(\pi_n x = \sum_1^n x^i b_i\right)$. Then the sequence π_α is equicontinuous on every compact set and converges uniformly to the identity mapping.*

For complete metric linear spaces, the result 1.2 is attributed by NIKOL'SKIĬ [15] to MARKOUCHEVITZ [11]. Mrs. ROBERTSON's result is stronger, for she ob-

serves that every topological linear space of the second category is ultrabarrelled.

2.3 Corollary. *If an ultrabarrelled Hausdorff linear space admits a Schauder basis, then it is admissible.*

From 2.3 it is easy to deduce the admissibility of an arbitrary complete metric linear space which admits an unconditional basis (possibly uncountable). In particular, the space $l^p\varkappa$ must be admissible for every $p > 0$ and every cardinal $\varkappa$; for $p < 1$ and $\varkappa \geqq \aleph_0$, this space is not locally convex. Admissibility of $l^p\varkappa$ can also be deduced from the following result.

2.4 Proposition. *Suppose E is a Hausdorff linear space, $0 < \beta < \infty$, and $\langle\ \rangle$ is a continuous function on E such that $\langle 0\rangle = 0$, $\langle rx\rangle \leqq \langle x\rangle$, and $\langle x + y\rangle \leqq \leqq \beta\langle x\rangle + \beta\langle y\rangle$ whenever $x, y \in E$ and $r \in [0,1]$. Suppose L is a finite-dimensional linear subspace of E and P is the set of all $p \in E$ such that $\langle \varphi p - p\rangle = \inf_{y\in L} \langle y - p\rangle$ for a unique point $\varphi p \in L$. If the transformation $\varphi: P \to L$ is discontinuous at a point $p_0 \in P$, then there exists $z \in L \sim \{0\}$ such that $\langle sz\rangle \leqq \beta^2\langle \varphi p_0 - p_0\rangle + \beta^2\langle p_0\rangle$ for all $s \geqq 0$.*

Proof. By hypothesis there is a net p_α in P (α ranging over some directed set) such that p_α is convergent to $p_0 \in P$ but φp_α is not convergent to φp_0. We may assume without loss of generality that φp_α converges to a point $v_0 \in L' = L \cup \{\infty\}$, the one-point compactification of L. If $v_0 \in L$ it follows from continuity of $\langle\ \rangle$ and the definition of φ that

$$\langle v_0 - p_0\rangle = \lim \langle \varphi p_\alpha - p_\alpha\rangle \geqq \lim \langle \varphi p_0 - p_\alpha\rangle = \langle \varphi p_0 - p_0\rangle .$$

But this contradicts the uniqueness assumed for φ, since $v_0 \in L \sim \{\varphi p_0\}$ and $\langle v_0 - p_0\rangle = \inf_{y\in L} \langle y - p_0\rangle$. Thus $v_0 = \infty$ and (replacing p_α by a suitably chosen subnet but retaining the original notation) there must exist a point $z \in L \sim \{0\}$ and a net t_α of positive numbers such that $t_\alpha \to 0$ and $t_\alpha \varphi p_\alpha \to z$. Let s be an arbitrary positive number. Then eventually $st_\alpha < 1$ and we have

$$\begin{aligned}\langle sz\rangle &\leqq \beta\langle sz - st_\alpha \varphi p_\alpha\rangle + \beta\langle \varphi p_\alpha\rangle \\ &\leqq \beta\langle sz - st_\alpha \varphi p_\alpha\rangle + \beta^2\langle \varphi p_\alpha - p_0\rangle + \beta^2\langle p_0\rangle .\end{aligned}$$

Since $\langle\ \rangle$ is continuous and $\langle 0\rangle = 0$ it follows that

$$\langle sz\rangle \leqq \beta^2\langle \varphi p_0 - p_0\rangle + \beta^2\langle p_0\rangle ,$$

completing the proof of 2.4.

References

[1] Altman, M.: An extension to locally convex spaces of Borsuk's theorem on antipodes. Bull. Acad. Polon. Sci. **6**, 293—295 (1958).

[2] Altman, M.: Continuous transformations of open sets in locally convex spaces. Bull. Acad. Polon. Sci. **6**, 297—301 (1958).

[3] Borsuk, K.: Drei Sätze über die n-dimensionale Euklidische Sphäre. Fundamenta Math. **20**, 177—190 (1933).

[4] Bourbaki, N.: Espaces vetoriels topologiques. Chaps. I—II, Actualités Scientifique et Industrielles, No. 1189. Paris 1953.

[5] DUGUNDJI, J.: An extension of Tietze's theorem. Pacific J. Math. 1, 353—367 (1951).
[6] GRANAS, A.: Extension homotopy theorem in Banach spaces and some of its applications to the theory of nonlinear equations (Russian with English summary). Bull. Acad. Polon. Sci. 7, 387—394 (1959).
[7] KLEE, VICTOR: Shrinkable neighborhoods in Hausdorff linear spaces. Math. Ann. 141, 281—285 (1960).
[8] KLEE, VICTOR: Convex bodies and periodic homeomorphisms in Hilbert space. Trans. Am. Math. Soc. 74, 10—43 (1953).
[9] LERAY, J.: La théorie des points fixes et ses applications en analyse. Proc. Int. Congress Math., Cambridge, Mass. 2, 202—208 (1950).
[10] LERAY, J., and J. SCHAUDER: Topologie et équations fonctionelles. Ann. sci. école norm. super. (3) 51, 45—78 (1934).
[11] MARKOUCHEVITZ, A. I.: Certain questions in the theory of approximation and expansion of functions in series (Russian). Doctoral dissertation, 1944.
[12] MICHAEL, ERNEST: Some extension theorems for continuous functions. Pacific J. Math. 3, 789—806 (1953).
[13] MICHAEL, ERNEST: Continuous selections I. Ann. Math. (2) 63, 361—382 (1956).
[14] NAGUMO, MITIO: Degree of mapping in convex linear topological spaces. Am. J. Math. 73, 497—511 (1951).
[15] NIKOL'SKIĬ, V. N.: Best approximation and basis in a Frechet space (Russian). Doklady Akad. Nauk S.S.S.R. (N. S.) 59, 639—642 (1948).
[16] PTAK, VLASTIMIL: Weak compactness in convex topological linear spaces. Czechoslov. Math. J. 4, 175—186 (1954).
[17] ROBERTSON, WENDY: Completions of topological vector spaces. Proc. London Math. Soc. (3) 8, 242—257 (1958).
[18] SCHAUDER, J.: Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. Studia Math. 2, 171—180 (1930).
[19] TYCHONOFF, A.: Ein Fixpunktsatz. Math. Ann. 111, 767—776 (1935).

(Received April 6, 1960)

SUBRAHMANYAM, N. V.
Math. Annalen 141, 297--310 (1960)

Structure theory for a generalised Boolean ring

By

N. V. SUBRAHMANYAM in Waltair, India

To Professor V. Ramaswami

§ 0. Introduction

0.0: Let R be any (associative) ring, in which

P_1: each element has a *minimal idempotent duplicator* in the centre of R; i.e. if $a \in R$, there exists an idempotent a^0 in the centre of R such that (i) $aa^0 = a$, and (ii) for every idempotent e which satisfies $ae = ea = a$, must $a^0 e = a^0$.

Such a ring R seems to be a natural generalisation for a Boolean ring (in terms of its lattice structure) and it includes all the known generalisations for ([3]) Boolean rings, the regular rings of VON NEUMANN with identity and without non-zero nilpotent elements etc., and further the so-called *associate rings* of IRVING SUSSMAN [3] which embrace all these classes of rings and also the biregular rings of ARENS and KAPLANSKY etc. For these rings, the author has extended [2] the lattice theory [3] of SUSSMAN for associate rings and has also shown, by means of examples, that a P_1-ring (i.e. a ring with property P_1) actually belongs to a wider class than the class of associate rings; and it was shown in [2] that a P_1-ring (and hence an associate ring) is composed of certain maximal sets, which are distributive lattices (Boolean rings), all isomorphic to one another: precisely, we have proved (see theorem 5 [2]) that each element of a P_1-ring is contained in a maximal set which is lattice isomorphic to the set R_0 of idempotents in it; and we were tempted to conjecture (which we shall disprove in this paper) to the effect that *all* the maximal sets are lattice isomorphic to one another (see Cor. 10.2 [2]). Further, a P_1-ring was shown to be isomorphic to a subdirect sum of subdirectly irreducible rings, each with unity element and (so) without other non-zero idempotent elements.

0.1: In the present paper, we examine the principal ideal structure of a P_1-ring satisfying the *atomistic condition* (see below for definition) and show that such a ring is isomorphic to a "*special*" subdirect sum of the ideals generated by its atomic idempotents, with further specialisations under additional conditions. These results extend those of IRVING SUSSMAN [4] for associate rings (to P_1-rings) which were obtained under the *complete atomistic condition* and thus present improvements even in this case; also we shall show that many of our structure theorems *cannot be improved*. Finally, we obtain conditions on a P_1-ring which are necessary to render it an associate ring, and also present, in the last section, an example which seems to suggest certain directions in which the author's lattice theory for P_1-rings may be extended.

I wish to record here my *very deep obligations* to Professor IRVING SUSSMAN, University of Santa Clara, California for sending me a copy of [4] *prior to its publication*.

§ 1. Preliminaries and the Basic Theorem

1.0: We recall from [2] the following definitions and lemmas for P_1-rings, needed in the present paper (unless specified otherwise, R will denote, throughout this paper, a P_1-ring):

Definition 1: (i) $a < b$ if and only if $a^0 b = a$ *(enclosure)*,
(ii) $a \sim b$ if and only if $a^0 b = a b^0$ *(compatibility)*.

It may easily be verified that the above definition (ii) is equivalent to the following

Definition 2: Two elements of R are said to be *compatible* if and only if they have a common *majorant*.

Obviously, $0^0 = 0$; and we also have the following lemmas from [2]:

Lemma 1: All the idempotents of R belong to the centre of R.

Lemma 2: If $e^2 = e$, then $(ae)^0 = a^0 e$ for every a and e in R.

Lemma 3: If $a < b$, then $a^0 < b^0$; and $a^0 = b^0$ together with $a < b$ implies $a = b$.

1.1. Now, we give the following definitions and lemmas of the present paper:

Definition 3: An element a in R is called an *atom* if and only if (i) $a \neq 0$, and (ii) $x < a$ implies either $x = 0$ or $x = a$.

We have immediately,

Lemma 4: An element a in R is an atom if and only if a^0 is an atom.

Proof: Suppose a is an atom; then obviously $a^0 \neq 0$ and let $0 \neq e < a^0$. Then $e^0 a^0 = e \neq 0$ and hence, by lemma 2, $a^0 e \neq 0$. Further e is an idempotent and hence, again by the same lemma, $ae \neq 0$. But $ae < a$ and this is a contradiction unless $ae = a$ (since a is an atom), in which case $e = a^0 e = a^0$ so that a^0 is an atom.

Conversely, if a^0 is an atom and a is not an atom, then there exists an element $x \neq 0$ such that $x < a$ and $x \neq a$; then however, $x^0 < a^0$ and $x^0 \neq 0$ so that $x^0 = a^0$. But this implies $x = a$, which is a contradiction to the choice of x and hence a is an atom. *Q. E. D.*

Definition 4: A P_1-ring R is said to be *atomistic* if and only if each non-zero element in R contains an atom.

We now prove the following theorem which shows that, in order to verify a P_1-ring for the atomistic condition, it is *enough* if we examine the set of all its idempotents.

Theorem I: *A P_1-ring R is atomistic if and only if R_0, the set of all its idempotents, is atomistic.*

Proof: We observe that if e is an idempotent and $e' < e$, then e' is also an idempotent; hence if R is atomistic and $e \in R_0$, then every atom contained in e is in R_0 and so R_0 is atomistic.

Conversely, suppose that R_0 is atomistic and let a be any element of R, which is not an atom. Then a^0 cannot be an atom by lemma 4, and let e be an atom contained in a^0. We assert that ae is an atom, which is contained ob-

viously (we may assume $a \neq 0$) in a. To this end, we notice that $ae \neq 0$, since $(ae)^0 = a^0 e = e \neq 0$; and let $0 \neq x < ae$. Then $0 \neq x^0 < a^0 e = e$; but, e being an atom, this implies $x^0 = e$ and hence $x^0 = (ae)^0$; and this, together with $x < ae$, implies $x = ae$. Thus ae is an atom. *Q. E. D.*

We have proved in [2] that each element of a P_1-ring R is contained in a maximal compatible set, which is a distributive lattice (lattice) isomorphic to R_0. It is obvious now that for a P_1-ring to be atomistic, it is sufficient if one such maximal set is atomistic.

Definition 5: (i) An ideal (two sided) generated by an idempotent in R is called an *idem-ideal*; and (ii) an idem-ideal generated by an atomic idempotent is called an *atomic ideal.*

We have immediately the following obvious

Lemma 5: Every idem-ideal of an atomistic P_1-ring contains an atomic ideal.

Proof: Let (e) be any idem-ideal and let e' be any atom contained in e; then $e'e = e'$ so that $e' \in (e)$. Hence the atomic ideal (e') is contained in (e). *Q. E. D.*

It is natural to wonder at this stage how an idem-ideal is related to the atomic ideals contained in it; we shall, however, postpone this discussion to a latter section (see theorem V below) and prove the following theorem now, basic for further results of this paper:

Theorem II: *An atomistic P_1-ring R is isomorphic to a "special" subdirect sum of its atomic ideals.*

1.2: We divide the proof of this theorem into the following lemmas:

Lemma 6: To each a in an atomistic P_1-ring R corresponds an atomic idempotent e such that $ae \neq 0$, unless $a = 0$.

Proof: If $a \neq 0$, then $a^0 \neq 0$; and let e be any atom contained in a^0. Then e is an atomic idempotent and $a^0 e = e \neq 0$ so that $ae \neq 0$. *Q. E. D.*

Lemma 7: If (e_1) and (e_2) are distinct atomic ideals in a P_1-ring R, then they have no non-zero element in common.

Proof: Since e_1 and e_2 are atoms $e_1 e_2 = 0$. Now if a is an element of both (e_1) and (e_2), then $ae_1 = a = ae_2$; and hence $a = 0$.

Lemma 8: Every idem-ideal of a P_1-ring (in fact, any ring) R is a *direct component* of R.

Proof: Since each idem-ideal has the *unity* element, this follows by lemma 2 of [1] (page 872). *Q. E. D.*

In fact, if (e) is any idem-ideal (we shall suppose that, in the case of any ring, e is also a central element), then the set of all elements of the form $x - xe$ (which we shall denote by R_e) is a two sided ideal of R, and $R = (e) \oplus R_e$. We also require

Lemma 9: If J is the set of all the atomic idempotents of an atomistic P_1-ring R, then the intersection of all the ideals R_e, e in J, is the zero ideal (0).

Proof: If $x \in R_e$, then $xe = 0$ and hence this lemma follows from lemma 6 above. *Q. E. D.*

We observe that a P_1-ring R has no non-zero *annihilator*; and now the above theorem II is a consequence of the lemmas 7, 8 and 9 above, and the following theorem 15 of [1] (page 873):

Theorem: *Let R be a ring with no non-zero annihilator; and let $\{B_i\}$ be a set of two sided ideals in R. Necessary and sufficient conditions that R be isomorphic to a "special" subdirect sum of the ideals B_i, are*

(i) $B_i \cap B_j = (0)$ for $i \neq j$,

(ii) for each i, B_i is a direct component of R, that is, there exists a (unique) two sided ideal A_i in R such that $R = B_i \oplus A_i$, and

(iii) $\Pi A_i = (0)$.

We have only to take the atomic ideals (e) for the B_i, and the ideals R_e for A_i.

Q. E. D.

Since each atomic ideal is a special P_1-ring (see [2]), we have at once,

Corollary II: An atomistic P_1-ring is isomorphic to a special subdirect sum of all the special P_1-rings contained in it.

It is obvious that the converse of this theorem also holds, since any special subdirect sum of rings R_i, each with identity and without other non-zero idempotents satisfies the atomistic condition. In other words, a P_1-ring is atomistic *if and only if* it is (isomorphic to) a special subdirect sum.

Note: It is not necessary that a special subdirect sum of rings, each with unity element and without other non-zero idempotents should be a P_1-ring. To see this, consider the set of all real (or complex) sequences $\{a_n\}$ such that $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, with component wise addition and multiplication.

1.3: Now, the various steps used in the proof of theorem II can easily be modified to prove the following theorem for a general P_1-ring:

Theorem III: *Every P_1-ring is isomorphic to a subdirect sum of all its idem-ideals.*

Thus in the case of a P_1-ring satisfying the atomistic condition, we have a *minimal representation* in terms of its atomic ideals; and in the following section we turn to P_1-rings satisfying a certain *minimum condition.*

§ 2. Finitary P_1-Rings

2.0: Definition 6: A P_1-ring is said to be *finitary* if and only if every strictly descending sequence of its elements is *necessarily* finite. (We shall also write $b > a$ instead of $a < b$.)

We might at once prove, along the lines of theorem I, the following:

Theorem IV: *A P_1-ring is finitary if and only if the lattice of all its idempotents satisfies the descending chain condition.*

We omit the proof of this theorem and, instead, prove

Lemma 10: Each idempotent element of a finitary P_1-ring contains only a finite number of atoms; thus a finitary P_1-ring is also atomistic.

Proof: We shall first show that each idempotent of a finitary P_1-ring contains an atom. Let us assume that e is an idempotent which contains no

atom, so that every idempotent contained in e also does not contain any atom. Let $0 \neq e_1 < e$, $0 \neq e_2 < e - e_1$, etc. We then have $e > e - e_1 > e - e_1 - e_2 > \cdots$.

We may suppose that the choice of the idempotents $e_1, e_2, e_3, \ldots$ is such, as to ensure strict enclosure everywhere and thus we have an infinite strictly descending sequence of elements, contradicting the finitary character of the P_1-ring. Hence e necessarily contains an atom. Thus, by theorem I, a finitary P_1-ring is also atomistic.

Next, let e be any idempotent and e_1 an atom contained in e, e_2 an atom contained in $e - e_1$, e_3 an atom contained in $e - e_1 - e_2$, and so on. Since $e > e - e_1 > e - e_1 - e_2 > \cdots$, we must have, for some finite integer n, $e = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$. If now e' is any atomic idempotent contained in e', $e' = e'e = e'(e_1 + e_2 + \cdots + e_n) = e'e_1 + e'e_2 + \cdots + e'e_n$. However, for each i, $e'e_i = 0$ or e'; and hence e' must be one and exactly one of the atoms $e_1, e_2, e_3, e_4, \ldots, e_n$. *Q. E. D.*

In view of lemma 4 above, we have at once the following corollary to lemma 10:

Corollary 10.1: Each element of a finitary P_1-ring contains only a finite number of atoms.

2.1: We next prove a necessary and sufficient condition that a P_1-ring may be finitary:

Theorem V: *A P_1-ring is finitary if and only if each of its idem-ideals is the union of (minimal ideal containing) all the atomic ideals contained in it.*

Proof: Suppose R is a finitary P_1-ring. If (e') be any atomic ideal contained in the idem-ideal (e), then $e'e = e'$ and hence e' is one of the atoms contained in e. But there are only a finite number of atoms contained in e, and hence only a finite number of atomic ideals (e_i) contained in (e). Also $e = e_1 + e_2 + \cdots$ $\cdots + e_n$, and thus e belongs to the union of all these atomic ideals, which therefore contains (e). The reverse inequality is obvious and hence (e) is the union of all the atomic ideals contained in it.

Conversely, let (e) be the union of all its atomic ideals $\{(e_\alpha)\}$, so that $e = x_1 + \cdots + x_n$ with x_i in (e_{α_i}). Then however, $e_{\alpha_i}e = e_{\alpha_i}x_i = x_i$ and hence $x_i = e_{\alpha_i}$ for $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Thus $e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}, e_{\alpha_3}, e_{\alpha_4}, \ldots, e_{\alpha_n}$ are all the atoms contained in e and hence the ring is finitary. (Note: we have tacitly assumed in proving the converse that the ring is atomistic.) *Q. E. D.*

It is obvious that, in the above, $(e) = (e_{\alpha_1}) \oplus \cdots \oplus (e_{\alpha_n})$. Hence we have the

Corollary V.1: Each idem-ideal of a finitary P_1-ring is the direct sum of its atomic ideals; hence, a finitary P_1-ring with unity element is the direct sum of all its atomic ideals.

2.2: We shall next prove the main theorem of this section:

Theorem VI: *Every finitary P_1-ring is isomorphic to a discrete direct sum of its atomic ideals.*

Proof: Since a finitary P_1-ring is atomistic (see lemma 10 above), it is enough, in view of theorem II above, if we show that each element of the ring is annihilated by *all* but a finite number of atomic idempotents; and this is

easy, since each a is annihilated by all the atomic idempotents not contained in a^0 and a^0 contains only a finite number of atoms. Thus the proof is completed.

Q. E. D.

Since any P_1-ring satisfying the minimum condition on its two sided ideals is finitary (the converse is obviously false), we also have

Corollary VI.1: A P_1-ring satisfying the minimum condition on its two sided ideals is isomorphic to a discrete direct sum of its atomic ideals.

2.3: It is quite natural that one should ask at this stage, whether a "dual" definition of finitary rings in terms of ascending chain conditions would not yield parallel results. But, surprisingly enough, we have the following theorem, whose converse is at once shown to be false by example 1 [2]:

Theorem VII: *A P_1-ring in which every strictly increasing sequence is necessarily finite, is finitary.*

Proof: It is enough if we examine the set of idempotents; and let $e_1, e_2, e_3, \ldots$ be any strictly descending sequence of idempotents. Then, $e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_1 - e_4, \ldots$ is a strictly increasing sequence of elements and hence, for some integer n, $e_1 - e_n = e_1 - e_{n+1} = e_1 - e_{n+2} \ldots$ so that $e_1, e_2, e_3, e_4, \ldots$ is a finite sequence. Thus the ring is finitary and the proof is completed. *Q. E. D.*

We now specialise the P_1-rings in the following section in another direction.

§ 3. Complete P_1-Rings

3.0: Definition 7: We shall call a P_1-ring *complete* if and only if every subset in it of mutually compatible elements has *the least upper bound*; i.e. if M is any compatible set in a P_1-ring R, there exists an element u in R such that (i) $a < u$ for all a in M, and (ii) if $a < x$ for all a in M, then $u < x$. (See Definition 2 above.)

We do not require that u should belong to M; however it follows that in a complete P_1-ring every maximal set has the *uni-element* (which, by definition belongs to it) and hence we have

Theorem VIII: *In a complete P_1-ring all the maximal sets are isomorphic (as lattices or as Boolean rings) to each other.*

Proof: For, if u is the uni-element of a maximal set M in a complete P_1-ring R, then $M = uR_0$, where R_0 is the set of all the idempotents in R.

Q. E. D.

We observe that the converse of this theorem is not true, as is shown by the example 1 [2], nor can we omit the condition of completeness in the above theorem (even in the presence of atomistic condition) as the following example shows; and this incidentally disproves a conjecture made by the author (see Cor.: 10.2 [2]) about the σ-isomorphism of a maximal set into the set of idempotents:

Example 1: Let R be the set of all integral sequences $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ where the set of all the *distinct* integers a_i is only finite; then, under the componentwise addition and multiplication, R is an atomistic P_1-ring with unity element.

We notice that R is not complete, although the set R_0 of all its idempotents is a complete atomistic Boolean Algebra; for, if M is a subset of R consisting of all the elements $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ where $a_i = i$ in a finite number of places and zeroes elsewhere, then M (i) is a maximal set in R, (ii) has no uni-element and (iii) is not σ-isomorphic (in the sense of [2]) *onto* R_0.

We finally remark that this ring R is *actually* an associate ring and hence, even in the case of associate rings, all the maximal sets are *not* necessarily isomorphic to one another. Also the analogue of theorem I *is not* true in the case of P_1-rings satisfying the condition of completeness. Further, it is not difficult to modify this example suitably to show that, even for an infinite cardinal β, β-completeness *cannot* replace completeness in the above theorem.

3.1: We shall now prove the following basic theorem of this section:

Theorem IX: *An atomistic P_1-ring R is complete if and only if every subset A of pairwise disjoint atoms in R has the least upper bound.* (We shall call a_1 and a_2 disjoint if and only if $a_2^0 a_1^0 = 0$.)

Proof: We observe that, since the atoms in A are disjoint in pairs, A is a compatible set; and hence follows that in a complete P_1-ring, A has the least upper bound.

Conversely, suppose that every subset of pairwise disjoint atoms in R has the least upper bound; and let M be any subset in R of mutually compatible elements. Further suppose that A is the set of all atoms in R each of which is contained in at least one element of M; we shall show, first of all, that the atoms in A are disjoint in pairs. For this, let $a_1, a_2 \in A$; and suppose that $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$ with b_1 and b_2 in M, so that we have $a_1 = a_1^0 b_1$, $a_2 = a_2^0 b_2$, and also $b_1^0 b_2 = b_1 b_2^0$. Then,

$$a_1^0 a_2 = (a_1^0 b_1)^0 (a_2^0 b_2) = a_1^0 b_1^0 a_2^0 b_2 = a_1^0 b_1 a_2^0 b_2^0 = (a_1^0 b_1)\,(a_2^0 b_2)^0 = a_1 a_2^0$$

so that $a_1 \sim a_2$. Also, since a_1 and a_2 are atoms, a_1^0 and a_2^0 are also atoms (see lemma 4) and either $a_1^0 a_2^0 = 0$ or $a_1^0 = a_2^0$. However, if $a_1^0 a_2^0 = 0$, a_1 and a_2 are disjoint; and if $a_1^0 = a_2^0$, $a_1 = a_2$ since $a_1 \sim a_2$. Thus A is indeed a set of pairwise disjoint atoms and let u be the least upper bound of A. We assert that u is also the least upper bound of M.

To prove this, let us write, for an arbitrary but fixed a in M, $x = a - a^0 u$. If now e is any atom contained in a^0, then ae is an atom contained in a, and hence, by the construction of u, $ae < u$ so that $ae = (ae)^0 u = a^0 eu$ and hence $xe = ae - a^0 ue = 0$. Again, if e is an atom *not* contained in a^0, $a^0 e = 0$ so that $ae = 0$; therefore $xe = 0$. Thus $xe = 0$ for every atomic idempotent and so $x = 0$ (in view of lemma 6). Hence $a = a^0 u$ *or* $a < u$ for all a in M, or in other words, u is an upper bound of M.

Finally, if $a < x$ for all a in M, then for every atom a' in A, $a' < x$ so that $u < x$; and the proof is completed. *Q. E. D.*

3.2: We now extend, in the following main theorem of this section, the well known result on the representation of complete atomistic Boolean rings:

Theorem X: *A complete atomistic P_1-ring is isomorphic to the (full) direct sum of its atomic ideals.*

Proof: This theorem easily follows from the above theorem and the theorem II; but we shall give an *apparently* different and direct proof:

Let $\{(e_i)\}$ be the set of all the atomic ideals in a complete atomistic P_1-ring R and let E be the (full) direct sum of all these ideals. We shall define a mapping φ of R into E, by $\varphi(a) = \{ae_i\}$ for a in R. (We notice that for each i, $ae_i \in (e_i)$.) Now if $\{a_i\}$ is any element of E, where for each i, $a_i \in (e_i)$, then each a_i is an atom or zero so that the elements a_i form a compatible set in R and let a be the least upper bound of this set. Since $a_i^0 = e_i$ for each i, we have $ae_i = aa_i^0 = a_i$ for all i, and hence $\varphi(a) = \{ae_i\} = \{a_i\}$ so that we have $\varphi(R) = E$.

Also, if $\varphi(a) = \varphi(b)$, then $ae_i = be_i$ for every atom e_i and hence $a = b$; and thus φ is one-one. It is now easy to verify that φ is actually an isomorphism, and this completes the proof. *Q. E. D.*

Since a finitary P_1-ring is both complete and atomistic (complete, because each maximal set is finite) *when endowed with the unity element*, the corollary VI.1 is also corollary X.1.

3.3: We notice that a full direct sum R of rings R_i, each with unity element and without other non-zero idempotents, is a complete atomistic P_1-ring; also in such a ring R, all the maximal sets are isomorphic (as lattices or as Boolean rings) to each other. One might then be tempted to ask whether a P_1-ring R, in which all the maximal sets are lattice-isomorphic to each other, is *at least* atomic (it need not be complete, as the example 1 [2] shows); but the answer is at once provided, in the negative, by a non-atomistic Boolean ring. Thus, the preceding two theorems do not seem to admit any improvements. Also, by the *example 1* of this section, the theorem 5 [2] is the best possible in that direction (even when restricted to associate rings).

3.4: Finally, we remark that the completeness condition placed by SUSSMAN [4] for associate rings is distinctly weaker than the completeness condition placed in this paper on P_1-rings (see *example 1* of this section), but much more stronger than the atomistic condition we have imposed (see theorem I). Nevertheless, SUSSMAN's weaker conditions *do not yield any results comparable to those of the present section* (under our stronger condition of completeness), *nor do they give any results* (once again, by the example of this section) *stronger than those, obtained in this paper under merely the atomistic condition.*

We shall, in the following section, turn to a class of rings, which seem to be immediate generalisations over Sussman's associate rings.

§ 4. Multiplicative-domain Rings

4.0: To begin with, we shall try to give an insight into the extent to which a P_1-ring generalises the concept of Sussman's associate ring, by constructing a P_1-ring R with unity element, which is a subdirect sum of domains of integrity (each with unity element), but not an associate ring; thus, we shall show that an associate ring is not *merely* a P_1-ring (with unity element) which is a subdirect sum of domains of integrity (although this looks pretty obvious):

Example 2: Let R be the set of all ordered triads (l, m, n) where l is an integer, and m, n are even integers; we shall define addition component wise,

and multiplication by $(l,m,n)(l',m',n')=(ll',lm'+l'm+mm',ln'+l'n+nn')$. Then, this ring R (which, it can be verified directly, is isomorphic to the minimal ring with unity element and containing the direct sum of a pair of rings, each identical with the ring of even integers) is a commutative ring with unity element $(1,0,0)$ and without other non-zero idempotent elements. Further, it contains no non-zero nilpotent elements and hence, by a well known theorem of N. H. McCoy (see for e.g., theorem 4 [1]; page 860), is isomorphic to a subdirect sum of integral domains, each with unity element. This is, however, not an associate ring, since in such a ring $a^0 = 1$ implies that a is a non-0-divisor, while in this ring R (which is at once seen to be a P_1-ring) $a^0 = 1$ for every $a \neq 0$ and R is *not* free of zero-divisors.

4.1: We shall now introduce a sub-class of P_1-rings by the following:

Definition 8: A P_1-ring R is called a *multiplicative-domain ring* (or simply, an *m-domain ring*) if and only if $(ab)^0 = a^0b^0$ for all a and b in R.

In an associate ring (a subdirect sum of domains of integrity R_i, each with unity element), $(ab)_i^0 = 1_i \in R_i$ if and only if $(ab)_i \neq 0_i \in R_i$ and hence, if and only if both $a_i \neq 0_i$ and $b \neq 0_i$, so that $a_i^0 b_i^0 = 1_i \in R_i$; thus an associate ring is clearly an m-domain ring. Also, the example 1 [2] shows that every m-domain ring is not necessarily an associate ring; and now the question arises whether the generality claimed for an m-domain ring (we notice that such a ring contains no non-zero nilpotent elements) goes beyond the mere absence of the unity element in an associate ring. Now, the following example shows that an m-domain ring need not be an associate ring, even in the presence of the unity element (see the remarks following the example):

Example 3: Let R be the set of all ordered couples (x, y) where x is an integer, and $y = 0$ or 1 in the two-element field (2) of residue classes modulo 2, according as x is even or odd; and let addition and multiplication be defined in R component wise. Then, R, being isomorphic to the ring of integers, is free of zero-divisors, has no non-zero idempotent elements other than its unity element and *hence* an m-domain ring. But this is not an associate ring, since for e.g. $(2, 0)^0$ is $(1, 1)$ and not $(1, 0)$ (an element which does not exist in R). We finally remark that R is a subdirect sum of the ring of integers and the two-element field (2), both of which are integral domains; thus an m-domain ring, even if given to be a subdirect sum of domains of integrity and is endowed with the unity element, need not be an associate ring.

4.2: We observe that the representation of a ring R, as a subdirect sum of rings R_i, is by no means unique; and it might be argued that the above ring may be capable of a representation as a subdirect sum of integral domains, which exhibits it as an associate ring. In fact, the above ring R, being free of zero-divisors, is itself an integral domain and hence (!) an associate ring (a contradiction ?). But, in the opinion of the author, it is the subdirect sum representation that *counts*, since, even in the commutative case, an associate ring (as for instance in the above example 3) may not contain, with each a its "associated idempotent" a^0, if given a different representation as a subdirect sum of domains of integrity, even with unity elements granted to each of them.

(See also [3]; page 328.) Further, this example shows that even an isomorphic image of an associate ring is not necessarily an associate ring; and this seems to be very much disappointing.

Hence, we would be advised to ask only for conditions under which a P_1-ring (an m-domain ring) is isomorphic to (i.e. can be exhibited as) an associate ring; and *this* we shall mean in asking when a P_1-ring *is* an associate ring. But, whether an m-domain ring with unity element is not (apart from this logical distinction) an associate ring, *remains an open question*. (See theorem XII below.)

On the other hand, every isomorphic image of any P_1-ring is also a P_1-ring. For, if $\sigma(R)$ is the isomorphic image, under the mapping σ, of a P_1-ring R, then $\sigma(a)\,\sigma(a^0) = \sigma(a)$, and if $\sigma(a)\,\sigma(e) = \sigma(e)\,\sigma(a) = \sigma(a)$ then $ae = ea = a$ so that $a^0e = a^0$ and hence $\sigma(a^0)\,\sigma(e) = \sigma(a^0)$ and thus $\sigma(R)$ is a P_1-ring. Also, if an m-domain ring is a special P_1-ring then it is a domain of integrity. Finally, let $\sigma : a' = \sigma(a)$ be a homomorphism of a P_1-ring R into another P_1-ring R'. It follows easily that $(a')^0 < '(a^0)'$ so that if $a < b$, then $(a')^0 b' = (a')^0 (a^0)' b' = (a')^0 (a^0 b)' = (a')^0 a' = a'$ and hence σ is order-preserving. If further σ is an isomorphism, we have, since $\sigma^{-1}\{\sigma(a)\} = a$, also

$$a^0 = \{\sigma^{-1}(a')\}^0 < \sigma^{-1}\{(a')^0\} < \sigma^{-1}\{(a^0)'\} = a^0$$

so that $(a')^0 = (a^0)'$ and we may denote the enclosure in both the rings by the same symbol. Thus we have proved:

Theorem XI: *If σ is a homomorphism of a P_1-ring R into another P_1-ring R', then σ is also order-preserving; and if σ is actually an isomorphism, we have, in addition, $\sigma(a^0) = \{\sigma(a)\}^0$ for each a in R.*

4.3: We shall now see, in the rest of this section, that m-domain rings share with the associate rings many of their agreeable properties (see [4]):

Lemma 11: Every atomic ideal of an m-domain ring is a domain of integrity.

Proof: We observe that for each $a \neq 0$ in the atomic ideal (e), $a^0 = e$ so that whenever $a \neq 0$, $b \neq 0$ in (e) of an m-domain ring, $(ab)^0 = a^0 b^0 = e \neq 0$ and hence $ab \neq 0$. *Q. E. D.*

Following SUSSMAN [4], we shall now make the following

Definition 9: An idem-ideal of a P_1-ring is called an *ideal-domain* if and only if it is also a domain of integrity; and a P_1-ring is said *to satisfy the ideal-domain condition* if and only if each of its idem-ideals contains an ideal-domain.

We are now ready to prove the following main theorem of this section:

Theorem XII: *Under the ideal-domain condition, a P_1-ring is isomorphic to a special subdirect sum of all the ideal-domains contained in it.*

Proof: We prove, first of all, that a P_1-ring R is, under the ideal-domain condition atomistic. For this, let e be any idempotent in R, and (e') an ideal-domain contained in (e). Then $e' \neq 0$ and if $g < e'$, then $g = ge'$ so that $g(e' - g) = 0$ and hence $g = 0$ or e'; thus e' is an atom which is obviously contained in e. So R is atomistic. Hence, by the theorem II, R is isomorphic

to a special subdirect sum of all the ideal-domains contained in it (since each atomic ideal is an ideal-domain and conversely). *Q. E. D.*

We observe that, in the above, if $R_i = (e_i)$ are the ideal-domains contained in R and a is any element of R, then $a^0 e_i = e_i$ if and only if $ae_i \neq 0$ so that the subdirect representation of a^0 consists of $1_i \in R_i$ in each place in which $a_i \neq 0$ and zeroes elsewhere; and since each R_i is a domain of integrity, it is now easy to deduce that R is an m-domain ring. Hence we have,

Theorem XIII: *Under the ideal-domain condition, a P_1-ring (with unity) is an m-domain ring (an associate ring).*

We notice that the converse of this theorem is by no means true, as is shown by a non-atomistic Boolean ring; and if in a P_1-ring R, satisfying the ideal-domain condition each idem-ideal is the union of all the ideal-domains contained in it, then R is finitary (see theorem V) and hence, in this case R is a discrete direct sum of the ideal-domains contained in it. Also, if R is complete and satisfies the ideal-domain condition, then it is the (full) direct sum of its ideal-domains.

4.4: We now list, in the following theorem, a few properties of m-domain rings, which they share with the class of associate rings (see [4]):

Theorem XIV: *In any m-domain ring R,*

(i) *for each idempotent e, the set $\{x : x^0 = e\}$ is a multiplicative domain (i.e. a semigroup in which both cancellation laws hold) with "local" unity e;*

(ii) *the multiplicative domains described in* (i) *decompose the elements of R into mutually disjoint sets, no set containing two distinct elements of the same compatible set;*

(iii) *each idem-ideal (e) in R is the logical join of all the multiplicative domains contained in it; and*

(iv) *for each a in R, the set N_a of all the annihilators of a is precisely the set N_{a^0} of all the annihilators of its minimal idempotent duplicator a^0, and hence is a two sided ideal in R; and it is a logical join of multiplicative domains of R.*

Proof: (i) Write $S_e = \{x : x^0 = e = e^2\}$; obviously, S_e is a semigroup with local unity e; and if $a, b, c \in S_e$ and $ab = ac$, then $a(b-c) = 0$ so that $e(b-c)^0 = 0$ and hence $e(b-c) = 0$. However, this implies $b = be = ce = c$, and the other cancellation law follows similarly. This proves (i).

(ii) Obviously, each element of R belongs to some S_e; and if $a \in S_e \cap S_f$, then $e = a^0 = f$ so that $S_e = S_f$. Also, if $a, b \in S_e$, then $a^0 = b^0$ so that $a \sim b$ implies $a = b$; and so we have (ii).

(iii) If $e'^2 = e' \in (e)$, then for each a in $S_{e'}$, $ae = aa^0e = ae'e = ae' = a$, so that $S_{e'} \subset (e)$; and if $S_{e'} \subset (e)$, obviously $e' < e$. Hence (e) is the logical join of all the multiplicative domains of R, each of which is determined by an idempotent element contained in e; and so (iii) follows.

(iv) In any P_1-ring, if $xa^0 = 0$, then $xa = 0$ so that $N_{a^0} \subset N_a$; also it is not difficult to verify that N_{a^0} is a two sided ideal in R, since a^0 is a central element. Now, in any m-domain ring, $xa = 0$ implies $x^0a^0 = 0$ and hence $xa^0 = 0$ so that $N_a \subset N_{a^0}$ and thus $N_a = N_{a^0}$. Further, if $xa = 0$, then $x^0a = 0$ and hence for any y in (x^0), $ya = yx^0a = 0$ so that $(x^0) \subset N_a$. Thus N_a is the

logical join of all the idem-ideals (e) where $ae = 0$ so that the last part of (iv) follows from (iii); and this completes the proof of the theorem. *Q. E. D.*

We remark that if an m-domain ring R contains the unity element "1", then the maximal elements in R are precisely the non-0-divisors in R; and if U denotes this set, then for each e, $S_e = Ue$. Also in any P_1-ring with unity element, $N_e = (1 - e)$ so that if R is also an m-domain ring $N_a = (1 - a^0)$. Now it is easy to see that the entire content of [4] extends to the case of m-domain rings.

We shall now, in the next and final section, discuss certain problems relating to the lattice structure of a P_1-ring and also prove a result which seems to have an interest of its own.

§ 5. A Converse Problem

5.0: If $\mathcal{S}$ is any set endowed with a binary reflexive relation $\sim$ (not necessarily transitive), then Zorn's lemma implies that each element of $\mathcal{S}$ is contained in a maximal $\sim$-set in $\mathcal{S}$; i.e. if $a \in \mathcal{S}$, then there exists a subset M, containing a, in $\mathcal{S}$ such that $x, y \in M$ implies that $x \sim y$, while any enlargement of M would deprive it of this property.

5.1: Suppose now that S is any partially ordered set, and define: $a \sim b$ (a and b are compatible) if and only if they have a common upper bound in S; then $\sim$ is obviously a binary reflexive relation in S, and hence each element of S is contained in a (not necessarily unique) maximal compatible set. Now, if each element a of S can be assigned a maximal compatible set M_a, containing it, such that all the sets M_a are order-isomorphic to each other, we shall call the partial ordering in S, *consistent*, and S is said *to admit a consistent partial ordering*.

5.2: Obviously, the former part of this definition is not vacuous; and it is easy to introduce, into an arbitrary set, a consistent partial ordering (for example, the *trivial ordering*). On the other hand, suppose now that R is an arbitrary (associative) ring and R_0 is the set of all its central idempotent elements. If a consistent partial ordering ($<$) of R agrees on R_0 with its *natural* partial ordering (see Introduction [2]), we shall say that "$<$" is *idem-consistent*. It is now easy to see that, if R is not free from non-zero central idempotent elements (i.e. if R_0 contains more than one element), then the trivial ordering of R is not idem-consistent; also, under every idem-consistent partial ordering in R, R_0 is a compatible set.

5.3: Apart from the trivial case mentioned above, the question arises whether every ring admits an idem-consistent partial ordering; and the lattice theory we have developed in [2] for P_1-rings may be summarised in a single sentence: "*Every P_1-ring admits an idem-consistent partial ordering.*" We shall now construct an example of a ring which admits an idem-consistent partial ordering but is not a P_1-ring; and this suggests the existence of a wider class of rings to which the author's lattice theory for P_1-rings, and hence Sussman's lattice theory for associate rings, may be extended.

5.4: We first construct a ring R whose only central idempotent is its zero element, while it contains "plenty" of idempotents outside its centre:

Example 4: Let R be the set of all ordered couples (x, y) of real numbers, with addition defined component wise, and multiplication by $(x, y)(x', y') = (x[x' + y'], y[x' + y'])$; then R is an associative (but not commutative) ring and we shall now investigate the general form of a non-zero idempotent in R.

Lemma: Every non-zero idempotent in R is of the form $(x, 1 - x)$.

Proof: For every x, $(x, 1 - x)$ is obviously a non-zero idempotent in R. Conversely, if (x, y) is a non-zero idempotent in R, we have $x = (x + y)x$, and $y = (x + y)y$ so that $x + y = 1$. *Q. E. D.*

Lemma: No non-zero idempotent of R is in its centre.

Proof: We first observe that $(1, 0)$ and $(0, 1)$ are idempotents in R both of which lie outside its centre, since $(1, 0)(0, 1) = (1, 0)$ and $(0, 1)(1, 0) = (0, 1)$. Also, if $(x, 1 - x)$ is any non-zero idempotent in R, $(1, 0)(x, 1 - x) = (1, 0)$ and $(x, 1 - x)(1, 0) = (x, 1 - x)$ both together imply that $(x, 1 - x)$ is outside the centre of R if $x \neq 1$; and $(1, 0)$ was shown to be outside the centre of R. Thus no non-zero idempotent in R is central. *Q. E. D.*

Now this lemma implies that R contains no unity element; and if we embed R, by the usual standard process, in a minimal ring T with unity element, then T_0, the set of all the central idempotents of T, contains only the zero and the unity elements of T. Thus we have proved

Lemma: There exists an associative ring with unity element, which contains plenty of idempotents (outside its centre) while its only non-zero central idempotent is its unity element.

5.5: It would be convenient to make the following

Definition: We shall call any ring of the type described in the preceding lemma, a *T-ring*.

We now construct the main example of this section:

Example 5: Let R be the discrete direct sum of (any class) T-rings R_i; then each idempotent in R is of the form $\{e_i\}$ where each e_i is an idempotent of R_i so that R_0, the set of central idempotents in R, consists of those and only those elements in R whose subdirect representations admit 0's and 1's (we shall not index these elements of R_i's) alone. We shall now write for each a in R, a^0 for the element in R_0, whose i-th component is 1 or 0 in R_i according as the i-th component of a is not equal or is equal to zero in R_i; and we introduce a partial ordering "$<$" in R by defining: $a < b$ if and only if $a^0 b = a$. Then it can easily be verified that this ordering in R is idem-consistent; but R is not a P_1-ring, since the idempotents of such a ring are all central, while this ring R has *plenty* of idempotent elements outside its centre.

5.6: However, we notice that in this ring R, a^0 retains a certain minimum property in the sense that, whenever $ae = a$ for a central idempotent e, then $a^0 e = a^0$. This suggests a simple modification in the definition of a P_1-ring, thus introducing a wider class of rings to which the author's lattice theory can be extended, by minor modifications in the arguments through out; and this,

we leave to the reader. However, whether, apart from this minor modification, a P_1-ring is completely characterised by its ability (which seems to be the minimum requirement for any ring which claims to generalise the concept of a Boolean ring) to admit an idem-consistent partial ordering, remains open, as well as the determination of all the idem-consistent partial orderings in a P_1-ring, which the author hopes to answer in a subsequent communication.

5.7: Finally, we shall prove the following theorem which seems to have an independent interest:

Theorem XV: *A ring R, in which each element admits a non-zero minimal central idempotent duplicator, is a special P_1-ring.*

Proof: Since 0 is duplicated by every (idempotent) element, it follows that R contains a central idempotent $e \neq 0$, such that for every non-zero idempotent e' in R, $e'e = e$. If $e' \neq e$, then $e' - e$ is a non-zero idempotent and hence $e = e(e' - e) = ee' - e = 0$, which is a contradiction. Thus R contains a unique non-zero idempotent e, and this is obviously the unity element in R. Hence R is a special P_1-ring. *Q. E. D.*

Bibliography

[1] McCoy, N. H.: Subdirect sums of rings. Bull. Am. Math. Soc. **53**, 856—877 (1947).

[2] Subrahmanyam, N. V.: Lattice theory for certain classes of rings. Math. Ann. **139**, 275—286 (1960).

[3] Sussman, I.: A generalisation of Boolean rings. Math. Ann. **136**, 326—338 (1958).

[4] Sussman, I.: Ideal structure and semigroup domain decomposition of associate rings. Math. Ann. **140**, 87—93 (1960).

(Received January 25, 1960)

MARCUS, S.
Math. Annalen 141, 311—317 (1960)

Functions with the Darboux Property and Functions with Connected Graphs

By

SOLOMON MARCUS in Bucharest

1. Introduction

It is known that there exists a close connection between "connectedness" and "Darboux property". In the case of real functions of a real variable, this connection transpires in two manners, as follows from the following well-known theorems:

I. A real function, defined and continuous on the real set E, has the Darboux property on this set (i.e. for $a \in E$, $b \in E$ and ξ such that $a < b$, $f(a) < \xi < f(b)$ there is a point $c \in E$ such that $a < c < b$ and $f(c) = \xi$) if and only if E is connected (i.e. if E is an interval).

II. If the graph of a real function f, defined on the real set E, is connected, then E is an interval and f possesses the Darboux property on E.

This paper has its origin in theorem II above. We wish to exhibit, on one hand, some special properties which may be possessed by a function with a connected graph and, on the other hand, some unusual functions having the Darboux property and the graphs of which are not connected.

Functions with connected graphs occur frequently in Analysis. A remarkable class of such functions, which contains all continuous functions, is that of functions which are finite derivatives. The graph of a finite derivative function is connected and this fact is a particular case of a more general phenomenon discovered by C. KURATOWSKI and W. SIERPINSKI: A real function of a real variable, of the first class of Baire, possesses the Darboux property if and only if its graph is connected.

A function of Baire class greater than 1 can have the Darboux property, although its graph may be disconnected. (See, for instance, [7], p. 82.)

Throughout this paper we shall frequently use the following statement due to C. KURATOWSKI and W. SIERPINSKI [9]:

III. Every real perfect set contains $2^{\aleph_0}$ pairwise disjoint perfect sets.

2. Functions with connected graphs

I. HALPERIN has proved that there exists a real function of a real variable which takes, on each real perfect set, each real value. Then, in view of III, there exists a real function of a real variable which takes, on each real perfect

set, $2^{\aleph_0}$ times each real value [3]. On the other hand, F. B. JONES has proved that there exists a discontinuous solution of Cauchy's functional equation

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

the graph of which is connected [5]. We shall prove that F. B. JONES' function also possesses the property of I. HALPERIN's example. We make use of the results of [5].

Theorem 1. *There exists a real function of a real variable which satisfies* (1), *possesses a connected graph and takes, on each real perfect set,* $2^{\aleph_0}$ *times each real value.*

Proof. By theorem 4 of [5], there exists a function f which satisfies (1) and the graph G of which intersects each perfect set in the plane which is not contained in a countable union of parallels to the y-axis. By theorem 2 of [5], G is connected and it follows from II that f has the Darboux property. We shall show that every real value is taken by f on each real perfect set.

Let P be a real perfect set and y_0 any real number. Denote by P_0 the perfect set contained in the line $y = y_0$ and such that its orthogonal projection on the x-axis is the set P. Since P_0 is not countable, $P_0 \cap G$ is not empty. Let p be any point in $P_0 \cap G$. The ordinate of p is y_0 and its abscissa, x_0, belongs to P. Hence, $f(x_0) = y_0$.

Thus, we have proved that f takes, on each real perfect set, every real value. From III it follows that f takes, on each real perfect set, $2^{\aleph_0}$ times every real value.

We recall that a set has the property of Baire if it is of the form $(D - P) \cup R$, where D is open and P and R are of the first category.

We shall say, following I. HALPERIN, that a set A in the plane is saturated non-measurable if, for every measurable set E, the set $A \cap E$ has inner measure equal to zero and outer measure equal to the measure of E [4]. E. MARCZEWSKI has given an example of a function which satisfies (1) and such that its graph is saturated non-measurable and fails to possess the property of Baire on every plane interval [13]. In the follows we shall show that there exists a function which possesses all properties of Marczewski's function and which, moreover, possesses a connected graph.

Theorem 2. *There exists a real function defined on* $(-\infty, \infty)$, *satisfying* (1) *and such that its graph is connected, saturated non-measurable and fails to possess the property of Baire on every plane interval.*

Proof. Consider F. B. Jones' function used in the proof of Theorem 1. The graph G of f is connected and, being intersected by each parallel to the y-axis in a single point, has plane inner measure equal to zero. On the other hand, each set of positive plane measure contains a perfect set S also of positive plane measure. S cannot be contained in a countable union of parallels to the y-axis and thus, since $G \cap S \subset G \cap E$, $G \cap E$ is not empty. This proves that G is saturated non-measurable, since in the contrary case it would exist a set of positive plane measure which does not intersect G, but we have seen that this is impossible.

In order to prove that G fails to possess the property of Baire on every plane interval, first let us show that G is of second category on each plane interval. Suppose the contrary holds, that is there exists a plane interval I such that $G \cap I$ is of first category. Then there is a set $L \subset I$ of first plane category and of type F_σ, such that $L \supset G \cap I$. Hence, the set $I - L$ is of type G_δ and of second category. Moreover, $I - L$, being a Borel set, possesses the property of Baire. We shall now use the following result: If T is a set of second plane category and possesses the property of Baire, then there exists a parallel to the x-axis such that its intersection with T is a set of second linear category (see, for instance, Proposition 3 of [12], p. 539). Take for T the set $I - L$. There is a parallel to the x-axis, such that its intersection with $I - L$ is of second category, hence non-countable. On the other hand, this intersection is a Borel set (a G_δ set). By a known theorem, any Borel non-countable set contains a perfect set and this perfect set is here disjoint of G, but this is a contradiction. Thus, G is of second category on each plane interval.

Now suppose that G has the property of Baire on some plane interval J. By a known theorem (see, for instance, [6], p. 56) there exists, in this case, a plane interval $K \subset J$ such that either G or its complement is of first category on K. Since, as we have shown above, G is of second category on K, it follows that the complement of G is of first category on K. But then, using a result of [10], it follows that there is a parallel to the y-axis which has in common with G a linear residual set; but this is not possible, since G is the graph of a function. Hence, G fails to possess the property of Baire on every plane interval.

Remark. F. Bagemihl has recently given an example of a function the graph of which is saturated non-measurable and fails to possess the property of Baire on every plane interval [1]. The graph of Bagemihl's function is not connected, but it presents an interesting singularity, namely it intersects every straight line in the plane at most in two points.

3. Non-measurable functions with the Darboux property and with disconnected graphs

Theorem 3. *There exists a real function, defined on* $(-\infty, \infty)$, *with disconnected graph and which takes, on each real perfect set,* $2^{\aleph_0}$ *times every real value.*

Proof. Let f be the function the existence of which is asserted in Theorem 1. Let

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad x = f(x) \quad \text{and} \quad x \neq 0; \\ 1, & \text{if} \quad x = 0; \\ f(x), & \text{if} \quad x \neq f(x). \end{cases}$$

The graph G_φ of φ is obtained from the graph G_f of f by merely replacing every point in G_f situated on the first bisector of the axes by the point having the same abscissa but of ordinate equal to zero. Only the point $(0, 0)$ in G_f makes exception; it is replaced, in G_φ, by the point $(0, 1)$.

Let ξ be any real number, $\xi \neq 0$. The sets $\{x; f(x) = \xi\}$ and $\{x; \varphi(x) = \xi\}$ differ by a single point at most. Since $\{x; f(x) = 0, x \neq 0\} \subset \{x; \varphi(x) = 0\}$ and since, for each real z, the set $\{x; f(x) = z\}$ intersects each real perfect set in $2^{\aleph_0}$ points, it follows that the set $\{x; \varphi(x) = z\}$ also has this property, and therefore φ takes, on each real perfect set, $2^{\aleph_0}$ times every real value. Of course, G_φ is dense in the plane and disconnected, since it is separated by the first bisector of the axes, which has no point in common with G_φ.

Theorem 4. *There exists a real function defined on* $(-\infty, \infty)$, *which takes every real value* $2^{\aleph_0}$ *times on each real perfect set and such that its graph is totally disconnected.*

Proof. Let ω_0 be the smallest ordinal with cardinal number $2^{\aleph_0}$. Let

$$0 = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\alpha, \ldots (\alpha < \omega_0)$$

be a sequence of type ω_0, formed by all real numbers. Consider a decomposition of the real line in $2^{\aleph_0}$ pairwise disjoint sets, such that each set of the decomposition intersects each real perfect set. (See, for instance, [4] or [2].) Let E_1 be a set of the decomposition which contains no rational number. Further, let E_2 be a set of the decomposition which contains no number of the form $r'\xi_i + r''$ ($i = 1, 2$; r' and r'' rational numbers), $E_2 \neq E_1$. Such a set there certainly exists in the considered decomposition, since the set of the numbers of the form $r'\xi_i + r''$ is countable, while the decomposition contains $2^{\aleph_0}$ sets.

Consider now an arbitrary ordinal $\alpha < \omega_0$. Suppose that we have chosen, for each $\beta < \alpha$, a set E_β of the decomposition which contains no number of the form $r'\xi_\gamma + r''$ ($\gamma \leqq \beta$, r' and r'' rational numbers), $E_\beta \neq E_\gamma$ for $\gamma < \beta$. Since ω_0 is the smallest ordinal of cardinal $2^{\aleph_0}$ and since $\alpha < \omega_0$, it follows that the cardinal of α is less than $2^{\aleph_0}$. Then, by a theorem of König asserting that a set which may be represented as a countable union of sets of cardinal less than $2^{\aleph_0}$ also has cardinal less than $2^{\aleph_0}$ (see, for instance, [14]) the set of the numbers of the form $r'\xi_\beta + r''$ ($\beta \leqq \alpha$, r' and r'' rational numbers) has cardinal less than $2^{\aleph_0}$. Since the decomposition contains $2^{\aleph_0}$ sets, there exists, in the decomposition, a set E_α which contains no number of the form $r'\xi_\beta + r''$ ($\beta \leqq \alpha$, r' and r'' rational numbers), $E_\beta \neq E_\alpha$ for $\beta < \alpha$.

Now define, on $(-\infty, \infty)$, a real function f, as follows: if there is an $\alpha < \omega_0$ such that $x \in E_\alpha$, then $f(x) = \xi_\alpha$; if x belongs to none of the sets E_α defined above (this arises, particularly, for each rational x), then $f(x) = 0$.

Consider now an arbitrary real ξ. There is an ordinal $\alpha < \omega_0$ for which $\xi = \xi_\alpha$, hence $f(x) = \xi$ for each $x \in E_\alpha$. But E_α, being a set of the above considered decomposition, intersects each real perfect set. It follows then from III that f takes the value ξ $2^{\aleph_0}$ times on each real perfect set.

Consider now a line of equation $y = ax + b$, a and b being rational numbers, $a \neq 0$. This line contains no point of the graph of f, with the possible exception of a point of zero ordinate. Indeed, if it would exist a real ξ such that $f(\xi) = a\xi + b \neq 0$, then, denoting by α the ordinal for which $\xi = \xi_\alpha$, we should obtain $f(\xi_\alpha) = a\xi_\alpha + b \neq 0$. Let $\xi_\delta = a\xi_\alpha + b$. It follows $\xi_\alpha \in E_\delta$. On the other hand, E_δ contains no number of the form $r'\xi_\beta + r''$ ($\beta \leqq \delta$, r' and r'' rational

numbers), therefore E_δ does not contain the number $(1/a)\xi_\delta - (b/a) = \xi_\alpha$. Thus we obtain a contradiction which proves that each one of the lines $y = ax + b$ (a and b rational numbers, $a \neq 0$) intersects the graph of f at most in a single point (of zero ordinate). Since each subset of the graph of f which contains at least two points is separated by at least one of the lines $y = ax + b$ (a and b rational numbers, $a \neq 0$) it follows that the graph of f is totally disconnected.

Remark. The functions the existence of which is asserted in Theorem 3 and Theorem 4 are not measurable in Lebesgue's sense and do not possess the property of Baire. Indeed, we have the following

Proposition. *Any real function defined on an interval $I \subset (-\infty, \infty)$ which takes, on each perfect set contained in I, each real value, is not measurable in the sense of* Lebesgue *and fails to possess the property of* Baire.

Proof. We reason by contradiction. Any measurable function admits, by a well-known theorem of Luzin, a continuous restriction on some bounded perfect set P. Hence, f is bounded on P and so cannot take on P every real value, and this contradicts our assumption. Thus, f is not measurable in the sense of Lebesgue.

A function which possesses the property of Baire admits, by a known theorem (see, for instance, [6], p. 306) a continuous restriction on a residual set. A residual set contains a residual G_δ-set R ([6], p. 49). From a known theorem, which asserts that each non-countable Borel set contains a perfect set, it follows that R contains a bounded perfect set S. But f is bounded on S and so cannot take on S every real value, in contradiction to our assumption. Thus, f fails to possess the property of Baire.

4. Measurable functions which are not Borel functions, possessing the Darboux property and having totally disconnected graphs

Lemma. *There exists a collection of $\aleph_0$ pairwise disjoint perfect sets, the union of which is dense in $(-\infty, \infty)$ and has measure equal to zero.*

The proof is obvious.

Theorem 5. *There exists a real function defined on $(-\infty, \infty)$ and such that: 1° it is measurable in the sense of* Lebesgue; *2° it is not a Borel function*; *3° it takes each real value $2^{\aleph_0}$ times in each real interval*; *4° its graph is totally disconnected.*

Proof. Let $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ be a sequence formed by the sets of the collection the existence of which is asserted in the preceding Lemma. Let $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$. H is dense in $(-\infty, \infty)$ and its measure is zero.

Let us define, on $(-\infty, \infty)$, a real function f, as follows: If there is an ordinal $\alpha < \omega_0$ such that $x \in H \cap E_\alpha$ (ω_0 and E_α being defined as in the proof of Theorem 4) then we set $f(x) = \xi_\alpha$ (ξ_α having the same meaning as in the proof of Theorem 4); if such an ordinal does not exist, then we set $f(x) = 0$.

The statement 1° is obvious, for f is zero at each point not belonging to H, that is f vanishes almost everywhere.

To prove the statement 2°, we shall use the following property due to I. Maximov: Any real Borel function defined and possessing the Darboux property on $(-\infty, \infty)$ is, at each point $x \in (-\infty, \infty)$, continuous with respect to some perfect set containing x [11]. We will show that this property does not hold for the function f defined above. Let x be a real for which $f(x) \neq 0$. Such a real certainly exists, since $H \cap E_\alpha$ is not empty. Let P be a real perfect set such that $x \in P \subset H$. Since each portion of P contains a perfect set, f takes, on such a portion, every real value $2^{\aleph_0}$ times. Therefore, f cannot be continuous at x with respect to the set P. Now let T be a real perfect set containing x and such that, in each neighborhood of x there are points of T which do not belong to H. f cannot be continuous at x with respect to T, since it vanishes on the intersection of T with each neighborhood of x, while $f(x) \neq 0$. Hence, 2° is proved.

Now let us prove 3° Since E_α intersects every real perfect set, we have, for each n, $P_n \cap E_\alpha \neq 0$. Then, it follows from III that, for each perfect subset $P \subset P_n$, the set $P \cap E_\alpha$ has cardinal $2^{\aleph_0}$ for any α such that $1 \leq \alpha < \omega_0$. On the other hand, H being dense in $(-\infty, \infty)$, each real interval contains either some set P_n or a portion of such a set, hence a perfect subset $P \subset P_n$. Therefore, for each $\alpha < \omega_0$, the set $H \cap E_\alpha$ has in common with each real interval $2^{\aleph_0}$ points. Consequently, the value ξ_α is taken by f $2^{\aleph_0}$ times in each real interval. But the sequence $\{\xi_\alpha\}$ contains all real numbers, therefore f takes, in each real interval, $2^{\aleph_0}$ times every real value and so 3° is proved.

Finally, to prove 4° it is enough to remark that both the set $H \cap \left(\bigcup_{1 \leq \alpha < \omega_0} E_\alpha\right)$ and its complement are dense in $(-\infty, \infty)$ and that the graph of f may be obtained from the graph of the function used in the proof of Theorem 4 by merely replacing each point the abscissa of which does not belong to $H \cap \left(\bigcup_{1 \leq \alpha < \omega_0} E_\alpha\right)$ by the point of same abscissa but of ordinate equal to zero.

References

[1] Bagemihl, F.: An example of a function with a distorted image. Mich. Math. J. 4, 285—287 (1957).

[2] Erdös, P., and S. Marcus: Sur la décomposition de l'espace euclidien en ensembles homogènes. Acta Math. Hung. 8, 3—4, 443—452 (1957).

[3] Halperin, I.: Discontinuous functions with the Darboux property. Am. Math. Monthly 57, 539—540 (1950).

[4] Halperin, I.: Non measurable sets and the equation $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Proc. Am. Math. Soc. 2, 221—224 (1951).

[5] Jones, F. B.: Connected and disconnected plane sets and the functional equation $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Bull. Am. Math. Soc. 48, 115—120 (1942).

[6] Kuratowski, C.: Topologie I. Warszawa-Wroclaw 1948.

[7] Kuratowski, C.: Topologie II. Warszawa 1952.

[8] Kuratowski, C., et W. Sierpinski: Les fonctions de classe 1 et les ensembles connexes ponctiformes. Fundamenta Math. 3, 304 (1922).

[9] Kuratowski, C., et W. Sierpinski: Sur un problème de M. Fréchet concernant les dimensions des ensembles. Fundamenta Math. 8, 193—200 (1926).

[10] Kuratowski, C., et S. Ulam: Quelques propriétés topologiques du produit combinatoire. Fundamenta Math. 19, 247—251 (1943).
[11] Maksimov, I.: Sur les fonctions ayant la propriété de Darboux. Prace Mat.-Fiz. 43, 241—265 (1936).
[12] Marcus, S.: Metric properties and descriptive properties for real functions of two variables (in Rumanian). Bul. Ştiintific Acad. R. P. R. 5, 527—544 (1953).
[13] Marczewski, E.: Remarques sur les fonctions de Hamel. Colloq. Math. 1, 249 (1948).
[14] Sierpinski, W.: Leçons sur les nombres transfinis. Paris: Gauthier-Villars 1950, p. 131.

(Received September 18, 1959)

Grimeisen, G.
Math. Annalen 141, 318—342 (1960)

Gefilterte Summation von Filtern und iterierte Grenzprozesse. I*)

Von

Gerhard Grimeisen in Stuttgart

Der für die klassische Analysis so wichtige Begriff der Folge ist bekanntlich von der neueren Mathematik in zwei Richtungen verallgemeinert worden.

Die eine — vornehmlich durch E. H. Moore und H. L. Smith, G. Birkhoff, J. L. Kelley vertretene — Richtung hielt an der Vorstellung der Folge als einer durch eine Abbildung verknüpfte Zweiheit von Indexbereich und Wertebereich fest und verallgemeinerte mit dem Indexbereich die zwischen den Indizes bestehende Anordnung zu einer beliebigen Richtungsrelation: es entstand die Moore-Smith-Folge. Die andere — vor allem von H. Cartan und durch die Bourbaki-Schule vertretene — Richtung verzichtete ganz auf den Abbildungsbegriff: sie verallgemeinerte die mengentheoretische Struktur, die dem Indexbereich der Folge durch das System der Enden aufgeprägt und die durch die Abbildung in den Wertebereich projiziert wird, zum Begriff des Filters über einer beliebigen Menge.

Von der Theorie der Grenzübergänge aus gesehen, sind nach G. Bruns und J. Schmidt[1]) Moore-Smith-Folge und Filter in einem präzisen Sinne miteinander äquivalent.

In den üblichen Konvergenztheorien treten als wichtige Sätze solche über Doppelfolgen, Doppelreihen, Doppelintegrale u. ä. auf, die — in einer unmißverständlichen Matrixsprechweise ausgedrückt — unter Voraussetzung der Existenz der „Zeilenlimites" einmal aus der Existenz des Limes der Zeilenlimites schließen auf die Existenz des „Limes der gesamten Matrix" oder zumindestens einer gewissen Diagonale der Matrix, ein andermal aus der Existenz des Limes der gesamten Matrix schließen auf die Existenz des Limes der Zeilenlimites[2]). Als eine modifizierte Verallgemeinerung der Aussagen erster Art ist anzusehen der sog. *Satz vom iterierten Limes*[3]), der besagt, daß

*) Erster Auszug aus der Dissertation „Über die gefilterte Summe von Filtern" des Verf., Stuttgart 1958.

[1]) Bruns-Schmidt [12].

[2]) J. Schmidt [33], S. 441 (Fußnote 4), deutet Aussagen erster bzw. zweiter Art — die bei Interpretation des Limesbegriffes als transfinite Operation auch in der Ordnungstheorie vorkommen — als solche über Beseitigung bzw. Einführung von Klammern, d. h. als Assoziativgesetze. — Als Beispiele hierher gehöriger Sätze erwähnen wir den „Satz vom iterierten Limes" von Haupt-Aumann-Pauc [17], S. 137, der sowohl eine Aussage erster als auch eine (verschärfte) Aussage zweiter Art enthält, "The Moore theorem" bei Graves [15], S. 100, mit Aussagen erster und zweiter Art, den „Satz von der totalen Konvergenz" von Haupt-Aumann-Pauc [17], S. 134, als eine Aussage zweiter Art.

[3]) Terminologie von Kelley [18], S. 279, und [19], S. 69, "Theorem on iterated limits".

man — bei Zugrundelegung der oben beschriebenen Verallgemeinerungen des Folgenbegriffs — hintereinandergeschachtelte Grenzübergänge in topologischen Räumen stets zu einem einzigen Grenzübergang zusammenfassen kann, kurz: daß man jeden iterierten Limes in einen einfachen Limes verwandeln kann, als Verallgemeinerung der Aussagen zweiter Art dessen in regulären Räumen geltende Umkehrung. Der Satz vom iterierten Limes und seine Umkehrung sind in der Sprache der Moore-Smith-Folgen erstmals von G. BIRKHOFF, er selbst alsdann von J. L. KELLEY bewiesen worden[4]. In der Sprache der Filter gab es bisher kein wirkliches Analogon[5]. Diese Lücke schließt Verf. mit Hilfe einer neuen Operation im Bereich der Filter, der *gefilterten Summation von Filtern* (und ihres Spezialfalls, des *ordinalen Produkts*).

Das (cartesische, direkte) Produkt von Filtern BOURBAKIs[6] liefert wohl ein erheblich abgeschwächtes Analogon zur Umkehrung des Birkhoff-Kelleyschen Satzes vom iterierten Limes[7], nicht aber ein Analogon zu diesem Satze selbst; es ist dem Vorgang einer Iteration schon dadurch nicht angepaßt, daß unter seinen Faktoren keiner besonders ausgezeichnet ist. Im Falle endlich vieler Faktoren erweist es sich außerdem als für die erstrebte Anwendung im Sinne des Bourbakischen Feinheitsvergleiches von Filtern zu grob, als eine i. a. echte Vergröberung des ordinalen Produkts. Die gefilterte Summe hingegen eignet sich in gleichem Maße zur filtertheoretischen Formulierung des (allgemeinen) Satzes vom iterierten Limes *und* seiner Umkehrung; in dieser Fassung kann er dann herangezogen werden zur *Kennzeichnung der einstufigen Topologien* unter den mehrstufigen Prätopologien[8], seine Umkehrung zur *Kennzeichnung der regulären* unter den Hausdorffschen *Räumen*[9].

---

[4]) BIRKHOFF [4], S. 43, theorem 5 (Satz vom iterierten Limes), dort in Hausdorffschen Räumen; S. 44, theorem 7a (Umkehrung). KELLEY [18] und [19], loc. cit.

[5]) Abgesehen von der von KOWALSKY [21], S. 311—313, entwickelten Theorie der „Diagonallimitierungen" und der darin enthaltenen Technik der Bildung gewisser „Diagonalfilter", einer Technik, die aber meines Erachtens, wegen der Beschränkung auf Filter über dem Raume E, für die Anwendungen, die Bedürfnisse einer umfassenden „Folgen"-Theorie, nicht genügend elastisch ist: wir werden in Teil II dieser Arbeit als allgemeinen „Folge"-Begriff den von NÖBELING [25], S. 54, eingeführten Begriff der „gefilterten Familie" — Oberbegriff sowohl des „Filters über dem Raume E" als auch der „Moore-Smith-Folge" — zugrunde legen, und die gefilterte Summation von Filtern erweist sich als genau das angemessene technische Hilfsmittel für eine allgemeine Theorie der Doppelfolgen im Rahmen der gefilterten Familien.

[6]) BOURBAKI [6], S. 68—69.

[7]) BOURBAKI [6], S. 69, proposition 8. Dieser „Satz vom Doppellimes" ist ein unmittelbares Korollar der filtertheoretischen Formulierung der Umkehrung des Satzes vom iterierten Limes (siehe Teil II dieser Arbeit) und als solches in *technischer* Hinsicht, bei vorgegebener verallgemeinerten Doppelfolge, als eine erhebliche Abschwächung dieser Umkehrung anzusehen. Dem widerspricht nicht, daß er nach BOURBAKI-DIEUDONNÉ [9] ebenso wie die diskutierte Umkehrung (siehe Teil II dieser Arbeit) zur Kennzeichnung der regulären unter den Hausdorffschen Topologien herangezogen werden kann, daß also beide Sätze — nicht bei fest vorgegebener verallgemeinerten Doppelfolge — *logisch* äquivalent sind. — Vgl. auch APPERT [1].

[8]) NÖBELING [24] sagt „mehrstufige Topologie" statt „Prätopologie". In anderer Bedeutung wird der Terminus „Prätopologie" von PAUC [26] verwendet.

[9]) Für Moore-Smith-Folgen bei BIRKHOFF [4], S. 44, theorem 7a.

In dem vorliegenden ersten Teil der Arbeit wird die gefilterte Summation von Filtern eingeführt und auf ihre wichtigsten Eigenschaften hin untersucht. In § 1 stellen wir die verwendeten, Arbeiten von J. SCHMIDT[10]) entnommenen, Hilfsbegriffe zusammen. Dazu gehören vor allem die Begriffe der aufsteigenden Hülle und der Verzahnung eines Mengensystems sowie des zum Filter dualen Rasters; als bisher noch nicht üblichen terminus technicus führen wir den Begriff des Stapels, einen Oberbegriff für Filter und Raster, ein. Als zweckmäßig erweist sich eine genaue Analyse der Cantorschen oder direkten Summe von Mengen, und zwar auch für nichtdisjunkte Summanden (§ 2). Über die direkte Summe von Stapeln von BRUNS-SCHMIDT[11]) (§ 3), eine Verallgemeinerung der direkten Summe von Mengen, gelangen wir in § 4 durch nochmalige Verallgemeinerung zur gestapelten Summe von Stapeln, von dieser durch Spezialisierung zur gefilterten Summe von Filtern und gerasterten Summe von Rastern. Als im Rahmen dieser Arbeit wichtigste Eigenschaft der gestapelten Summe sehen wir ihre „Invarianz gegenüber dem Verzahnungsoperator" (Satz 16) an. Diese Eigenschaft kommt insbesondere dem ordinalen Produkt, wie wir die gestapelte Summe im Falle gleicher Summanden nennen, (§ 5) zu; dem nach dem Vorbild des Filterprodukts BOURBAKIs gebildeten kardinalen (cartesischen, direkten) Produkt von Stapeln fehlt diese Eigenschaft. Darin liegt es, daß das ordinale, nicht aber das kardinale Produkt von Ultrafiltern Ultrafilter ist. In § 6 wird auf den Zusammenhang der in Birkhoffs Satz vom iterierten Limes verwendeten Konstruktion im Bereich der gerichteten Mengen mit der gefilterten Summe, ferner auf den Zusammenhang des x-Sektors von HAUPT-AUMANN-PAUC[12]) mit dem ordinalen Produkt eingegangen.

Auf das ordinale Produkt und die gefilterte Summe von Filtern stieß Verf. bei der Beschäftigung mit dem Problem, eine jede Bairesche Funktion konstruktiv mit Hilfe eines geeigneten Filters über der Menge der stetigen Funktionen zu approximieren. Für den Hinweis und die ersten Anregungen zu diesem Problem ist der Verf. Herrn Prof. Dr. G. NÖBELING zu Dank verpflichtet, den Herren Prof. Dr. CH. PAUC und Dr. J. SCHMIDT für zahlreiche Anregungen bei der Abfassung dieser Arbeit.

§ 1. Aufsteigende Hülle und Verzahnung eines Mengensystems

Es sei E irgendeine Menge und $\mathfrak{a}$ ein System von Teilmengen von E, wir sagen: ein *Mengensystem (über E)*[13]). Erfüllt $\mathfrak{a}$ die Bedingung

(1.1) $$\text{wenn } X \in \mathfrak{a} \text{ und } X \subseteq Y \subseteq E, \text{ so } Y \in \mathfrak{a},$$

so nennen wir $\mathfrak{a}$ mit J. SCHMIDT[14]) *aufsteigend*. Ist $\mathfrak{a}$ aufsteigend und von der Potenzmenge $\mathfrak{P}E$ als auch vom leeren System $\mathfrak{o}$ verschieden, so heiße $\mathfrak{a}$ ein

[10]) J. SCHMIDT [30] und [31].

[11]) BRUNS-SCHMIDT [13], S. 141.

[12]) HAUPT-AUMANN-PAUC [17], S. 136—137.

[13]) Mengensysteme sind — nach dem Vorgang von KOWALSKY [20] — im Rahmen dieser Arbeit ausgesprochene „Rechengrößen" und werden hier im allgemeinen mit kleinen deutschen Buchstaben bezeichnet.

[14]) J. SCHMIDT [31], S. 215.

Stapel (über E). Ein Mengensystem ist also genau dann ein Stapel, wenn es aufsteigend und nichtleer ist und nur aus nichtleeren Mengen besteht. (Existenz eines solchen setzt $E \neq O$ voraus.)

Spezielle Stapel sind die (eigentlichen) Filter und (eigentlichen) Raster. Ein *Filter* ist bekanntlich ein Stapel $\mathfrak{a}$ mit der Eigenschaft

(1.2) $\quad$ wenn $X \in \mathfrak{a}$ und $Y \in \mathfrak{a}$, so $X \cap Y \in \mathfrak{a}$.

Unter einem *Raster* verstehen wir mit J. SCHMIDT[15]) einen Stapel $\mathfrak{a}$, der die Bedingung

(1.3) $\quad$ wenn $X \cup Y \in \mathfrak{a}$, so $X \in \mathfrak{a}$ oder $Y \in \mathfrak{a}$

erfüllt[16]).

Jedem Mengensystem $\mathfrak{a}$ läßt sich ein aufsteigendes in natürlicher Weise zuordnen. Als die *aufsteigende Hülle*, kurz: die *Hülle*, $\mathscr{H}\mathfrak{a}$, genauer $\mathscr{H}_E\mathfrak{a}$, *von* $\mathfrak{a}$ *(bezüglich E)* bezeichnen wir mit J. SCHMIDT[17]) das System aller Teilmengen Y von E, die wenigstens eine Menge $X \in \mathfrak{a}$ enthalten. $\mathscr{H}\mathfrak{a}$ ist aufsteigend und es gilt

(1.4) $$\mathfrak{a} \subseteq \mathscr{H}\mathfrak{a};$$

$\mathfrak{a}$ ist genau dann aufsteigend, wenn $\mathscr{H}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$; insbesondere gilt

(1.5) $$\mathscr{H}\mathscr{H}\mathfrak{a} = \mathscr{H}\mathfrak{a}.$$

Der Operator $\mathscr{H}$ ist voll vereinigungstreu,

(1.6) $$\mathscr{H} \bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i = \bigcup_{i \in I} \mathscr{H}\mathfrak{a}_i$$

[$(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Mengensystemen], insbesondere monoton,

(1.7) $\quad$ wenn $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, so $\mathscr{H}\mathfrak{a} \subseteq \mathscr{H}\mathfrak{b}$

($\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Mengensysteme). Genau dann, wenn $\mathscr{H}\mathfrak{a}$ ein Stapel ist, wollen wir $\mathfrak{a}$ eine *Stapelbasis* nennen. Ein Mengensystem ist also genau dann eine Stapelbasis, wenn es nichtleer ist und nur aus nichtleeren Mengen besteht. (Existenz einer solchen setzt $E \neq O$ voraus.) Liegt ein Stapel $\mathfrak{a}$ vor, so heiße jede Stapelbasis $\mathfrak{b}$ mit $\mathscr{H}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ eine *Basis von* $\mathfrak{a}$. (Wir sagen dann auch, daß $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ erzeugt werde.)

Spezielle Stapelbasen sind die Basen der Filter und Raster, die *Filter-* und *Rasterbasen*, diejenigen Stapelbasen also, deren Hülle Filter bzw. Raster ist. Hiernach und nach (1.2) bzw. (1.3) sind die Filter- bzw. Rasterbasen genau alle Stapelbasen $\mathfrak{a}$ mit der Eigenschaft

(1.8) $\quad$ wenn $X \in \mathfrak{a}$ und $Y \in \mathfrak{a}$, so existiert ein $Z \in \mathfrak{a}$ mit $Z \subseteq X \cap Y$

bzw.

(1.9) $\quad$ wenn $X \cup Y \in \mathfrak{a}$, so existiert ein $Z \in \mathfrak{a}$ mit $Z \subseteq X$ oder $Z \subseteq Y$.

[15]) J. SCHMIDT [31], S. 220. Der Begriff geht zurück auf CHOQUET [14]: «grille». NÖBELING [25]: „Gitter".

[16]) Zu den Filtern rechnet man gelegentlich — siehe J. SCHMIDT [30] — auch noch die Potenzmenge $\mathfrak{P}E$ als uneigentlichen Filter; als uneigentlichen Raster hätte man entsprechend — siehe J. SCHMIDT [31] — das leere Mengensystem $\mathfrak{o}$ anzusehen. Wir wollen hier nur eigentliche Filter und Raster betrachten.

[17]) J. SCHMIDT [31], S. 215.

Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Mengensysteme (über E), so sagt man, $\mathfrak{a}$ sei *feiner als* $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$ *gröber als* $\mathfrak{a}$[18]), wenn $\mathfrak{b} \subseteq \mathscr{H}\mathfrak{a}$. Genau dann ist $\mathfrak{a}$ feiner als $\mathfrak{b}$, wenn $\mathscr{H}\mathfrak{b} \subseteq \mathscr{H}\mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{a}$ feiner als $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}$ feiner als $\mathfrak{a}$, d. h. $\mathscr{H}\mathfrak{a} = \mathscr{H}\mathfrak{b}$, so sagt man, $\mathfrak{a}$ sei *ebenso fein wie* $\mathfrak{b}$[19]).

Die Mengensysteme über E werden durch die Äquivalenzrelation „ebenso fein wie" in elementfremde Klassen eingeteilt. In jeder Klasse liegt genau ein aufsteigendes Mengensystem; dieses ist das größte Mengensystem der Klasse. Die aufsteigenden Mengensysteme repräsentieren also genau alle Äquivalenzklassen; jeder Stapel repräsentiert so die Menge aller seiner Basen, das leere Mengensystem $\mathfrak{o}$ repräsentiert $\{\mathfrak{o}\}$, die Potenzmenge $\mathfrak{P}E$ die Menge aller Mengensysteme, die die leere Menge O als Element enthalten.

Neben dem Operator $\mathscr{H}$ führen wir einen zweiten Operator mit dem gleichen Definitionsbereich ein. Zunächst nennen wir mit J. SCHMIDT[20]) die Teilmengen X und Y von E *verzahnt*, wenn sie einen nichtleeren Durchschnitt haben. Sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Mengensystem (über E). Das System aller derjenigen Teilmengen X von E, die mit jedem $A \in \mathfrak{a}$ verzahnt sind, heiße mit J. SCHMIDT[21]) die *Verzahnung* $\mathscr{G}\mathfrak{a}$, genauer $\mathscr{G}_E\mathfrak{a}$, *von* $\mathfrak{a}$ *(bezüglich* E*)*. Die Verzahnung von $\mathfrak{a}$ ist aufsteigend,

(1.10) $$\mathscr{G}\mathfrak{a} = \mathscr{H}\mathscr{G}\mathfrak{a}\,.$$

$\mathscr{G}\mathfrak{a}$ ist genau dann ein Stapel, wenn $\mathfrak{a}$ eine Stapelbasis ist. Der Operator $\mathscr{G}$ ist voll vereinigungsdual,

(1.11) $$\mathscr{G}\bigcup_{i\in I}\mathfrak{a}_i = \bigcap_{i\in I}\mathscr{G}\mathfrak{a}_i$$

[$(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie von Mengensystemen], insbesondere monoton fallend,

(1.12) $$\text{wenn}\quad \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}\,,\quad \text{so}\quad \mathscr{G}\mathfrak{b} \subseteq \mathscr{G}\mathfrak{a}$$

($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ Mengensysteme).

Im folgenden stellen wir einige bekannte Eigenschaften der Verzahnung $\mathscr{G}\mathfrak{a}$ und der Hülle $\mathscr{H}\mathfrak{a}$ zusammen[22]). Der Übergang von einem zum anderen beruht auf (sei $X \subseteq E$)

Satz 1. *$X \in \mathscr{G}\mathfrak{a}$ gilt genau dann, wenn $E - X \in \mathfrak{P}E - \mathscr{H}\mathfrak{a}$. Anders ausgedrückt: entweder gilt $X \in \mathscr{G}\mathfrak{a}$ oder $E - X \in \mathscr{H}\mathfrak{a}$.*

Dies folgt unmittelbar daraus, daß die Aussage „X verzahnt mit A" ($A \subseteq E$) äquivalent ist mit $A \nsubseteq E - X$.

Mittels Satz 1 erhält man wegen (1.10)

---

[18]) Für Filter und Filterbasen bei BOURBAKI [6] (1. Aufl.), S. 20ff.: «$\mathfrak{a}$ plus fin que $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$ moins fin que $\mathfrak{a}$».

[19]) BOURBAKI [6] (1. Aufl.), S. 24: «$\mathfrak{a}$ équivalent $\mathfrak{b}$».

[20]) J. SCHMIDT [31], S. 202.

[21]) J. SCHMIDT [31], S. 217. Ist $\mathfrak{a}$ ein Filter, so nennt CHOQUET [14] $\mathscr{G}\mathfrak{a}$ «la grille associée avec le filtre $\mathfrak{a}$».

[22]) Die im folgenden zitierten Sätze sind als Nebenergebnis einer Theorie der Galois-Korrespondenzen bei J. SCHMIDT [31], zum Teil (für Filter und Raster) bei CHOQUET [14] zu finden.

Korollar 1. $\mathscr{G}\mathscr{G}\mathfrak{a} = \mathscr{H}\mathfrak{a}$.

Denn $X \in \mathscr{G}\mathscr{G}\mathfrak{a}$ ist nach Satz 1 und (1.10) gleichwertig mit $E - X \notin \mathscr{G}\mathfrak{a}$, diese Aussage nach Satz 1 gleichwertig mit $X \in \mathscr{H}\mathfrak{a}$.

Mittels Korollar 1 ergibt sich, als Verschärfung von (1.12), das

Korollar 2. *Für Stapel* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *gilt* $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ *genau dann, wenn* $\mathscr{G}\mathfrak{b} \subseteq \mathscr{G}\mathfrak{a}$.

Die Menge aller Stapel über (nichtleerem) E bildet bezüglich der mengentheoretischen Inklusion einen vollständigen Verband. Infimum einer nichtleeren Familie von Stapeln ist deren mengentheoretischer Durchschnitt, Supremum deren mengentheoretische Vereinigung. Null- oder kleinstes Element — und damit zugleich das Supremum der leeren Familie von Stapeln — ist der nur aus der Grundmenge E bestehende Stapel $\{E\}$, Eins- oder größtes Element — und damit zugleich das Infimum der leeren Familie von Stapeln — der aus allen nichtleeren Teilmengen von E bestehende Stapel $\mathfrak{P}E - \{O\}$. Da der Operator $\mathscr{G}$ aus dem Verbande aller Stapel über E nicht herausführt, liefern die beiden Korollare zu Satz 1 den zusammenfassenden

Satz 2. *Die Abbildung* $\mathscr{G}$, *eingeschränkt auf Stapel, ist ein involutorischer Anti-Automorphismus des Verbandes aller Stapel über E.*

Satz 2 enthält die für beliebige nichtleere Familien $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ von Stapeln geltende, zu (1.11) duale Regel

$$\mathscr{G} \bigcap_{i\in I} \mathfrak{a}_i = \bigcup_{i\in I} \mathscr{G}\mathfrak{a}_i\,. \tag{1.13}$$

Der Verzahnungsoperator $\mathscr{G}$ stellt einen unmittelbaren Zusammenhang zwischen Filtern und Rastern her. Mit Hilfe von Satz 1 und den De Morganschen Formeln erhält man nämlich

Satz 3. *Ein Stapel* $\mathfrak{a}$ *ist ein Filter genau dann, wenn* $\mathscr{G}\mathfrak{a}$ *ein Raster, ein Raster genau dann, wenn* $\mathscr{G}\mathfrak{a}$ *ein Filter ist.*

Satz 4. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein Filter, so* $\mathfrak{a} \subseteq \mathscr{G}\mathfrak{a}$. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein Raster, so* $\mathscr{G}\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$.

Die erste Aussage hierin ist eine unmittelbare Folge der Definitionen, die zweite ist nach Korollar 1 zu Satz 1 und Satz 3 mit der ersten äquivalent.

Die maximalen Elemente in der bezüglich der mengentheoretischen Inklusion (teilweise) geordneten Menge der Filter[23]) nennt man *Ultrafilter*. Ultrafilter lassen sich bekanntlich[24]) folgendermaßen kennzeichnen:

Satz 5. *Ein Filter* $\mathfrak{a}$ *ist genau dann ein Ultrafilter, wenn* $\mathscr{G}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, *oder wenn* $\mathfrak{a}$ *zugleich ein Raster ist.*

Neben der Grundmenge E sei nun eine Menge E' gegeben. Die Operatoren $\mathscr{H}$ und $\mathscr{G}$ sind in folgendem Sinne vertauschbar mit (eindeutigen) Abbildungen von E auf E':

Satz 6. *Für eine beliebige Abbildung* φ *von E auf E' und ein beliebiges Mengensystem* $\mathfrak{a}$ *über E gilt* $\varphi\mathscr{H}_E\mathfrak{a} = \mathscr{H}_{E'}\varphi\mathfrak{a}$ *und* $\varphi\mathscr{G}_E\mathfrak{a} = \mathscr{G}_{E'}\varphi\mathfrak{a}$.

Beweis. Auf Grund des Korollars 1 zu Satz 1 genügt es, die zweite Gleichung zu beweisen. $\varphi\mathscr{G}_E\mathfrak{a} \subseteq \mathscr{G}_{E'}\varphi\mathfrak{a}$ folgt daraus, daß bei der Abbildung φ miteinander verzahnte Mengen stets in verzahnte Mengen übergehen. Um-

[23]) Bourbaki [6], S. 33.
[24]) J. Schmidt [31], S. 228.

gekehrt sei $X \in \mathscr{G}_{E'} \varphi\mathfrak{a}$. Ferner sei $A \in \mathfrak{a}$. Nach Wahl von X sind die Mengen X und φA, also auch die Mengen $\varphi^{-1}X$ und A miteinander verzahnt. Dies gilt für jedes $A \in \mathfrak{a}$, also $\varphi^{-1}X \in \mathscr{G}_E\mathfrak{a}$, folglich $X = \varphi\varphi^{-1}X \in \varphi\mathscr{G}_E\mathfrak{a}$.

Nun überführt die Abbildung φ aber nichtleere Teilmengen von E in nichtleere Teilmengen von E'; nach der ersten Aussage von Satz 6 gehen also bei der Abbildung φ Stapel über E in Stapel über E' über. Da bekanntlich vermöge der Abbildung φ Filterbasen in Filterbasen übergehen, entstehen also aus Filtern über E Filter über E'. Hieraus folgt auf Grund von Satz 3 mittels der zweiten Gleichung in Satz 6 und des über Stapel Gesagten, daß vermöge φ auch Raster in Raster übergehen. Benützt man außerdem Satz 5, so hat man insgesamt

Korollar 1. *φ sei eine Abbildung von E auf E'. Ist $\mathfrak{a}$ ein Stapel bzw. Filter bzw. Raster bzw. Ultrafilter über E, so entsprechend $\varphi\mathfrak{a}$ über E'*

In den Anwendungen wird es nun nicht immer der Fall sein, daß der Definitionsbereich $D = D(\varphi)$ der Abbildung φ mit dem gerade betrachteten Originalraum E zusammenfällt; mit anderen Worten: gelegentlich wird man Abbildungen aus E — $D \subsetneq E$ —, nicht notwendig von E — $D = E$ — zu betrachten haben[25]). Dieser Fall läßt sich auf den der Abbildung von durch sog. Spurbildung zurückführen. φ läßt sich nämlich zusammensetzen aus der identischen Selbstabbildung der Menge D, gedeutet als Abbildung aus E auf D, und der Abbildung φ, gedeutet als Abbildung von D auf E'. Wendet man φ auf ein beliebiges Mengensystem $\mathfrak{a}$ über E an, so gilt also $\varphi\mathfrak{a} = \varphi(\mathfrak{a}_D)$, unter $\mathfrak{a}_D$ die Spur von $\mathfrak{a}$ in der Menge D, d. h. die Menge aller Durchschnitte $A \cap D$ mit $A \in \mathfrak{a}$ verstanden. Da stets $(\mathscr{H}_E\mathfrak{a})_D = \mathscr{H}_D\mathfrak{a}_D$, für Filter $\mathfrak{a}$ (über E) im Falle $D \in \mathfrak{a}$ auch $(\mathscr{G}_E\mathfrak{a})_D = \mathscr{G}_D\mathfrak{a}_D$ gilt, liefert Satz 6 das

Korollar 2. *Für eine beliebige Abbildung φ aus E auf E' und ein beliebiges Mengensystem $\mathfrak{a}$ über E gilt $\varphi\mathscr{H}_E\mathfrak{a} = \mathscr{H}_{E'}\varphi\mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{a}$ ein Filter bzw. Raster über E, so gilt im Falle $D(\varphi) \in \mathfrak{a}$ bzw. $D(\varphi) \in \mathscr{G}_E\mathfrak{a}$ auch $\varphi\mathscr{G}_E\mathfrak{a} = \mathscr{G}_{E'}\varphi\mathfrak{a}$.*

Die Aussage über Raster ist auf Grund von Satz 3, Korollar 1 zu Satz 1, Beziehung (1.10) und der ersten Gleichung in Korollar 2 mit der über Filter äquivalent.

Ist das Korollar 2 als ein — in gewisser Weise verschärfender — Zusatz zu Satz 6 anzusehen, so haben wir in Verschärfung von Korollar 1 das

Korollar 3. *φ sei eine Abbildung aus E auf E', $\mathfrak{a}$ ein Stapel über E; dann ist das Bild $\varphi\mathfrak{a}$ genau dann ein Stapel (über E'), wenn $D(\varphi) \in \mathscr{G}_E\mathfrak{a}$. In diesem Falle ist dann mit $\mathfrak{a}$ auch $\varphi\mathfrak{a}$ Filter bzw. Raster bzw. Ultrafilter.*

Beweis. Aus der ersten Gleichung in Korollar 2 folgt: das Bild $\varphi\mathfrak{a}$ eines nichtleeren aufsteigenden Mengensystems $\mathfrak{a}$ (über E) ist ein nichtleeres aufsteigendes Mengensystem (über E') — und ist insbesondere (per definitionem) genau dann ein Stapel, wenn $O \notin \varphi\mathfrak{a}$, also genau dann, wenn $D \in \mathscr{G}_E\mathfrak{a}$. In

[25]) Unter dem (durch φ vermittelten) Bild φA der Menge A verstehen wir, wie üblich, die Menge aller Bildelemente φa mit $a \in A$; ausdrücklich lassen wir es zu, daß A nicht im Definitionsbereich von φ enthalten ist. Vgl. Bourbaki [7], S. 72, définition 3, J. Schmidt [31], S. 200.

diesem Falle ist bekanntlich[26]) die Spur $\mathfrak{a}_D$ eines Filters $\mathfrak{a}$ (über E) ein Filter (über D), folglich nach Korollar 1 $\varphi\mathfrak{a}$ ein Filter (über E'). Die Behauptung über Raster reduziert man etwa, mittels der Sätze 3 und 4, der zweiten Gleichung in Korollar 2 und des über Stapel Gesagten, auf die Behauptung über Filter, diejenige über Ultrafilter mittels Satz 5 auf die über Filter und Raster.

§ 2. Direkte Summe von Mengen

Sei $(K_i)_{i\in I}$ eine Familie von irgendwelchen Mengen K_i. Um Triviales auszuschließen, nehmen wir ein für allemal den *Indexbereich* I als nichtleer an, wohingegen wir die *Summanden* K_i auch gelegentlich leer sein lassen werden. Unter der *direkten Summe der Mengenfamilie* $(K_i)_{i\in I}$[27]) verstehen wir die Menge

$$\underset{i\in I}{\mathsf{S}}\, K_i$$

aller geordneten Paare (i, k) mit $i \in I$, $k \in K_i$. Um die Beziehungen zwischen dieser Menge und dem Indexbereich I wie den Summanden K_i technisch bequem zu beherrschen, führen wir wie üblich gewisse Abbildungen ein. Unter der *ersten* bzw. *zweiten Projektion des Elements* (i, k) verstehen wir das Element

$$p(i, k) = i \quad \text{bzw.} \quad q(i, k) = k\,;$$

der *erste Projektionsoperator* p ist also eine eindeutige Abbildung von $\mathsf{S}\, K_i$ in (ja, falls alle K_i nichtleer sind, auf) den Indexbereich I, der *zweite Projektionsoperator* q eine eindeutige Abbildung von $\mathsf{S}\, K_i$ auf die Vereinigung der Summanden, $\bigcup K_i$.

Es ist bequem, auch noch, für ein jedes $j \in I$, die Einschränkung q_j von q auf die Menge

$$\widehat{K_j} = \{j\} \times K_j = \underset{i\in\{j\}}{\mathsf{S}}\, K_i$$

zu betrachten; dieser *zu j gehörige eingeschränkte zweite Projektionsoperator* ist offenbar eine eineindeutige Abbildung von $\widehat{K_j}$ auf K_j, deren Umkehrung q_j^{-1},

$$k \to q_j^{-1} k = (j, k) \qquad (k \in K_j)\,,$$

man auch als *die (zu j gehörige) kanonische Abbildung von K_j in $\mathsf{S}\, K_i$* bezeichnet ($\widehat{K_j} = q_j^{-1} K_j$ ist also das *kanonische Bild von* K_j).

Mit den Abbildungen p, q, q_j ist nun auch, für jede Teilmenge $B \subseteq \mathsf{S} K_i$, die *erste* bzw. *zweite Projektion der Menge* B[28])

$$pB \quad \text{bzw.} \quad qB\,,$$

sowie die hinfort als *j-te Komponente von B* bezeichnete Menge

$$q_j B = q(B \cap \widehat{K_j}) \tag{2.1}$$

erklärt. Mit den Komponenten von B ist uns übrigens umgekehrt auch die

---

[26]) Bourbaki [6], S. 39, proposition 7. Das vorstehende Korollar 3 enthält diesen Satz wie auch proposition 8 aus Bourbaki [6], S. 40, als Spezialfall.

[27]) Bourbaki [7], S. 99: «somme d'une famille d'ensembles».

[28]) Bourbaki [7], S. 71: «première» bzw. «deuxième projection d'un graphe».

volle zweite Projektion gegeben, hat man offenbar doch

$$qB = \bigcup_{i \in I} q_i B \tag{2.2}$$

(die Vereinigung der Definitionsbereiche $\widehat{K}_i$ der q_i ist ja gerade die ganze Summe $\mathsf{S}\, K_i$, der Definitionsbereich von q, q ist also die „Vereinigung" der Abbildungen q_i). Auch die erste Projektion läßt sich auf Grund von

$$i \in pB \text{ genau dann, wenn } q_i B \neq O \tag{2.3}$$

auf die Komponenten $q_i B$ zurückführen.

Zur Veranschaulichung betrachten wir zwei wichtige Spezialfälle:

1. Für alle Indizes i gelte $K_i = K$; dann ist

$$\mathop{\mathsf{S}}_{i \in I} K_i = I \times K$$

das übliche cartesische Produkt der Mengen I und K; in diesem Spezialfalle sind die Projektionsoperatoren p und q von jeher im allgemeinen Gebrauch.

2. Wir bemerken: die kanonischen Bilder $\widehat{K}_i$ sind ja paarweise fremd. Genau dann, wenn die K_i selbst schon paarweise fremd sind, ist der zweite Projektionsoperator q eineindeutig. Man wird in diesem Falle auf Grund dieser natürlichen eineindeutigen Zuordnung q die Summe $\mathsf{S}\, K_i$ mit der Vereinigung $\bigcup K_i$, also auch das kanonische Bild $\widehat{K}_j$ mit dem Summanden K_j elementweise identifizieren; gemäß (2.1) wird dabei die j-te Komponente $q_j B$ mit dem Durchschnitt $B \cap K_j$ identifiziert. Sind nun die K_i außerdem nichtleer, so ist das System der K_i eine Klasseneinteilung von $\bigcup K_i$ nach einer Äquivalenzrelation R, und $i \to K_i$ $(i \in I)$ ist eine eineindeutige Abbildung des Indexbereiches I auf diese Klasseneinteilung $\bigcup K_i / R = \{K_i \mid i \in I\}$. Auf Grund dieser eineindeutigen Abbildung wird man dann auch noch den Indexbereich I mit der Klasseneinteilung $\bigcup K_i / R$ identifizieren dürfen. Nach beiden Identifizierungen ordnet der erste Projektionsoperator p schließlich dem Element $k \in \bigcup K_i$ (eigentlich: dem Paar $(i, k) \in \mathsf{S}\, K_i$) die von ihm repräsentierte Äquivalenzklasse modulo R, K_i, zu (eigentlich: den eindeutig bestimmten zugehörigen Index i).

Betrachten wir wieder den allgemeinen Fall! Die Bezeichnung von $q_j B$ als „j-te Komponente von B" ($B \subseteq \mathsf{S}\, K_i$) wird eigentlich erst gerechtfertigt durch die fast selbstverständlichen Gleichungen

$$B = \mathop{\mathsf{S}}_{i \in I} q_i B \tag{2.4}$$

und (für eine beliebige Familie von Mengen $B_i \subseteq K_i$)

$$q_j \mathop{\mathsf{S}}_{i \in I} B_i = B_j\,, \tag{2.5}$$

die wir inhaltlich zusammenfassen in dem

Satz 7 (unbeschränkt ausführbare, eindeutige Komponentenzerlegung). *Jede Menge $B \subseteq \mathsf{S}\, K_i$ ist auf eine und nur eine Weise in der Form $B = \mathop{\mathsf{S}}_{i \in I} B_i$ mit $B_i \subseteq K_i$ darstellbar; dabei ist $B_i = q_i B$.*

Etwas abstrakter: $(B_i)_{i\in I} \to B = \mathsf{S}\, B_i$ ist eine eineindeutige Abbildung von dem cartesischen Produkt der Potenzmengen $\mathfrak{P}\, K_i$ auf die Potenzmenge $\mathfrak{P}\,\mathsf{S}\, K_i$, mit der Umkehrung $B \to (q_i B)_{i\in I}$. Da aber beide Abbildungen, bei der Festsetzung

$$(B_i) \subseteq (C_i) \quad \text{genau dann, wenn} \quad B_i \subseteq C_i \quad \text{für jedes} \quad i \in I$$

offenbar die Inklusion erhalten,

$$\text{(2.6)} \qquad \text{wenn} \quad (B_i) \subseteq (C_i), \quad \text{so} \quad \mathsf{S}\, B_i \subseteq \mathsf{S}\, C_i;$$

$$\text{(2.7)} \qquad \text{wenn} \quad B \subseteq C, \quad \text{so} \quad (q_i B) \subseteq (q_i C),$$

so hat man sogar den genaueren

Satz 8 (Isomorphiesatz). *Der vollständige Verband* $\mathfrak{P}\,\mathsf{S}\, K_i$ *ist, vermöge* $B \to (q_i B)$, *dem kardinalen (cartesischen, direkten) Produkt*[29]) $\mathsf{P}\,\mathfrak{P}\, K_i$ *der vollständigen Verbände* $\mathfrak{P}\, K_i$ *isomorph.*

Auf Grund dieses Satzes rechnet man hinsichtlich Vereinigungs-, Durchschnitts-, Komplementbildung mit den Teilmengen von $\mathsf{S}\, K_i$ „komponentenweise"; insbesondere gilt

$$\text{(2.8)} \qquad q_i(B \cap C) = q_i B \cap q_i C,$$

der Operator q_i ist (im Gegensatz zu p und q) durchschnittstreu.

Wir bemerken übrigens noch, daß man, nach Streichung aller leeren Komponenten $q_i B$, jedes nichtleere $B \subseteq \mathsf{S}\, K_i$ auch in der „kürzesten" Form

$$\text{(2.9)} \qquad B = \mathop{\mathsf{S}}_{i \in p B} q_i B$$

darstellen kann [beachte die Äquivalenz (2.3)!].

§ 3. Direkte Summe von Stapeln

Die im vorigen Paragraphen eingeführte Operation der direkten Summation von Mengen — im Prinzip wohlbekannt, wenn auch im allgemeinen nicht so sorgfältig behandelt — läßt sich auf Stapel „fortsetzen". In der Tat lassen sich die (nichtleeren) Teilmengen B einer Grundmenge E mit den ihnen eineindeutig zugeordneten *Hauptstapeln (Hauptfiltern*[30])) $\mathscr{H}_E\{B\}$ identifizieren; so betrachtet, wird zunächst der Begriff des (beliebigen) Stapels zu einer Verallgemeinerung des Begriffs der (nichtleeren) Menge.

Von nun an seien neben dem Indexbereich I auch die Mengen $K_i (i \in I)$ nichtleer; sei $(\mathfrak{b}_i)_{i\in I}$ eine Familie von beliebigen Stapeln $\mathfrak{b}_i$ über K_i. Unter der *direkten Summe der Stapelfamilie* $(\mathfrak{b}_i)_{i\in I}$ verstehen wir mit G. Bruns und J. Schmidt das System

$$\mathop{\mathsf{S}}_{i\in I} \mathfrak{b}_i$$

aller Teilmengen X von $\mathsf{S}\, K_i$ derart, daß $q_i X \in \mathfrak{b}_i$ für alle $i \in I$; per definitionem ist die direkte Summe von Stapeln wieder ein Stapel (über $\mathsf{S}\, K_i$). Zufolge Satz 8

[29]) Bourbaki [8], S. 7—8: «produit des ensembles ordonnés».
[30]) J. Schmidt [30], S. 365.

ist die direkte Summe der Stapel $\mathfrak{b}_i$ nichts anderes als das System aller direkten Summen $\mathop{\mathsf{S}}\limits_{i \in I} B_i$ von Mengen $B_i \in \mathfrak{b}_i$[31]). Allgemeiner gilt

Satz 9 (Basiskonstruktion). *Ist zu jedem Index $i \in I$ eine Basis $\mathfrak{b}'_i$ des Stapels $\mathfrak{b}_i$ gegeben, so bilden die direkten Summen $\mathop{\mathsf{S}}\limits_{i \in I} B'_i$ mit $B'_i \in \mathfrak{b}'_i$ eine Basis des Stapels $\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$.*

Der Begriff der direkten Summe von Stapeln ist eine „Fortsetzung" des Begriffs der direkten Summe von Mengen; sind nämlich die $\mathfrak{b}_i$ Hauptstapel, erzeugt von Mengen $B_i \subsetneq K_i$, $\mathfrak{b}_i = \mathscr{H}_i\{B_i\}$ ($\mathscr{H}_i$ bezogen auf die Grundmenge K_i), so hat man zufolge Satz 9

$$\mathsf{S}\, \mathscr{H}_i\{B_i\} = \mathscr{H}\{\mathsf{S}\, B_i\} \tag{3.1}$$

(das $\mathscr{H}$ der rechten Seite bezogen auf die Grundmenge $\mathsf{S}\, K_i$).

Bei dieser Verallgemeinerung gilt nun allerdings Satz 7 nicht mehr in vollem Umfang: die „Komponentenzerlegung" der Stapel $\mathfrak{b}$ über $\mathsf{S}\, K_i$ ist zwar nicht mehr unbeschränkt ausführbar, aber jedenfalls immer noch eindeutig:

Satz 10 (eindeutige Komponentenzerlegung). *Jeder Stapel $\mathfrak{b}$ über $\mathsf{S}\, K_i$ ist auf höchstens eine Weise in der Form $\mathfrak{b} = \mathop{\mathsf{S}}\limits_{i \in I} \mathfrak{b}_i$ mit Stapeln $\mathfrak{b}_i$ über K_i darstellbar, nämlich mit $\mathfrak{b}_i = q_i \mathfrak{b}$*[32]).

Anders ausgedrückt: man hat, für einen beliebigen „Vektor", d. h. eine beliebige Familie von Stapeln $\mathfrak{b}_i$ über K_i, die — fast unmittelbar aus (2.5) fließende und dazu analoge — Gleichung

$$q_j\, \mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i = \mathfrak{b}_j\,; \tag{3.2}$$

deswegen wird man auch hier wieder $q_j \mathfrak{b}$ als die *j-te Komponente des Stapels* $\mathfrak{b} = \mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$ bezeichnen dürfen. [Dagegen ist nicht jeder Stapel $\mathfrak{b}$ über $\mathsf{S}\, K_i$ in der zu (2.4) analogen Form $\mathfrak{b} = \mathsf{S}\, q_i \mathfrak{b}$ darstellbar.]

In abstrakter Form besagt Satz 10: $(\mathfrak{b}_i)_{i \in I} \to \mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$ ist eine eineindeutige Abbildung von der Menge aller solcher Vektoren $(\mathfrak{b}_i)$, dem cartesischen Produkt der Verbände aller Stapel über den K_i, in (nicht auf) den Verband aller Stapel $\mathfrak{b}$ über $\mathsf{S}\, K_i$, mit der Umkehrung $\mathfrak{b} \to (q_i \mathfrak{b})_{i \in I}$. Daß hier keine Abbildung „auf" vorliegt, folgt schon aus der zu $p\, \mathsf{S}\, K_i = I$ analogen Gleichung

$$p\, \mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i = \{I\}\,; \tag{3.3}$$

hiernach ist $\mathfrak{b}$ höchstens dann direkt zerlegbar, d. h. in der Gestalt $\mathfrak{b} = \mathop{\mathsf{S}}\limits_{i \in I} \mathfrak{b}_i$ darstellbar, wenn $p\mathfrak{b} = \{I\}$ ist[33]). (In § 5 wird durch ein Beispiel belegt, daß diese Bedingung nicht hinreicht.)

Wie im vorigen Paragraphen können wir aber den Satz von der eindeutigen Komponentenzerlegung zu einem (vom Leser zu formulierenden) ordnungstheoretischen Isomorphiesatz verschärfen: die Abbildungen $(\mathfrak{b}_i) \to \mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$,

---

[31]) Dies die Definition von BRUNS-SCHMIDT [13], S. 141.

[32]) Per definitionem ist $q_i \mathfrak{b}$ das System aller $q_i B$ mit $B \in \mathfrak{b}$.

[33]) Zum Beispiel erweist sich — bei mindestens zweielementigem I — schon der von einem $\widehat{K_j}$ über $\mathsf{S} K_i$ erzeugte Hauptstapel (Hauptfilter) $\mathfrak{b} = \mathscr{H}\{\widehat{K_j}\}$ als nicht in der Form $\mathfrak{b} = \mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$ mit Stapeln $\mathfrak{b}_i$ darstellbar.

$\mathfrak{b} \to (q_i \mathfrak{b})$ sind immer noch monoton, d. h. analog (2.6) und (2.7) gilt:

$$\text{(3.4)} \qquad \text{wenn} \quad (\mathfrak{b}_i) \subseteq (\mathfrak{c}_i)\,, \quad \text{so} \quad \mathsf{S}\,\mathfrak{b}_i \subseteq \mathsf{S}\,\mathfrak{c}_i\text{[34]);}$$

$$\text{(3.5)} \qquad \text{wenn} \quad \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{c}\,, \quad \text{so} \quad (q_i \mathfrak{b}) \subseteq (q_i \mathfrak{c})\,.$$

Nach G. Bruns[35]) läßt sich die direkte Summe von Stapeln übrigens verbandstheoretisch deuten: geht man vom Stapel $\mathfrak{b}_i$ ($i \in I$) zu seinem *kanonischen Bild* $\widehat{\mathfrak{b}_i} = q_i^{-1}\mathfrak{b}_i$, also einem Stapel über $\widehat{K_i}$, über, von diesem zur aufsteigenden Hülle $\mathscr{H}\widehat{\mathfrak{b}_i}$ bezüglich der Menge $\mathsf{S}\,K_i$, einem Stapel über $\mathsf{S}\,K_i$, so erhält man

Satz 11 (verbandstheoretische Darstellung). $\mathsf{S}\,\mathfrak{b}_i = \bigcap \mathscr{H}\widehat{\mathfrak{b}_i}$ *($\mathscr{H}$ bezogen auf die Grundmenge $\mathsf{S}\,K_i$).*

Beweis. Sei $j \in I$ und $X \subseteq \mathsf{S}\,K_i$. Gilt $q_j X \in \mathfrak{b}_j$, so $q_j^{-1} q_j X \in \widehat{\mathfrak{b}_j}$; andererseits hat man $q_j^{-1} q_j X \subseteq X$, folglich $X \in \mathscr{H}\widehat{\mathfrak{b}_j}$. Hat man umgekehrt $X \in \mathscr{H}\widehat{\mathfrak{b}_j}$, so hat man $q_j X \in \mathfrak{b}_j$, da nach Korollar 2 zu Satz 6 $q_j \mathscr{H}\widehat{\mathfrak{b}_j} = \mathscr{H}_j\, q_j\, \widehat{\mathfrak{b}_j} = \mathfrak{b}_j$ (der Hüllenoperator $\mathscr{H}_j$ bezogen auf die Grundmenge K_j).

Für die topologischen Anwendungen, bei denen man es mit Filtern anstelle beliebiger Stapel zu tun hat, ist die Tatsache wichtig, daß die direkte Summenbildung aus dem Bereich der Filter nicht hinausführt[36]). Genauer haben wir sogar, als unmittelbare Folge von (2.8), (3.2) und Korollar 3 zu Satz 6, den

Satz 12. *Die direkte Summe der Stapel $\mathfrak{b}_i$ ist dann und nur dann ein Filter, wenn jeder Summand $\mathfrak{b}_i$ ein Filter ist.*

§ 4. Gestapelte Summe von Stapeln, gefilterte Summe von Filtern, gerasterte Summe von Rastern

Der Umstand, daß nicht alle Stapel über $\mathsf{S}\,K_i$ im Sinne des vorigen Paragraphen direkt zerlegbar sind, verliert an Gewicht, da es gelingt, den Bereich der „zerlegbaren" Stapel durch Graduierung der „direkten" zur „gestapelten" Summe beträchtlich zu erweitern.

Von jetzt ab werden wir nämlich den Indexbereich I — eine abstrakte (strukturlose) Menge — durch Einführung eines Stapels $\mathfrak{a}$ über I, des *Indexstapels*, mit einer gewissen Struktur versehen, anstelle der abstrakten Menge I die *gestapelte Menge* $(I, \mathfrak{a})$ zugrunde legen. Zu unserer Bequemlichkeit verabreden wir, in Verallgemeinerung einer bekannten klassischen Redeweise, folgendes. Sei $H(i)$ eine Aussageform in der Variablen i, sinnvoll für alle Elemente $i \in I$. Gibt es nun eine Teilmenge $A \subseteq I$ mit $A \in \mathfrak{a}$ derart, daß $H(i)$ für alle $i \in A$ gilt, oder, was wegen der Stapeleigenschaft von $\mathfrak{a}$ auf dasselbe hinausläuft: gehört die durch $H(i)$ definierte Teilmenge von I zum Stapel $\mathfrak{a}$,

$$\{i \,|\, H(i)\} \in \mathfrak{a}\,,$$

---

[34]) Die Enthaltenseinsrelation zwischen zwei Vektoren werde wie in § 2 komponentenweise erklärt.

[35]) Bruns [10], S. 27, dort jedoch nur für Filter.

[36]) Die direkte Summation von Filtern findet Verwendung bei der Strukturuntersuchung gegebener Filter (in topologischer Interpretation: bei Untersuchung der in den Umgebungsfiltern verankerten punktalen Raumstruktur). Siehe Bruns-Schmidt [12] und [13], Bruns [10] und [11].

so sagen wir: *$H(i)$ gilt für $\mathfrak{a}$-fast alle $i \in I$*[37]). Indem wir in Satz 1 $E = I$ setzen, können wir ihn wie folgt wenden: *entweder gilt die Aussageform $H(i)$ für $\mathfrak{a}$-fast alle $i \in I$, oder ihre Verneinung "non $H(i)$" für $\mathscr{G}\,\mathfrak{a}$-fast alle $i \in I$.*

Außer den Stapeln $\mathfrak{b}_i$ über den K_i ($i \in I$), den *Summandenstapeln*, sei jetzt also noch ein Indexstapel $\mathfrak{a}$ über I gegeben. Unter der *durch $\mathfrak{a}$ gestapelten Summe der Stapelfamilie* $(\mathfrak{b}_i)_{i \in I}$ verstehen wir das System

$$\underset{i \in I}{{}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}}\, \mathfrak{b}_i$$

aller Teilmengen X von $\mathsf{S}\, K_i$ derart, daß $q_i X \in \mathfrak{b}_i$ für $\mathfrak{a}$-fast alle $i \in I$; die gestapelte Summe ist ein Stapel über der direkten Summe $\mathsf{S}\, K_i$. Gilt für jedes i $K_i = K$ und $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{b}$, so bezeichnen wir ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$ auch als das *ordinale Produkt* $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$ *von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$*[38]); das ordinale Produkt ist ein Stapel über dem cartesischen Produkt $I \times K$.

Offenbar ist die direkte Summe der $\mathfrak{b}_i$ nichts anderes als die durch den gröbsten Stapel $\mathfrak{a} = \{I\}$ gestapelte Summe,

$$\text{(4.1)} \qquad {}^{\{I\}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i = \mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$$

Von praktischer Bedeutung ist die folgende Verallgemeinerung von Satz 9,

Satz 13 (Basiskonstruktion). *Sei $\mathfrak{a}'$ eine Basis des Indexstapels $\mathfrak{a}$ über I, seien die $\mathfrak{b}'_i$ Basen der Summandenstapel $\mathfrak{b}_i$ über den K_i. Dann bilden die direkten Summen $\underset{i \in A'}{\mathsf{S}}\, B'_i$ mit $A' \in \mathfrak{a}'$ und $B'_i \in \mathfrak{b}'_i$ ($i \in A'$) eine Basis der gestapelten Summe ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$.*

Beweis. Ist $Y = \underset{i \in A'}{\mathsf{S}}\, B'_i$ mit $A' \in \mathfrak{a}'$ und $B'_i \in \mathfrak{b}'_i$ (zu jedem $i \in A'$), so gilt $q_j Y = B'_j \in \mathfrak{b}'_j$ für alle $j \in A'$, mithin, da laut Voraussetzung $\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}'_j \subseteq \mathfrak{b}_j$, $Y \in {}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$. Umgekehrt sei $X \in {}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$. Dann gibt es eine Menge $A \in \mathfrak{a}$ derart, daß $q_j X \in \mathfrak{b}_j$ für alle $j \in A$. Da $\mathfrak{a}'$ eine Basis von $\mathfrak{a}$ ist, enthält A eine Menge $A' \in \mathfrak{a}'$; es sei $i \in A'$. Da $\mathfrak{b}'_i$ eine Basis ist von $\mathfrak{b}_i$, enthält $q_i X$ eine Menge $B'_i \in \mathfrak{b}'_i$. Die durch $Y = \underset{i \in A'}{\mathsf{S}}\, B'_i$ definierte (Auswahlaxiom!) Menge Y ist, da zu jedem Index $i \in I$ gilt $q_i Y \subseteq q_i X$, in der Menge X enthalten (vgl. Satz 8). Insgesamt haben

[37]) Wenn aus dem Zusammenhang unmißverständlich klar ist, um welchen Stapel $\mathfrak{a}$ es sich gerade handle, so sagt man auch einfach: für fast alle $i \in I$. Im klassischen Spezialfall ist I die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathfrak{a}$ der Fréchet-Filter (das System der Komplemente der endlichen Mengen). Wird die Menge I durch eine (äußere) Maßfunktion μ zu einem Maßraum (I, μ), so verstehe man unter $\mathfrak{a}$ das System (den Filter) der Komplemente der μ-Nullmengen; statt des ausführlicheren „$H(i)$ gilt für $\mathfrak{a}$-fast alle $i \in I$" pflegt man hier meist kürzer „$H(i)$ gilt fast überall" o. ä. zu sagen. Wird I durch eine Ausrichtung (richtende Ordnung) $\leqq$ zu einer gerichteten Menge $(I, \leqq)$, so verstehe man unter $\mathfrak{a}$ den *Perfinalitätsfilter* (J. SCHMIDT [32], S. 275), das System der perfinalen Teilmengen von I; hier, aber auch m. E. wohl nur hier, empfiehlt sich neben der klassischen die Haupt-Nöbelingsche Redeweise „$H(i)$ gilt für schließlich alle $i \in I$" (= „für $\mathfrak{a}$-fast alle $i \in I$") als äußerst suggestiv (HAUPT-AUMANN-PAUC [17], S. 170; bei NÖBELING [25], S. 53, für beliebige Filter $\mathfrak{a}$).

[38]) Näheres über dieses Produkt (das sich übrigens induktiv auch für endlich viele Faktoren erklären läßt), insbesondere über seinen Zusammenhang mit dem «produit de filtres» von BOURBAKI [6], findet der Leser in § 5.

wir: Das System aller direkten Summen $\underset{i \in A'}{\mathsf{S}} B_i'$ mit $A' \in \mathfrak{a}'$ und $B_i' \in \mathfrak{b}_i'$ $(i \in A')$ ist ebenso fein wie ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$, somit eine Basis von ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$.

Wählt man insbesondere $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$ und, zu jedem Index i, $\mathfrak{b}_i' = \mathfrak{b}_i$, so liefert Satz 13 (auf Grund der Vorbemerkung zu Satz 9) eine Darstellung der gestapelten Summe mit Hilfe gewisser direkter Summen von Stapeln:

Korollar. *Die Vereinigung aller direkten Summen* $\underset{i \in A}{\mathsf{S}}\, \mathfrak{b}_i$ *mit* $A \in \mathfrak{a}$ *ist eine Basis der gestapelten Summe* ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$:

$$ {}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i = \mathscr{H} \bigcup_{A \in \mathfrak{a}} \underset{i \in A}{\mathsf{S}}\, \mathfrak{b}_i $$

(der Hüllenoperator $\mathscr{H}$ *bezogen auf die Menge* $\mathsf{S}\, K_i$*).*

Dieses Korollar führt die allgemeine gestapelte Summe auf die direkte Summe zurück, auf denjenigen extremen Spezialfall (4.1), bei dem der Indexstapel $\mathfrak{a}$ zum gröbsten Stapel $\{I\}$ spezialisiert ist. Wir betrachten jetzt noch den anderen extremen Spezialfall, bei dem der Indexstapel $\mathfrak{a}$ völlig beliebig, hingegen die Summandenstapel $\mathfrak{b}_i$ zu den gröbsten Stapeln $\{K_i\}$ spezialisiert sind. Die allgemeine gestapelte Summe ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$ setzt sich in einfacher Weise aus der direkten Summe

$$ {}^{\{I\}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i = \mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i $$

und dem „Zylinderstapel“

$$ {}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \{K_i\} $$

zusammen:

Satz 14. ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$ *ist die Menge aller Durchschnitte* $X \cap Y$ *mit* $X \in \mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$ *und* $Y \in {}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \{K_i\}$.

Beweis. Einerseits besteht $\mathfrak{u} = \mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$ aus allen direkten Summen $\underset{i \in I}{\mathsf{S}}\, B_i$ mit $B_i \in \mathfrak{b}_i$, wie vor Satz 9 bemerkt wurde. Andererseits ist nach Satz 13 die Menge $\mathfrak{v}$ aller „Zylindermengen“ $\underset{\alpha \in A}{\mathsf{S}}\, K_\alpha$ mit $A \in \mathfrak{a}$ eine Basis von ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \{K_i\}$. Da auf Grund von Satz 7 und (2.8) für alle $A \in \mathfrak{a}$ und alle $B_i \in \mathfrak{b}_i$ $(i \in I)$ die Identität

$$ \underset{\alpha \in A}{\mathsf{S}}\, B_\alpha = \underset{i \in I}{\mathsf{S}}\, B_i \cap \underset{\alpha \in A}{\mathsf{S}}\, K_\alpha $$

besteht, bildet nach Satz 13 die Menge aller Durchschnitte $U \cap V$ mit $U \in \mathfrak{u}$ und $V \in \mathfrak{v}$ eine Basis $\mathfrak{w}$ von ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$. Dies liefert nach Übergang zu den (aufsteigenden) Hüllen von $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ bezüglich $\mathsf{S}\, K_i$ ($\mathfrak{u}$ stimmt mit seiner Hülle überein) die Behauptung.

Hieraus folgt übrigens, daß ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$ ein Filter ist, wenn $\mathfrak{a}$ und sämtliche $\mathfrak{b}_i$ Filter sind. Denn die direkte Summe $\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$ ist dann nach Satz 12, der Zylinderstapel ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \{K_i\}$ deswegen ein Filter, weil seine Basis $\mathfrak{v}$ offenbar eine Filterbasis ist. Nach Satz 14 aber ist ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$ gerade die *Filtersumme* im Sinne von J. SCHMIDT[39]) der Filter $\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$ und ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \{K_i\}$.

In Verallgemeinerung der Durchschnittsdarstellung der direkten Summe von Stapeln (Satz 11) erhalten wir eine rein verbandstheoretische Darstellung

[39]) J. SCHMIDT [30], S. 362, Satz 2. Offenbar läßt sich die Bildung der Filtersumme auf Stapel ausdehnen.

der gestapelten Summe. Geht man wieder, für jedes i, vom Stapel $\mathfrak{b}_i$ zu seinem kanonischen Bild $q_i^{-1}\mathfrak{b}_i = \widehat{\mathfrak{b}}_i$, einem Stapel über dem kanonischen Bild $\widehat{K}_i$ von K_i, über, von diesem zu seiner aufsteigenden Hülle $\mathscr{H}\widehat{\mathfrak{b}}_i$ (bezüglich $\mathsf{S}\,K_i$), einem Stapel über $\mathsf{S}\,K_i$, so hat man

Satz 15 (verbandstheoretische Darstellung).

$$^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\,\mathfrak{b}_i = \bigcup_{A\in\mathfrak{a}}\ \bigcap_{i\in A} \mathscr{H}\widehat{\mathfrak{b}}_i$$

(der Hüllenoperator $\mathscr{H}$ bezogen auf die Menge $\mathsf{S}\,K_i$).

Der Beweis ergibt sich, wie schon der von Satz 11, daraus, daß $q_j X \in \mathfrak{b}_j$ mit $X \in \mathscr{H}\widehat{\mathfrak{b}}_j$ äquivalent ist; man könnte Satz 15 aber auch, mit etwas Rechnung, unter Benutzung des Korollars zu Satz 13, auf Satz 11 zurückführen.

Im Hinblick auf die im Stapelverband, d. h. im Verband aller Stapel über einer (nichtleeren) Grundmenge, in Gestalt des Verzahnungsoperators $\mathscr{G}$ vorliegende Dualität (§ 1) ist für uns wichtig der

Satz 16 (Verzahnungsinvarianz). $\mathscr{G}\,{}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\,\mathfrak{b}_i = {}^{\mathscr{G}\mathfrak{a}}\mathsf{S}\,\mathscr{G}\mathfrak{b}_i$ *(dabei beziehe sich der Operator $\mathscr{G}$ allemal auf die Grundmenge desjenigen Stapels, auf den er gerade angewandt wird).*

B e w e i s. Nach Satz 1 ist $X \in \mathscr{G}\,{}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\,\mathfrak{b}_i$ mit $E - X \notin {}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\,\mathfrak{b}_i$ ($E = \mathsf{S}\,K_i$) gleichbedeutend, und das bedeutet per definitionem, daß n i c h t $K_i - q_i X = q_i(E - X) \in \mathfrak{b}_i$ für $\mathfrak{a}$-fast alle $i \in I$, anders ausgedrückt, daß $K_i - q_i X \notin \mathfrak{b}_i$ oder, was nach Satz 1 dasselbe besagt, $q_i X \in \mathscr{G}\mathfrak{b}_i$ für $\mathscr{G}\mathfrak{a}$-fast alle $i \in I$, und das ist per definitionem nichts anderes als $X \in {}^{\mathscr{G}\mathfrak{a}}\mathsf{S}\,\mathscr{G}\mathfrak{b}_i$.

Wir drücken den Inhalt von Satz 16 auch so aus, die gestapelte Summe von Stapeln sei „verzahnungsinvariant".

Es erhebt sich nun, im Hinblick auf die eindeutige Komponentenzerlegung der direkten Summe von Stapeln (Satz 10), die Frage, inwieweit der Stapel $\mathfrak{b} = {}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\,\mathfrak{b}_i$ den „gestapelten Vektor" $(\mathfrak{b}_i)_{\mathfrak{a}}$ eindeutig bestimmt. Zunächst: der Indexstapel $\mathfrak{a}$ wird — in Verallgemeinerung von (3.3) — durch $\mathfrak{b}$ eindeutig festgelegt auf Grund von

Satz 17. $p\,{}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\,\mathfrak{b}_i = \mathfrak{a}$.

Was die Summandenstapel $\mathfrak{b}_i$ betrifft, so sind diese für alle Indizes i aus dem Durchschnitt $\bigcap A$ von $\mathfrak{a}$ in der früheren Weise — (3.2) — aus $\mathfrak{b} = {}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\,\mathfrak{b}_i$ als „Komponenten" konstruierbar, die übrigen Summanden hingegen lassen sich so gewiß nicht mehr berechnen, auf Grund von

Satz 18.

$$q_j\,{}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\,\mathfrak{b}_i = \begin{cases} \mathfrak{b}_j & \textit{(falls } j \in \bigcap\limits_{A\in\mathfrak{a}} A\textit{)}, \\ \mathfrak{P}K_j & \textit{(sonst)}. \end{cases}$$

B e w e i s der Sätze 17 und 18. Ist $\mathfrak{y}$ die im Korollar zu Satz 13 angegebene Basis von ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\,\mathfrak{b}_i$, so ist auf Grund der Gestalt der Mengen $Y \in \mathfrak{y}$ (siehe Bemerkung vor Satz 9) klar, daß

$$p\mathfrak{y} = \mathfrak{a}\,, \qquad \begin{matrix} q_j\mathfrak{y} = \mathfrak{b}_j & \text{(falls } j \in \bigcap\limits_{A\in\mathfrak{a}} A\text{)}, \\ O \in q_j\mathfrak{y} & \text{(sonst)}. \end{matrix}$$

Mittels Satz 6 (Abbildung p) und des Korollars 2 hierzu (Abbildung q_j) erhält man daraus unmittelbar die Behauptungen der beiden Sätze.

Tatsächlich ist der Vektor $(\mathfrak{b}_i)$ durch $\mathfrak{b} = {}^{\mathfrak{a}}S\,\mathfrak{b}_i$ überhaupt nicht mehr eindeutig bestimmt. Bei Beschränkung auf *gefilterte Summen*, d. h. auf gestapelte Summen mit einem Filter als Indexstapel, gilt nämlich

Satz 19. *Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ Filter über I, $\mathfrak{b}_i$ und $\mathfrak{b}'_i$ Stapel über den K_i $(i \in I)$, so gilt ${}^{\mathfrak{a}}S\,\mathfrak{b}_i \subseteq {}^{\mathfrak{a}'}S\,\mathfrak{b}'_i$ genau dann, wenn $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}_i \subseteq \mathfrak{b}'_i$ für $\mathfrak{a}'$-fast alle i.*

Beweis. Sei zunächst ${}^{\mathfrak{a}}S\,\mathfrak{b}_i \subseteq {}^{\mathfrak{a}'}S\,\mathfrak{b}'_i$. Nach Satz 17 ist dann $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}'$. Jedem Index $i \in I$ mit $\mathfrak{b}_i \not\subseteq \mathfrak{b}'_i$ ordnen wir eine Menge $B_i \in \mathfrak{b}_i - \mathfrak{b}'_i$ zu (Auswahlaxiom!), für alle übrigen Indizes i sei $B_i = K_i$. Man hat dann $S\,B_i \in {}^{\mathfrak{a}}S\,\mathfrak{b}_i$ und damit $S\,B_i \in {}^{\mathfrak{a}'}S\,\mathfrak{b}'_i$, d. h. $B_i \in \mathfrak{b}'_i$ und damit $\mathfrak{b}_i \subseteq \mathfrak{b}'_i$ für $\mathfrak{a}'$-fast alle $i \in I$. Soweit haben wir noch keine Filtereigenschaften benötigt. Sei nun umgekehrt $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}_i \subseteq \mathfrak{b}'_i$ für $\mathfrak{a}'$-fast alle $i \in I$. Sei $X \in {}^{\mathfrak{a}}S\,\mathfrak{b}_i$, d. h. $q_i X \in \mathfrak{b}_i$ für alle $i \in A$ mit einer Menge $A \in \mathfrak{a}$. Nach Voraussetzung ist aber $\mathfrak{b}_i \subseteq \mathfrak{b}'_i$ für alle i einer Menge $A' \in \mathfrak{a}'$. Wegen $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}'$, und da $\mathfrak{a}'$ Filter ist, hat man $A \cap A' \in \mathfrak{a}'$, und für alle $i \in A \cap A'$ gilt $q_i X \in \mathfrak{b}'_i$, mithin $X \in {}^{\mathfrak{a}'}S\,\mathfrak{b}'_i$.

Dieser Satz ist im wesentlichen das, was bei der Verallgemeinerung von der direkten Summe von Mengen (§ 2) über die direkte Summe von Stapeln (§ 3) zur gestapelten, genau: zur gefilterten Summe von Stapeln vom Isomorphiesatz 8 übriggeblieben ist. Zweimalige Anwendung liefert uns, als Ersatz für die eindeutige Komponentenzerlegung (Satz 7, Satz 10), das

Korollar (Eindeutigkeitssatz). *Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ Filter über I, $\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}'_i$ Stapel über den K_i $(i \in I)$, so gilt ${}^{\mathfrak{a}}S\,\mathfrak{b}_i = {}^{\mathfrak{a}'}S\,\mathfrak{b}'_i$ genau dann, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{b}'_i$ für $\mathfrak{a}$-fast alle i.*

Die Beschränkung dieses Korollars auf gefilterte Summen ist nach dem folgenden Satz die denkbar schwächste.

Satz 20. *Sei $\mathfrak{a}$ ein Stapel über I mit folgender Eigenschaft: für jede Mengenfamilie $(K_i)_{i \in I}$ und jedes Paar $(\mathfrak{b}_i)_{i \in I}$, $(\mathfrak{b}'_i)_{i \in I}$ von Familien von Stapeln über den K_i gelte ${}^{\mathfrak{a}}S\,\mathfrak{b}_i = {}^{\mathfrak{a}}S\,\mathfrak{b}'_i$ allemal dann, wenn $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{b}'_i$ für $\mathfrak{a}$-fast alle Indizes $i \in I$. Dann ist $\mathfrak{a}$ ein Filter*[40]).

Beweis. Besteht die Menge I nur aus einem einzigen Element i, so ist nichts zu beweisen: der einzige Stapel $\mathfrak{a} = \{I\}$ ist dann ein Filter. I bestehe aus also mindestens zwei Elementen. Sei nun $A_1, A_2 \in \mathfrak{a}$. Wir setzen alle K_i gleich I und definieren eine Menge $X \subseteq S\,K_i = I \times I$ so, daß $q_i X = I$ bzw. $\{i\}$, je nachdem $i \in A_1 \cap A_2$ oder $i \notin A_1 \cap A_2$. Ist also $\mathfrak{b}_i$ der von I bzw. $\{i\}$ erzeugte Hauptfilter über I, je nachdem $i \in A_2$ oder $i \notin A_2$, so gilt $q_i X \in \mathfrak{b}_i$ wenigstens für die Indizes $i \in A_1$, wegen $A_1 \in \mathfrak{a}$ also $X \in {}^{\mathfrak{a}}S\,\mathfrak{b}_i$. Indem wir aber für alle Indizes $\mathfrak{b}'_i = \{I\}$ setzen, haben wir $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{b}'_i$ wenigstens für die Indizes $i \in A_2$, wegen $A_2 \in \mathfrak{a}$ also, nach Voraussetzung, ${}^{\mathfrak{a}}S\,\mathfrak{b}_i = {}^{\mathfrak{a}}S\,\mathfrak{b}'_i$ und damit $X \in {}^{\mathfrak{a}}S\,\mathfrak{b}'_i$; es gibt also ein $A \in \mathfrak{a}$ derart, daß $q_i X \in \mathfrak{b}'_i$, d. h. $q_i X = I$ für alle $i \in A$. Nach Definition

---

[40]) Durch eine Modifikation des nachfolgenden Beweises läßt sich der Satz dahingehend verschärfen, daß eine feste Familie von — allerdings mindestens zweielementigen — Mengen K_i zugrunde gelegt wird (bei dieser Modifikation muß man allerdings das Auswahlaxiom benutzen).

von X muß, da I mindestens zweielementig ist, dann $A \subsetneq A_1 \cap A_2$ und damit $A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{a}$ eintreten: $\mathfrak{a}$ ist ein Filter.

Zusammenfassend ist zu der oben aufgeworfenen Eindeutigkeitsfrage, bei — nach Satz 20 unvermeidlicher! — Beschränkung auf gefilterte Summen, folgendes zu sagen: der Indexstapel $\mathfrak{a}$ ist (Satz 17) durch ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$ eindeutig, der Vektor $(\mathfrak{b}_i)$ zwar nicht absolut, aber (Korollar zu Satz 19) doch wenigstens „modulo $\mathfrak{a}$" eindeutig bestimmt; umgekehrt ändert sich der Stapel $\mathfrak{b} = {}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$ bei einer Abänderung „modulo $\mathfrak{a}$" des Vektors $(\mathfrak{b}_i)$ — d. h. indem man auf einer Menge $I - A$ mit $A \in \mathfrak{a}$ die $\mathfrak{b}_i$ durch völlig beliebige Stapel $\mathfrak{b}'_i$ über K_i ersetzt — nicht. Offen bleibt — im Gegensatz zu den Verhältnissen bei der direkten Summe — die Frage, wie man zu gegebenem $\mathfrak{b} = {}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$ den modulo $\mathfrak{a}$ bestimmten Vektor $(\mathfrak{b}_i)$ zu konstruieren habe: der Eindeutigkeitssatz (das Korollar zu Satz 19) liefert — im Gegensatz zur früheren eindeutigen Komponentenzerlegung — keine Konstruktion eines solchen Vektors $(\mathfrak{b}_i)$; dieses Versagen wird durch Satz 18 auffällig beleuchtet.

Unbeantwortet bleibt auch die Frage, wann ein beliebiger Stapel $\mathfrak{b}$ über $\mathsf{S}\, K_i$ in der Gestalt $\mathfrak{b} = {}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$ mit Stapeln $\mathfrak{a}$ über I, $\mathfrak{b}_i$ über K_i darstellbar sei; in § 5 werden wir sehen, daß nicht jedes $\mathfrak{b}$ eine solche Darstellung besitzt.

Das Vorangegangene läßt schon die besondere Rolle der gefilterten Summe von Stapeln erkennen; vollends kommt sie darin zum Ausdruck, daß der Bereich der Filter, wie schon nach Satz 14 bemerkt, gegenüber der Bildung der gefilterten Summe abgeschlossen ist; genauer gilt, in Verallgemeinerung von Satz 12, der

Satz 21. *Die gestapelte Summe ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$ ist genau dann ein Filter, wenn der Stapel $\mathfrak{a}$ sowohl wie $\mathfrak{a}$-fast alle Stapel $\mathfrak{b}_i$ Filter sind.*

Beweis. Der Indexstapel $\mathfrak{a}$ und alle Summandenstapel $\mathfrak{b}_i$ seien Filter. Da dann auf Grund von (2.8) für je zwei Mengen X und Y aus ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$ die Aussage $q_i(X \cap Y) = q_i X \cap q_i Y \in \mathfrak{b}_i$ für $\mathfrak{a}$-fast alle i gilt, ist auch ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$ Filter. Nach den Bemerkungen zum Eindeutigkeitssatz läßt sich hierin die Voraussetzung, daß alle $\mathfrak{b}_i$ Filter seien, zu der, daß $\mathfrak{a}$-fast alle $\mathfrak{b}_i$ Filter seien, abschwächen.

Umgekehrt sei die gestapelte Summe ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$ der Stapel $\mathfrak{b}_i$ ein Filter. Es sei C die Menge aller Indizes $i \in I$, für die $\mathfrak{b}_i$ ein Filter ist. Wir definieren zwei Familien $(B'_i)_{i\in I}$ und $(B''_i)_{i\in I}$ folgendermaßen: ist $i \in C$, so sei $B'_i = B''_i = K_i$; zu $i \in I - C$ wählen wir das Paar (B'_i, B''_i) so, daß $B'_i \in \mathfrak{b}_i$ und $B''_i \in \mathfrak{b}_i$, aber $B'_i \cap B''_i \notin \mathfrak{b}_i$ gilt (Auswahlaxiom!). Die Mengen $X' = \mathop{\mathsf{S}}\limits_{i\in I} B'_i$ und $X'' = \mathop{\mathsf{S}}\limits_{i\in I} B''_i$ gehören zum Filter ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_i$, also auch ihr Durchschnitt $X' \cap X''$. Folglich gibt es eine Menge $A \in \mathfrak{a}$ mit $q_a(X' \cap X'') = B'_a \cap B''_a \in \mathfrak{b}_a$ für alle $a \in A$ [vgl. (2.8)]; nach Definition von X' und X'' gilt $A \subseteq C$, folglich, da $\mathfrak{a}$ Stapel ist, $C \in \mathfrak{a}$. Somit sind $\mathfrak{a}$-fast alle $\mathfrak{b}_i$ Filter. Nach Satz 17 und Korollar 1 zu Satz 6 ist $\mathfrak{a}$ ein Filter.

Korollar 1. *Die gefilterte Summe von Filtern ist ein Filter.*

Die Verzahnungsinvarianz der gestapelten Summe (Satz 16) liefert ein Dualitätsprinzip, das gestattet, mit Hilfe von Satz 3 jeden Satz über die

gefilterte Summe von Stapeln in einen mit ihm äquivalenten Satz über die *gerasterte Summe*, d. h. über die gestapelte Summe mit einem Raster als Indexstapel zu übertragen. Wir verzichten auf die Dualisierung von Satz 19 einschließlich Korollar. Satz 21 bzw. dessen Korollar 1 ist äquivalent mit folgendem Korollar 2 bzw. Korollar 3.

Korollar 2. *Die gestapelte Summe* ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\,\mathfrak{b}_i$ *ist genau dann ein Raster, wenn der Stapel* $\mathfrak{a}$ *sowohl wie* $\mathcal{G}\,\mathfrak{a}$*-fast alle Stapel* $\mathfrak{b}_i$ *Raster sind.*

Korollar 3. *Die gerasterte Summe von Rastern ist ein Raster.*

Hiernach ist der Bereich der Raster gegenüber der Bildung der gerasterten Summe abgeschlossen.

Die Verknüpfung des Satzes 21 mit seinem Korollar 2 liefert auf Grund von Satz 5 das

Korollar 4. *Die gestapelte Summe* ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\,\mathfrak{b}_i$ *ist genau dann ein Ultrafilter, wenn der Stapel* $\mathfrak{a}$ *sowohl wie* $\mathfrak{a}$*-fast alle Stapel* $\mathfrak{b}_i$ *Ultrafilter sind.*

Korollar 5. *Die ultragefilterte Summe von Ultrafiltern ist ein Ultrafilter.*

§ 5. Kardinales und ordinales Produkt von Stapeln

Wir wenden uns dem bereits als „ordinales Produkt" eingeführten Spezialfall der gestapelten Summe zu, bei dem alle Mengen K_i gleich ein und derselben Menge K, alle Summandenstapel $\mathfrak{b}_i$ gleich ein und demselben Stapel $\mathfrak{b}$ sind.

Es seien also $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Stapel über den (nichtleeren) Mengen I und K. Es geht uns vor allem um den Vergleich des ordinalen Produkts $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$ mit dem *kardinalen Produkt*[41]) $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$, dem von der Stapelbasis aller Produktmengen $A \times B$ mit $A \in \mathfrak{a}$, $B \in \mathfrak{b}$ über $I \times K$ erzeugten Stapel, welches für den Fall zweier[42]) Filter $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von Bourbaki[43]) als «produit de filtres» eingeführt worden ist.

Ist p die Projektion von $I \times K$ auf den ersten, q diejenige auf den zweiten Faktor[43a]) (vgl. § 2), so gilt

Satz 22. $p(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$, $q(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$; $p(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$, $q(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$.

Beweis. Die Projektionseigenschaften des kardinalen Produkts sind eine unmittelbare Folge seiner Definition und des Satzes 6; $p(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$ folgt aus Satz 17. Ist $X \in \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$, so gibt es eine Menge $A \in \mathfrak{a}$ mit $q_a X \in \mathfrak{b}$ für alle $a \in A$; für jedes $a \in A$, erst recht für wenigstens ein a gilt $q_a X \subseteq qX$ (vgl. § 2), folglich gehört qX zu $\mathfrak{b}$. Ist umgekehrt $B \in \mathfrak{b}$, so gehört wegen $I \in \mathfrak{a}$ die Menge $I \times B$ zu $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$, mithin wegen $q(I \times B) = B$ die Menge B zu $q(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b})$. Damit hat man insgesamt $q(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$.

---

[41]) Die Terminologie ist der von G. Birkhoffs Lattice theory [5] nachgebildet: beim „kardinalen" Produkt kommt es, im Unterschied zum „ordinalen" Produkt, auf die Reihenfolge der Faktoren (im wesentlichen) nicht an.

[42]) Ja endlich oder unendlich vieler.

[43]) Bourbaki [6], S. 68—69.

[43a]) «Par abus de langage» pflegt man statt „Projektionsoperator" auch kurz „Projektion" zu sagen.

Hieraus ergibt sich unmittelbar folgender Isomorphiesatz, in dem $\mathfrak{a}'$ ein Stapel über I, $\mathfrak{b}'$ ein Stapel über K sei:

Korollar. *Es gilt* $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \subsetneq \mathfrak{a}' \times \mathfrak{b}'$ *genau dann, wenn* $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{a}'$ *und* $\mathfrak{b} \subsetneq \mathfrak{b}'$; *(also)* $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{a}' \times \mathfrak{b}'$ *genau dann, wenn* $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$ *und* $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$. *Es gilt* $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b} \subsetneq \mathfrak{a}' \otimes \mathfrak{b}'$ *genau dann, wenn* $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{a}'$ *und* $\mathfrak{b} \subsetneq \mathfrak{b}'$; *(also)* $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b} = \mathfrak{a}' \otimes \mathfrak{b}'$ *genau dann, wenn* $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$ *und* $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$.

Was das ordinale Produkt anlangt, ist dieses Korollar eine Verschärfung des (auf das ordinale Produkt spezialisierten) Satzes 19 und dessen Korollars.

Man bestätigt unmittelbar, daß das kardinale Produkt von Filtern ein Filter ist[44]). Nach Satz 22 und dem Korollar 1 zu Satz 6 sind zwei Stapel Filter bzw. Raster bzw. Ultrafilter, wenn ihr kardinales Produkt ein Filter bzw. Raster bzw. Ultrafilter ist. Damit hat man einen Teil von

Satz 23. $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ *ist genau dann ein Filter, wenn* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *Filter sind. Ist* $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ *ein Raster bzw. Ultrafilter, so sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *Raster bzw. Ultrafilter.* $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$ *ist genau dann ein Filter bzw. Raster bzw. Ultrafilter*[45]), *wenn* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *Filter bzw. Raster bzw. Ultrafilter sind.*

Die Aussagen über das ordinale Produkt sind Folgerungen des Satzes 21 sowie seiner Korollare 2 und 4. Daß das kardinale Produkt von Rastern i. a. kein Raster ist, zeigt folgendes

Beispiel. Es sei N die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathfrak{a}$ der Fréchet-Filter. Die Verzahnung $\mathscr{G}\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{a}$[46]) ist ein Raster über N (vgl. Satz 3); wir nennen ihn den *Fréchet-Raster*. Sei $\mathfrak{c}$ das System aller cartesischen Produkte $G \times H$ mit $G \in \mathscr{G}\mathfrak{a}$ und $H \in \mathscr{G}\mathfrak{a}$. $\mathfrak{c}$ ist eine Basis des kardinalen Produkts $\mathscr{G}\mathfrak{a} \times \mathscr{G}\mathfrak{a}$. Wir zeigen, daß $\mathfrak{c}$ keine Rasterbasis, und damit auch, daß $\mathscr{G}\mathfrak{a} \times \mathscr{G}\mathfrak{a}$ kein Raster ist. Sei nämlich X die Menge aller geordneten Paare $(n, m) \in N \times N$ mit $n \geqq m$, Y die Menge aller (n, m) mit $n < m$. Es gilt $N \times N = X \cup Y$ und $N \times N \in \mathfrak{c}$, aber es gibt keine Menge $C \in \mathfrak{c}$, die in X oder in Y enthalten wäre. $\mathfrak{c}$ ist also keine Rasterbasis [vgl. (1.9)].

Der Bereich der Raster ist also gegenüber der Operation des kardinalen Produkts nicht abgeschlossen. Durch diese Bemerkung wird unmittelbar die Frage beantwortet, ob das kardinale Produkt $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ verzahnungsinvariant sei, d. h. ob stets $\mathscr{G}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = \mathscr{G}\mathfrak{a} \times \mathscr{G}\mathfrak{b}$ gelte. Sie ist zu verneinen, da man daraus, daß das kardinale Produkt von Filtern ein Filter ist, mit Hilfe der Verzahnungsinvarianz schließen könnte, daß das kardinale Produkt von Rastern stets ein Raster ist. Allgemein kann man folgendes feststellen:

Satz 24. $\mathscr{G}\mathfrak{a} \times \mathscr{G}\mathfrak{b} \subsetneq \mathscr{G}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$, $\mathscr{G}\mathfrak{a} \otimes \mathscr{G}\mathfrak{b} = \mathscr{G}(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b})$.

Beweis. Daß das ordinale Produkt von Stapeln verzahnungsinvariant ist, folgt aus Satz 16. Sei $X \in \mathscr{G}\mathfrak{a} \times \mathscr{G}\mathfrak{b}$; dann gibt es ein $Y \in \mathscr{G}\mathfrak{a}$ und ein $Z \in \mathscr{G}\mathfrak{b}$ mit $Y \times Z \subsetneq X$. Sei $V \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$; dann gibt es ein $A \in \mathfrak{a}$ und ein $B \in \mathfrak{b}$ mit

---

[44]) BOURBAKI [6], loc. cit.

[45]) Bei BANASCHEWSKI [3], S. 328, findet sich implizit die Bemerkung, daß das ordinale Produkt $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$ zweier Ultrafilter $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ein Ultrafilter ist. BANASCHEWSKI konstruiert $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$ verbandstheoretisch so aus $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, wie es Satz 15 vorschreibt.

[46]) Wird nichts anderes vereinbart, so beziehe sich der Operator $\mathscr{G}$ auf die Grundmenge desjenigen Stapels, auf den er gerade angewandt wird.

$A \times B \subseteq V$. Die Menge A ist mit Y verzahnt, die Menge B mit Z, also die Menge X mit V. Da V beliebig in $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ gewählt wurde, gehört somit X zu $\mathscr{G}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$.

In den vorstehenden Betrachtungen wurden kardinales und ordinales Produkt voneinander getrennt untersucht. Die Frage nach dem Zusammenhang beider Produkte wird beantwortet durch

Satz 25. $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$.

Beweis. Die im Korollar zu Satz 13 angegebene Basis der gestapelten Summe ${}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_\iota$ (vgl. auch die Vorbemerkung zu Satz 9) enthält im vorliegenden Falle gleicher Summandenstapel $\mathfrak{b}_\iota = \mathfrak{b}$ (und $K_\iota = K$) das System aller Produktmengen $A \times B$ mit $A \in \mathfrak{a}$ und $B \in \mathfrak{b}$, also eine Basis von $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$. Hieraus folgt, da der (auf die Grundmenge $I \times K$ bezogene) Hüllenoperator $\mathscr{H}$ monoton ist [vgl. (1.7)], die Behauptung.

In Sonderfällen stimmen kardinales und ordinales Produkt überein, etwa für $\mathfrak{b} = \{K\}$ bei beliebigem Stapel $\mathfrak{a}$, erst recht für $\mathfrak{a} = \{I\}$ und $\mathfrak{b} = \{K\}$. Im allgemeinen aber sind $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$ voneinander verschieden, wie schon — mit Rücksicht auf Satz 23 — obiges Beispiel lehrt.

Hiermit können wir nun auch die im Anschluß an Satz 20 aufgeworfene Existenzfrage negativ beantworten: bei gegebener Mengenfamilie $(K_\iota)_{\iota \in I}$ braucht sich nicht jeder Stapel (ja nicht einmal jeder Filter) $\mathfrak{m}$ über $\mathsf{S}\, K_\iota$ in der Gestalt $\mathfrak{m} = {}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_\iota$ mit Stapeln $\mathfrak{a}$ über I, $\mathfrak{b}_\iota$ über K_ι darstellen zu lassen. Es sei nämlich $K_\iota = K$ für jedes $\iota \in I$; ferner sei $\mathfrak{c}$ der Filter $\{I\}$, $\mathfrak{b}$ irgendein Filter über K. Angenommen der Filter $\mathfrak{m} = \mathfrak{c} \times \mathfrak{b}$ wäre in der Gestalt $\mathfrak{m} = {}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_\iota$ darstellbar. Nach den Sätzen 22 und 17 wäre dann $\mathfrak{c} = p(\mathfrak{c} \times \mathfrak{b}) = p\, {}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_\iota = \mathfrak{a}$; auf Grund der speziellen Wahl von $\mathfrak{c}$ würde für jedes $j \in I$ gelten $\mathfrak{b} = q_j(\mathfrak{c} \times \mathfrak{b}) = q_j\, {}^{\mathfrak{a}}\mathsf{S}\, \mathfrak{b}_\iota = \mathfrak{b}_j$ (vgl. Satz 18). Die Annahme würde also die Gleichung $\mathfrak{c} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{c} \otimes \mathfrak{b}$ liefern, die aber eben nicht immer gilt (beispielsweise dann nicht, wenn I die Menge der natürlichen Zahlen, $K = I$ und $\mathfrak{b}$ der Fréchet-Filter ist).

Wenn schon — siehe obiges Beispiel — das kardinale Produkt zweier Raster nicht immer Raster zu sein braucht, so könnte dies doch wenigstens für Ultrafilter gelten. Daß auch dies nicht der Fall zu sein braucht, zeigt, den Unterschied zwischen kardinalem und ordinalem Produkt besonders auffällig beleuchtend, das

Beispiel. Es sei N die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathfrak{c}$ sei der Fréchet-Filter, $\mathfrak{a}$ ein Ultrafilter über N mit $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}$ (nach dem Satz von Zorn gibt es eine solche Ultraverfeinerung von $\mathfrak{c}$). Nach Satz 25 gilt $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$; es gilt aber nicht $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$, folglich ist $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ kein Ultrafilter. Die Menge $X = \mathsf{S}_{n \in N}\, [n, \to [$ gehört nämlich zu $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$, aber nicht zu $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$. Gäbe es ein $A \in \mathfrak{a}$ und ein $B \in \mathfrak{a}$ mit $A \times B \subseteq X$, so bestünde für jedes $a \in A$ die Inklusion $B \subseteq [a, \to [$; im Widerspruch hierzu ist der Durchschnitt der $[a, \to [$ leer, da A nicht endlich ist.

Im folgenden geben wir noch einige Beispiele für das kardinale und ordinale Produkt, die in den Anwendungen eine wichtige Rolle spielen, wenn dies auch in dieser Arbeit nicht so sehr zum Ausdruck kommen wird.

1. N sei die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathfrak{a}$ sei der Fréchet-Filter. Das kardinale Produkt $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ wird über $N \times N$ erzeugt durch das System aller cartesischen Produkte $[n, \rightarrow [\; \times\; [r, \rightarrow [$ mit $(n, r) \in N \times N$.

2. Ist allgemeiner N eine gerichtete Menge, d. h. eine (teilweise) geordnete Menge, in der jede endliche Teilmenge eine obere Schranke besitzt (wegen der Endlichkeit der leeren Menge ist jede gerichtete Menge nichtleer!), so nennt man den durch das System aller Hauptenden $[n, \rightarrow [$ in der Menge N $(n \in N)$[47] erzeugten Filter $\mathfrak{a}(N)$ über N den *Perfinalitätsfilter*[48]. Ist R eine zweite gerichtete Menge und $\mathfrak{a}(R)$ der Perfinalitätsfilter über R, so wird das kardinale Produkt $\mathfrak{a}(N) \times \mathfrak{a}(R)$ über $N \times R$ erzeugt durch das System aller cartesischen Produkte $[n, \rightarrow [\; \times\; [r, \rightarrow [$ mit $(n, r) \in N \times R$. Das kardinale Produkt von $\mathfrak{a}(N)$ und $\mathfrak{a}(R)$ ist der Perfinalitätsfilter über dem kardinalen Produkt[49] der gerichteten Mengen N und R.

3. Das System aller (Haupt-) Enden $[n, \rightarrow [$ in der Menge N der natürlichen Zahlen $(n \in N)$ bildet eine Basis des Fréchet-Filters $\mathfrak{a}$. Ist $n \in N$ und φ eine (eindeutige) Abbildung von N in sich, d. h. $\varphi \in N^N$, so setzen wir

$$\mathsf{S}_{m \geq n} [\varphi m, \rightarrow [\; = R(n, \varphi);$$

hierin sei $m \in N$. Nach Satz 13 ist das System aller direkten Summen $R(n, \varphi)$ mit $n \in N$ und $\varphi \in N^N$ eine Basis des Filters $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$.

4. Dieses Beispiel läßt sich auf eine beliebige gerichtete Menge N übertragen. Das System aller wie im Beispiel 3 definierten Mengen $R(n, \varphi)$ — wo nun $\leqq$ die Richtungsrelation von N sei — ist eine Basis des ordinalen Produkts $\mathfrak{a}(N) \otimes \mathfrak{a}(N)$ des Perfinalitätsfilters $\mathfrak{a}(N)$ mit sich selbst. Ist R eine zweite gerichtete Menge und $\mathfrak{a}(R)$ ihr Perfinalitätsfilter, so erzeugt das System aller Mengen $R(n, \varphi)$ mit $n \in N$ und $\varphi \in R^N$ nach Satz 13 den Filter $\mathfrak{a}(N) \otimes \mathfrak{a}(R)$ über $N \times R$.

5. Der (oben definierte) Fréchet-Raster $\mathfrak{b}$ (über der Menge N der natürlichen Zahlen) besteht aus allen unendlichen Teilmengen $\{n_1, n_2, \ldots\}$ von N. Ist M eine unendliche Teilmenge von N und ψ eine (eindeutige) Abbildung von N in die Menge $\mathfrak{b}$, d. h. $\psi \in \mathfrak{b}^N$, so setzen wir $\mathsf{S}_{m \in M} \psi m = S(M, \psi)$. Nach dem Korollar zu Satz 13 ist das System aller direkten Summen $S(M, \psi)$ mit $M \in \mathfrak{b}$ und $\psi \in \mathfrak{b}^N$ eine Basis von $\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{b}$. Nach Satz 24 ist der Raster $\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{b}$ mit dem Filter $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$ aus Beispiel 3 wegen $\mathscr{G}\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ und $\mathscr{G}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ durch die Gleichungen $\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{b} = \mathscr{G}(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})$ und $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a} = \mathscr{G}(\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{b})$ verknüpft.

6. Auch dieses Beispiel läßt sich auf eine beliebige gerichtete Menge N übertragen. Der sog. *Konfinalitätsraster* $\mathfrak{b}(N)$ über N[50] besteht aus allen konfinalen Teilmengen M von N, d. h. aus allen Teilmengen M, die zu jedem

---

[47] Unter dem zu n gehörigen Hauptende $[n, \rightarrow [$ verstehen wir mit J. SCHMIDT [32], S. 274, die Menge aller $n' \in N$ mit $n \leqq n'$ ($\leqq$ sei die Richtungsrelation).

[48] J. SCHMIDT [32], S. 275.

[49] Das kardinale Produkt zweier gerichteten Mengen (G. BIRKHOFF [5], S. 7) ist eine gerichtete Menge.

[50] J. SCHMIDT [32], loc. cit.

$n \in N$ mindestens ein $s \in N$ mit $s \geq n$ enthalten ($\leq$ sei die Richtungsrelation). Das System aller wie im Beispiel 5 definierten Mengen $S(M, \psi)$ — wo jetzt aber $M \in \mathfrak{b}(N)$ und $\psi \in \mathfrak{b}(N)^N$ sei — erzeugt nach dem Korollar zu Satz 13 den Raster $\mathfrak{b}(N) \otimes \mathfrak{b}(N)$. Ist R eine zweite gerichtete Menge und $\mathfrak{b}(R)$ ihr Konfinalitätsraster, so erzeugt das System aller direkten Summen $S(M, \psi) = \underset{m \in M}{\mathsf{S}}\, \psi m$ mit $M \in \mathfrak{b}(N)$ und $\psi \in \mathfrak{b}(R)^N$ den Raster $\mathfrak{b}(N) \otimes \mathfrak{b}(R)$ über $N \times R$ (vgl. das Korollar zu Satz 13). Nach Satz 24 ist der Raster $\mathfrak{b}(N) \otimes \mathfrak{b}(R)$ mit dem Filter $\mathfrak{a}(N) \otimes \mathfrak{a}(R)$ aus Beispiel 4 wegen $\mathscr{G}\mathfrak{a}(N) = \mathfrak{b}(N)$, $\mathscr{G}\mathfrak{b}(N) = \mathfrak{a}(N)$ und der entsprechenden Beziehungen für R anstelle N durch die Gleichungen $\mathfrak{b}(N) \otimes \mathfrak{b}(R) = \mathscr{G}(\mathfrak{a}(N) \otimes \mathfrak{a}(R))$ und $\mathfrak{a}(N) \otimes \mathfrak{a}(R) = \mathscr{G}(\mathfrak{b}(N) \otimes \mathfrak{b}(R))$ verknüpft.

§ 6. Kardinales Produkt von gerichteten Mengen, x-Sektor

Mit dem — expliziten oder impliziten — Auftreten der gefilterten Summe oder des ordinalen Produkts von Filtern ist — aus Gründen, die in Teil II dieser Arbeit hervortreten werden — jedesmal dann zu rechnen, wenn man es in dem in der Einleitung angedeuteten Zusammenhang mit sog. „doppelten“ oder „iterierten“ Grenzübergängen zu tun bekommt; dies gilt auch dann, wenn andere Techniken als die der Filter benutzt werden. Wir begnügen uns, dies an zwei in der Literatur vorhandenen Begriffsbildungen zu demonstrieren[51]).

In der Theorie der iterierten Grenzübergänge von Moore-Smith-Folgen benutzt G. Birkhoff[52]) das kardinale Produkt einer gerichteten Menge I mit dem kardinalen Produkt einer (nichtleeren) Familie $(K_i)_{i \in I}$ von gerichteten Mengen K_i:

$$G = I \times \underset{i \in I}{\mathsf{P}}\, K_i\,;$$

es ist dies eine gerichtete Menge, und zwar gilt per definitionem für (i', φ'), $(i'', \varphi'') \in G$, d. h. für $i', i'' \in I$ und $\varphi', \varphi'' \in \mathsf{P}\, K_i$ die Relation $(i', \varphi') \leq (i'', \varphi'')$ genau dann, wenn $i' \leq i''$ und $\varphi' \leq \varphi''$, also genau dann, wenn $i' \leq i''$ und $\varphi'(i) \leq \varphi''(i)$ für alle $i \in I$ gilt[53]).

Ist M irgendeine gerichtete Menge, so sei $\mathfrak{a}(M)$ ihr Perfinalitätsfilter (vgl. Beispiel 2 in § 5) und $\mathfrak{b}(M)$ die aus allen ihren Hauptenden $[m, \rightarrow[$ $(m \in M)$ bestehende Basis von $\mathfrak{a}(M)$. Zwischen dem Perfinalitätsfilter $\mathfrak{a}(G)$ und der gefilterten Summe $\overset{\mathfrak{a}(I)}{\underset{i \in I}{\mathsf{S}}}\, \mathfrak{a}(K_i)$ besteht folgender natürlicher Zusammenhang:

---

[51]) Unerörtert bleibt hier etwa die mit der gefilterten Summation von Filtern eng zusammenhängende Konstruktion gewisser „Diagonalfilter“ bei Kowalsky [21], S. 311 bis 312 (vor Definition 8). Aus der Literatur über iterierte Grenzübergänge erwähnen wir zusammenfassend: Pringsheim [27]; London [22]; Root [28] und [29], § 10; Hahn [16], IV, § 9; Moore-Smith [23], § 7; Birkhoff [4], S. 43—44; Bourbaki-Dieudonné [9]; Haupt-Aumann-Pauc [17], 5.3; Bourbaki [6], S. 69—70; Appert [1]; Kelley [18], S. 279—280; Aumann [2], 6.3; Kowalsky [21], 4.; Kelley [19], S. 69 u. 74; Graves [15], VII.2; J. Schmidt [33].

[52]) Birkhoff [4], S. 43 (vgl. Theorem 5), Kelley [18], S. 279, und [19], S. 69.

[53]) Wie üblich schreiben wir, ohne Mißverständnisse befürchten zu müssen, alle Richtungsrelationen mit dem gleichen Symbol $\leq$.

Satz 26. *Zu jedem $(i, \varphi) \in G$ sei $\chi(i, \varphi) = (i, \varphi(i))$. Für die so definierte „kanonische" Abbildung χ von G auf die direkte Summe $\underset{i \in I}{\mathsf{S}} K_i$ gilt $\chi(\mathfrak{a}(G)) = {}^{\mathfrak{a}(I)}\mathsf{S}\, \mathfrak{a}(K_i)$.*

Beweis. Nach den Sätzen 6 und 13 genügt es zu zeigen, daß $\chi(\mathfrak{b}(G))$ das System $\mathfrak{y}$ aller direkten Summen $\underset{i \in B}{\mathsf{S}} B_i$ mit $B \in \mathfrak{b}(I)$ und $B_i \in \mathfrak{b}(K_i)$ ist.

Es sei $X \in \mathfrak{b}(G)$, etwa sei $X = [\![(i, \varphi), \rightarrow [\![$ mit $(i, \varphi) \in G$. Wir setzen zur Abkürzung

$$\underset{i' \geq i}{\mathsf{S}} [\![\varphi(i'), \rightarrow [\![= Y$$

und behaupten $\chi X = Y$. Nach der Richtung von G ist $\chi X \subseteq Y$ unmittelbar klar. Umgekehrt sei $(i', k) \in Y$. Ist $i'' = i'$, so sei $\psi(i'') = k$, ist $i'' \neq i'$ und $i'' \in I$, so sei $\psi(i'') = \varphi(i'')$. Für die so definierte Abbildung ψ ist $(i', \psi) \in X$ und $\chi(i', \psi) = (i', k)$. Somit ist $\chi X = Y$, wegen $Y \in \mathfrak{y}$ gilt also $\chi(\mathfrak{b}(G)) \subseteq \mathfrak{y}$.

Umgekehrt ist jede Menge $Y \in \mathfrak{y}$ von der Gestalt

$$Y = \underset{i' \geq i}{\mathsf{S}} [\![\varphi(i'), \rightarrow [\![$$

mit $(i, \varphi) \in G$; somit gilt auch $\mathfrak{y} \subseteq \chi(\mathfrak{b}(G))$.

Eine durch ${}^{\mathfrak{a}(I)}\mathsf{S}\, \mathfrak{a}(K_i)$ gefilterte Abbildung[54]) α („Doppelfolge") von $\mathsf{S}\, K_i$ in eine Menge (topologischen Raum) E erzeugt also in der Menge den gleichen Bildfilter wie die gerichtete Funktion $\alpha\chi$ (Moore-Smith-Folge) von $G = I \times \mathsf{P}\, K_i$ in E; beide Funktionen haben also, bei Vorgabe einer Topologie von E, in dem topologischen Raum E das gleiche topologische Verhalten, die gleichen Limes- und Adhärenzpunkte.

Damit haben wir ein implizites Vorkommen der gefilterten Summe in der Literatur nachgewiesen. Die Definition der gefilterten Summe kann man als eine Übersetzung der Birkhoffschen Konstruktion zunächst in die Sprache der Perfinalitätsfilter und sodann in die Sprache der Filter ansehen.

Ein anderes implizites Vorkommen der gefilterten Summe — allerdings in ihrer Spezialisierung zum ordinalen Produkt — stellt man bei Haupt-Aumann-Pauc[55]) fest: Sei $\mathfrak{a}$ der vom System aller offenen Intervalle $]\!]0, a[\![$ mit $a > 0$ erzeugte Filter über der Zahlengeraden E_1. Das ordinale Produkt $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$ ist dann ein Filter über der euklidischen Ebene E_2. Nun sei $b > 0$ und f eine auf dem offenen Intervall $]\!]0, b[\![$ der x-Achse definierte (eindeutige) Funktion mit positiven Werten und mit $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Die Menge $R(b, f)$ aller geordneten Paare (x, y) mit $0 < x < b$ und $0 < y < f(x)$ wird bei Haupt-Aumann-Pauc ein *x-Sektor*, genauer der zu b und f gehörige x-Sektor, genannt. $R(b, f)$ gehört zum ordinalen Produkt $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$.

Satz 27. *Die x-Sektoren $R(b, f)$ bilden sogar eine Basis von $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$.*

Beweis. Es sei $c > 0$ und g eine auf $]\!]0, c[\![$ definierte Funktion mit positiven Werten $g(x)$. Sei $S(c, g)$ die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $0 < x < c$ und $0 < y < g(x)$. Das System aller $S(c, g)$ ist nach Satz 13 eine Basis von

[54]) Nöbeling [25], S. 54: „gefilterte Funktion".
[55]) Haupt-Aumann-Pauc [17], S. 136—137.

$\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$. Andererseits ist jedes $R(b, f)$ ein $S(c, g)$; ferner enthält jedes $S(c, g)$ ein $R(b, f)$. Letzteres sieht man so: Sind c und g gegeben, so sei $b = c$ und, für jedes $x \in]0, b[$, $f(x)$ das Minimum von x und $g(x)$. Dann gilt $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ und $R(b, f) \subseteq S(c, g)$. Das System der x-Sektoren $R(b, f)$ ist also ebenso fein wie das System der $S(c, g)$, erzeugt also den Filter $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$.

Man kann somit die Definition des ordinalen Produkts von Filtern auffassen als eine Übertragung des Begriffs der Gesamtheit der x-Sektoren in die Sprache der Filterbasen über dem E_2 und sodann in die Sprache der Filter schlechthin. Wesentlich ist bei diesen Schritten die Aufgabe der Bedingung $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Literatur

[1] Appert, A.: Double limite et prolongement. C. R. Acad. Sci. Paris **229**, 865—867 (1949).
[2] Aumann, G.: Reelle Funktionen. Berlin 1954.
[3] Banaschewski, B.: Abstufungen des Kompaktheitsbegriffes. Arch. Math. **6**, 320—329 (1955).
[4] Birkhoff, G.: Moore-Smith convergence in general topology. Ann. Math. **38**, 39—56 (1937).
[5] Birkhoff, G.: Lattice theory. 2. Aufl. New York 1948.
[6] Bourbaki, N.: Topologie générale, Chap. I—II. 2. Aufl. Actual. Sci. Industr. **1142** (1951).
[7] Bourbaki, N.: Théorie des ensembles, Chap. I—II. Actual. Sci. Industr. **1212** (1954).
[8] Bourbaki, N.: Théorie des ensembles, Chap. III. Actual. Sci. Industr. **1243** (1956).
[9] Bourbaki, N., et J. Dieudonné: Notes de Tératopologie. II. Revue Scientifique 1939, 180—181.
[10] Bruns, G.: Durchschnittsdarstellungen von Filtern. Math. Ann. **133**, 26—38 (1957).
[11] Bruns, G.: Zur Struktur von Filtern. Math. Ann. **134**, 205—224 (1958).
[12] Bruns, G., u. J. Schmidt: Zur Äquivalenz von Moore-Smith-Folgen und Filtern. Math. Nachr. **13**, 169—186 (1955).
[13] Bruns, G., u. J. Schmidt: Die punktalen Typen topologischer Räume. Math. Japon. **4**, 133—177 (1957).
[14] Choquet, G.: Sur les notions de filtre et de grille. C. R. Acad. Sci. Paris **224**, 171—173 (1947).
[15] Graves, L. M.: The theory of functions of real variables. 2. Aufl. New York 1956.
[16] Hahn, H.: Theorie der reellen Funktionen. Bd. 1. Berlin 1921.
[17] Haupt, O., G. Aumann u. Ch. Pauc: Differential- und Integralrechnung. Bd. 1. 2. Aufl. Berlin 1948.
[18] Kelley, J. L.: Convergence in topology. Duke Math. J. **17**, 277—283 (1950).
[19] Kelley, J. L.: General topology. New York 1955.
[20] Kowalsky, H. J.: Beiträge zur topologischen Algebra. Math. Nachr. **11**, 143—185 (1954).
[21] Kowalsky, H. J.: Limesräume und Komplettierung. Math. Nachr. **12**, 301—340 (1954).
[22] London, F.: Über Doppelfolgen und Doppelreihen. Math. Ann. **53**, 322—370 (1900).
[23] Moore, E. H., and H. L. Smith: A general theory of limits. Am. J. Math. **44**, 102—121 (1922).
[24] Nöbeling, G.: Zur Theorie der topologischen Räume. Sitzber. bayer. Akad. Wiss. Math.-naturw. Kl. **1950**, 131—132.
[25] Nöbeling, G.: Grundlagen der analytischen Topologie. Berlin 1954.

[26] PAUC, CH.: Ableitungsbasen, Prätopologie und starker Vitalischer Satz. J. reine angew. Math. 191, 69—91 (1953).
[27] PRINGSHEIM, A.: Zur Theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen. Math. Ann. 53, 289—321 (1900).
[28] ROOT, R. E.: Iterated limits of functions on an abstract range. Bull. Am. Math. Soc. 17, 538—539 (1911).
[29] ROOT, R. E.: Iterated limits in general analysis. Am. J. Math. 36, 79—104 u. 105—133 (1914).
[30] SCHMIDT, J.: Beiträge zur Filtertheorie. I. Math. Nachr. 7, 359—378 (1952).
[31] SCHMIDT, J.: Beiträge zur Filtertheorie. II. Math. Nachr. 10, 197—232 (1953).
[32] SCHMIDT, J.: Konfinalität. Z. math. Logik u. Grundl. Math. 1, 271—303 (1955).
[33] SCHMIDT, J.: Die transfiniten Operationen der Ordnungstheorie. Math. Ann. 133, 439—449 (1957).

(Eingegangen am 1. April 1960)

Körner, O.
Math. Annalen 141, 343—366 (1960)

Übertragung des Goldbach-Vinogradovschen Satzes auf reell-quadratische Zahlkörper*

Von

Otto Körner in Göttingen

Einleitung

Bekanntlich wurde die asymptotische Formel für die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe von r Primzahlen ($r \geqq 3$) zuerst von Hardy und Littlewood im Jahre 1923 veröffentlicht [1]. Ihr Resultat hatten sie mit Hilfe der von ihnen entwickelten „Kreis-Methode" gewonnen unter der Annahme, daß die Realteile aller Nullstellen der Dirichletschen L-Funktionen kleiner als $^3/_4$ sind. Diese verallgemeinerte Riemannsche Vermutung konnte bis heute nicht bewiesen werden. Erst im Jahre 1937 gelang es Vinogradov, die Richtigkeit der asymptotischen Formel unabhängig von jeder unbewiesenen Hypothese sicherzustellen. Im Bereich der algebraischen Zahlkörper kann man eine ähnliche Entwicklung des verallgemeinerten Goldbachschen Problems verfolgen. Im Jahre 1924 konnte Rademacher die Hardy-Littlewoodsche Formel auf reell-quadratische Zahlkörper [3] und später auf beliebige algebraische Zahlkörper [4] übertragen, indem er seinen Betrachtungen eine der Hardy-Littlewoodschen analoge Vermutung über die Heckeschen $\zeta(s, \lambda)$-Funktionen zugrunde legte. 1955 bewies Tatuzawa [8] ohne eine solche Annahme, daß in einem algebraischen Zahlkörper jede ganze Körperzahl als Summe einer beschränkten Anzahl von Primzahlen des Körpers darstellbar ist. Dieser Satz spricht für die Rademacherschen Ergebnisse.

Die vorliegende Arbeit erbringt nun ohne Benutzung einer Hypothese einen Beweis der Rademacherschen Formel für reell-quadratische Zahlkörper.

Der Beweis beruht auf einer Verbindung zweier Methoden zur Anwendung trigonometrischer Summen auf additive Probleme, einer von Vinogradov und einer von Siegel. Nach Vinogradov machen wir einen Lösungsansatz mit endlichen trigonometrischen Summen über Primzahlen, und durch Übertragung einiger Schlüsse aus seiner berühmten Arbeit über das Goldbachsche Problem [9] führen wir diese Summen auf einfachere zurück. Die eigentliche Abschätzung der vereinfachten trigonometrischen Summen und die geeignete Unterteilung des in Frage stehenden Integrationsgebietes, die der Farey-Zerschneidung im Fall des rationalen Zahlkörpers entspricht, geschieht nach einer Methode von Siegel, die er zur Lösung des Waringschen Problems für

* Diese Arbeit wurde von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen als Dissertation angenommen. Herrn Prof. C. L. Siegel bin ich zu großem Dank verpflichtet. Er regte mich zu dieser Arbeit an und gab mir viele wertvolle Ratschläge bei ihrer Abfassung.

algebraische Zahlkörper [7] entwickelte und die eine Verfeinerung des von ihm früher [6] angegebenen Verfahrens darstellt. In den verallgemeinerten Farey-Gebieten kleinen Nenners approximieren wir in Anlehnung an Vinogradovsche Überlegungen die zu betrachtenden Primzahlsummen mit Hilfe eines Theorems (s. Hilfssatz 12) über die Verteilung der Primzahlen eines algebraischen Zahlkörpers in einer arithmetischen Progression[1]).

Im folgenden beschäftigen wir uns mit einem reell-quadratischen Zahlkörper K der Diskriminante D. Es sei H die Klassenzahl im engeren Sinne (s. § 2) und $\varepsilon > 1$ Erzeugende der Gruppe aller totalpositiven Einheiten von K. Für eine Zahl α aus K bedeute α' die zu ihr konjugierte und $N\alpha = \alpha\alpha'$ ihre Norm. Kleine deutsche Buchstaben werden für Ideale von K verwendet, und die Symbole $N\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} \mid \alpha$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, (α) haben die in der Zahlentheorie übliche Bedeutung. Eine Zahl ω aus K heißt Primzahl, wenn das von ihr erzeugte Hauptideal (ω) ein Primideal von K ist. Bezeichne durchweg λ eine totalpositive ganze Zahl aus K mit $N\lambda > 1$, r eine natürliche Zahl $\geqq 3$ und $A_r(\lambda)$ die Anzahl der Darstellungen von λ als Summe von r totalpositiven Primzahlen aus K. Hiermit läßt sich das Hauptresultat dieser Arbeit, die Rademachersche Formel, folgendermaßen fassen:

Satz 1. *Für alle λ und alle r gilt*

$$A_r(\lambda) = \frac{\sqrt{D}}{[(r-1)!]^2 (H \log \varepsilon)^r} \frac{(N\lambda)^{r-1}}{(\log N\lambda)^r} \mathfrak{S}_r(\lambda) + O\left(\frac{(N\lambda)^{r-1}}{(\log N\lambda)^{r+1}}\right).$$

Hierbei ist $\mathfrak{S}_r(\lambda)$ die zu diesem additiven Problem gehörige „singuläre Reihe", und die O-Konstante hängt nur von K und r ab.

Über die singuläre Reihe $\mathfrak{S}_r(\lambda)$ bewies RADEMACHER folgende Tatsachen:
1. Die singuläre Reihe $\mathfrak{S}_r(\lambda)$ verschwindet, wenn r und λ nicht von gleicher Parität sind.
2. Sind r und λ von gleicher Parität, so ist

$$\mathfrak{S}_r(\lambda) = 2 \cdot 2^{\left(\frac{D}{2}\right)} C_r \prod_{\mathfrak{p} \mid \lambda,\, N\mathfrak{p} > 2} \frac{(N\mathfrak{p}-1)^r + (-1)^r (N\mathfrak{p}-1)}{(N\mathfrak{p}-1)^r - (-1)^r},$$

wobei $\left(\frac{D}{2}\right)$ das Kroneckersche Restsymbol und

$$C_r = \prod_{\mathfrak{p},\, N\mathfrak{p} > 2} \left(1 - \left(\frac{-1}{N\mathfrak{p}-1}\right)^r\right)$$

ist.

Die Produkte werden über alle Primideale $\mathfrak{p}$ von K erstreckt, die die angegebenen Bedingungen erfüllen. Ferner gibt es in diesem Fall nur von K abhängige positive Konstanten c_1, c_2 mit

$$c_1 < \mathfrak{S}_r(\lambda) < c_2 .$$

Nach RADEMACHER ist der Begriff der „Parität" folgendermaßen erklärt: Sei $\mathfrak{L}$ das Produkt aller Primideale $\mathfrak{p}$ von K mit $N\mathfrak{p} = 2$ oder, falls keine solchen $\mathfrak{p}$ in K vorhanden sind, sei $\mathfrak{L} = 1$. Die Zahl λ heißt gerade, wenn $\mathfrak{L} \mid \lambda$ und ungerade, wenn $(\mathfrak{L}, \lambda) = 1$. Gleiche Parität von λ und r liegt vor,

[1]) Siehe MITSUI [2] und SCHULZ-ARENSTORFF [5].

wenn beide gerade bzw. wenn beide ungerade sind. Ist r gerade, λ nicht gerade oder r ungerade und λ nicht ungerade, so sind λ und r von ungleicher Parität[2]).

Für $r = 3$ liefert Satz 1 als Spezialfall die Aussage:

Es existiert eine nur von K abhängige Konstante $A_0 > 0$ derart, daß jede ungerade ganze totalpositive Körperzahl λ mit $N\lambda > A_0$ sich als Summe dreier totalpositiver Primzahlen aus K darstellen läßt.

Dies ist offenbar das Analogon des Goldbach-Vinogradovschen Satzes. Mit Rücksicht auf diesen Satz werden wir die Gesamtheit der ungeraden λ aus K etwas expliziter als oben angeben. Wir haben

$$\mathfrak{L} = (2) \quad \text{für} \quad D \equiv 1 \pmod 8\,,$$
$$\mathfrak{L} = (1) \quad \text{für} \quad D \equiv 5 \pmod 8\,,$$
$$\mathfrak{L}^2 = (2) \quad \text{für} \quad D \equiv 0 \pmod 4\,.$$

Im Falle $D \equiv 5 \pmod 8$ sind also alle ganzen Zahlen λ aus K ungerade; in den anderen Fällen muß dazu noch $(\lambda, 2) = 1$ sein. Als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß λ ungerade ist, ergibt sich hieraus leicht[3]):

$$\lambda^2 \equiv 1 \left(\operatorname{mod} 2^{1+\left(\frac{D}{2}\right)}\right).$$

§ 1. Formale Entwicklungen und verallgemeinerte Farey-Zerschneidung

Sei θ eine fest gewählte reelle Zahl $\geqq 5$, über die wir später noch genauer verfügen wollen. Wir führen folgende Abkürzungen ein:

$$A = N\lambda\,, \quad a = \log A\,, \quad h = \sqrt{A}\,a^{-8\theta}, \quad t = a^{7\theta}.$$

Die Symbole o, O mögen sich im folgenden immer auf den Grenzübergang $A \to \infty$ beziehen, und die O-Konstanten sollen nur von K, r und θ abhängen. Nur an einer Stelle, nämlich bei Hilfssatz 12, weichen wir von dieser Konvention ab und geben dort eine andere Erklärung des O-Symbols. Für ein positives C bedeute

$$B \ll C\,,$$

daß $B = O(C)$ ist. Im folgenden ist es oft zweckmäßig, A als genügend groß anzunehmen (was nicht immer besonders gesagt wird), d. h. $A > A_0$, wo A_0 nur von K, r und θ abhängt. Für zwei Körperzahlen α und β bedeute

$$\alpha \prec \beta\,,$$

daß $\beta - \alpha$ totalpositiv ist. Für eine reelle Zahl x bezeichne $[x]$ die größte ganzrationale Zahl $\leqq x$, und es sei

$$\{x\} = \begin{matrix} x - [x] & \text{für} & x - [x] \leqq \frac{1}{2} \\ x - [x] - 1 & \text{für} & x - [x] > \frac{1}{2}\,. \end{matrix}$$

Mit einem Paar ξ, ξ' reeller Zahlen und einer Zahl α aus K bilden wir den Ausdruck

$$S(\alpha\xi) = \alpha\xi + \alpha'\xi'$$

[2]) Siehe Rademacher [3], Seite 158.

[3]) Die Bedingung in dieser Form verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von Prof. C. L. Siegel.

und die Summe

$$T(\xi, \xi') = \sum_{0 \prec \omega \prec \lambda} e^{2\pi i S(\omega \xi)},$$

wobei ω über alle Primzahlen aus K läuft mit $0 \prec \omega \prec \lambda$. Sei ferner $\mathfrak{D}$ die Differente von K, d. h. $\mathfrak{D} = (\sqrt{D})$, und μ_1, μ_2 eine fest gewählte Basis von $\mathfrak{D}^{-1}$, etwa

$$\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{D}}, \quad \mu_2 = \frac{1 + \sqrt{D}}{2}.$$

Das zugehörige Fundamentalparallelogramm F in der reellen ξ, ξ'-Ebene E definieren wir als die Menge aller Punkte (ξ, ξ') mit

$$\begin{matrix} \xi = r_1 \mu_1 + r_2 \mu_2 \\ \xi' = r_1 \mu_1' + r_2 \mu_2' \end{matrix}, \quad -\tfrac{1}{2} < r_i \leqq \tfrac{1}{2},\ i = 1, 2.$$

Dann ist nach bekannten Überlegungen[4]):

$$A_r(\lambda) = \sqrt{D} \iint_F T^r(\xi, \xi') e^{-2\pi i S(\lambda \xi)} d\xi \, d\xi'. \tag{1}$$

Zu λ gibt es eine eindeutig bestimmte ganzrationale Zahl n mit

$$\varepsilon^{2n-1} < \frac{\lambda}{\lambda'} \leqq \varepsilon^{2n+1}, \quad \text{also} \quad \varepsilon^{-1} < \frac{\lambda \varepsilon^{-n}}{(\lambda \varepsilon^{-n})'} \leqq \varepsilon.$$

Da $A_r(\lambda) = A_r(\lambda \varepsilon^{-n})$ ist, können wir im folgenden voraussetzen, daß

$$\varepsilon^{-1} < \frac{\lambda}{\lambda'} \leqq \varepsilon, \quad \text{also} \quad \sqrt{A} \ll \frac{\lambda}{\lambda'} \ll \sqrt{A}$$

ist. Nun unterteilen wir das Integrationsgebiet F mit Hilfe der von SIEGEL verallgemeinerten Farey-Zerschneidung[5]). Für eine Zahl γ aus K sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\gamma$ der Nenner von $\gamma\sqrt{D}$, d. h. $\mathfrak{a} = (1, \gamma\sqrt{D})^{-1}$. Wir definieren B_γ als die Menge aller Punkte (ξ, ξ') aus E mit

$$\operatorname{Max}(h\,|\xi - \gamma|, t^{-1}) \operatorname{Max}(h\,|\xi' - \gamma'|, t^{-1}) \leqq N\mathfrak{a}^{-1}.$$

Offenbar ist B_γ leer, wenn $N\mathfrak{a} > t^2$ ist. Es sei V die Vereinigungsmenge aller B_γ, wenn γ alle Zahlen aus K durchläuft. Von SIEGEL [7], Seite 125 und 126 übernehmen wir die folgenden zwei Hilfssätze:

Hilfssatz 1. *Sind γ und $\tilde{\gamma}$ zwei verschiedene Zahlen aus K, so haben B_γ und $B_{\tilde{\gamma}}$ keinen Punkt gemeinsam.*

Hilfssatz 2. *Ist (ξ, ξ') ein Punkt aus E, der nicht in V liegt, so gibt es eine ganze Zahl α aus K und eine Zahl η aus $\mathfrak{D}^{-1}$ derart, daß*

$$|\alpha\xi - \eta| < h^{-1}, \ |\alpha'\xi' - \eta'| < h^{-1}, \ 0 < |\alpha| \leqq h, \ 0 < |\alpha'| \leqq h, \tag{2}$$

$$\operatorname{Max}(h\,|\alpha\xi - \eta|, |\alpha|) \geqq D^{-1/2}, \ \operatorname{Max}(h\,|\alpha'\xi' - \eta'|, |\alpha'|) \geqq D^{-1/2}, \tag{3}$$

$$\operatorname{Max}(|\alpha|, |\alpha'|) > t, \tag{4}$$

$$N(\alpha, \eta\sqrt{D}) \leqq D^{1/2}. \tag{5}$$

---

[4]) Siehe RADEMACHER [3].

[5]) Siehe SIEGEL [7], Seite 125—127.

Zwei Punkte (ξ_1, ξ_1'), (ξ_2, ξ_2') aus E sollen kongruent mod $\mathfrak{D}^{-1}$ heißen, wenn $\xi_1 - \xi_2 = \tau$, $\xi_1' - \xi_2' = \tau'$ und τ aus $\mathfrak{D}^{-1}$ ist. Jeder Punkt von E ist dann mod $\mathfrak{D}^{-1}$ genau einem Punkt von F kongruent. In der Menge aller Körperzahlen γ mit $N\mathfrak{a}_\gamma \leqq t^2$ werde ein festes Restsystem mod $\mathfrak{D}^{-1}$ gewählt und mit Γ bezeichnet. Es sei

$$B = \sum_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma .$$

Nach Hilfssatz 1 ist der Durchschnitt

$$F \cap V = \sum_{\beta \in K} F \cap B_\beta = \sum_{\gamma \in \Gamma} \Bigl(\sum_{\mathfrak{D}^{-1} | \tau} F \cap B_{\gamma+\tau} \Bigr) .$$

Die Gebiete $F \cap B_{\gamma+\tau}$ gehen durch die Translation $\xi + \tau \to \xi$, $\xi' + \tau' \to \xi'$ in die ihnen punktweise mod $\mathfrak{D}^{-1}$ kongruenten Gebiete $F_\tau \cap B_\gamma$ über, wobei F_τ das Bild von F bei dieser Translation sei. Da F Fundamentalbereich für die durch die Zahlen aus $\mathfrak{D}^{-1}$ definierte Translationsgruppe ist, so ist

$$\bigcup_{\mathfrak{D}^{-1}|\tau} (F_\tau \cap B_\gamma) = \Bigl(\sum_{\mathfrak{D}^{-1}|\tau} F_\tau \Bigr) \cap B_\gamma = B_\gamma .$$

Beachtet man noch, daß $F \cap B_\beta$ nur für endlich viele β nicht leer ist, so erkennt man, daß $F \cap V$ und B in je endlich viele Stücke zerlegt werden, die paarweise kongruent sind. Definiert man G als die Menge aller Punkte aus F, die nicht in V liegen, d. h.

$$F = F \cap V + G ,$$

so folgt also aus (1) wegen der Invarianz des Integranden gegenüber Translationen aus $\mathfrak{D}^{-1}$:

$$\begin{aligned} A_r(\lambda) = \sqrt{D} \sum_{\gamma \in \Gamma} \int\!\!\int_{B_\gamma} T^r(\xi, \xi')\, e^{-2\pi i S(\lambda \xi)} d\xi\, d\xi' &+ \\ + \sqrt{D} \int\!\!\int_{G} T^r(\xi, \xi')\, e^{-2\pi i S(\lambda \xi)} d\xi\, d\xi' &. \end{aligned} \tag{6}$$

Der Beweis von Satz 1 läuft nun wie folgt weiter: In § 2 bis § 4 befassen wir uns mit der Abschätzung von $T(\xi, \xi')$ in G. Das Ergebnis dieser Untersuchungen ist Satz 2. In § 5 leiten wir eine Approximation für $T(\xi, \xi')$ in den B_γ her, die in Satz 3 formuliert ist. In § 6 benutzen wir die über $T(\xi, \xi')$ erhaltenen Aussagen, um die Integrale in (6) auszuwerten und damit den Beweis des Hauptsatzes abzuschließen.

§ 2. Vorbereitungen zur Abschätzung von $T(\xi, \xi')$

Zu einem ganzen Ideal $\mathfrak{b}$ aus K definieren wir die Summe

$$T_{\mathfrak{b}}(\xi, \xi') = \sum_{\substack{\mathfrak{b}|\beta \\ 0 \prec \beta \prec \lambda}} e^{2\pi i S(\beta \xi)} .$$

Hilfssatz 3. *Sei $\mathfrak{h}$ das Produkt aller Primideale $\mathfrak{p}$ von K mit $N\mathfrak{p} \leqq \sqrt{A}$, $\mu(\mathfrak{b})$ die Möbiussche μ-Funktion für Ideale. Dann gilt*

$$T(\xi, \xi') = \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{h}} \mu(\mathfrak{b})\, T_{\mathfrak{b}}(\xi, \xi') + O(\sqrt{A}) .$$

Beweis[6]):

$$\sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{d}} \mu(\mathfrak{b})\, T_{\mathfrak{b}}(\xi, \xi') = \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{d}} \mu(\mathfrak{b}) \sum_{\substack{\mathfrak{b}|\beta \\ 0<\beta<\lambda}} e^{2\pi i S(\beta\xi)}$$

$$= \sum_{\substack{1|\beta \\ 0<\beta<\lambda}} e^{2\pi i S(\beta\xi)} \sum_{\mathfrak{b}|(\beta,\mathfrak{d})} \mu(\mathfrak{b}) = \sum_{\substack{1|\beta \\ 0<\beta<\lambda \\ (\beta,\mathfrak{d})=1}} e^{2\pi i S(\beta\xi)} = T(\xi, \xi') + O(\sqrt{A}).$$

q. e. d.

Zunächst untersuchen wir die Summen $T_{\mathfrak{b}}(\xi, \xi')$. Es empfiehlt sich, in K die Idealklassen im engeren Sinne zu betrachten, d. h. wir nennen zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von K äquivalent im engeren Sinne (in Symbolen: $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$), wenn eine totalpositive Zahl $\varkappa$ aus K existiert derart, daß

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} = (\varkappa)$$

ist.

Normiert man $\varkappa$ noch durch die Bedingung

$$\varepsilon^{-1} < \frac{\varkappa}{\varkappa'} \leqq \varepsilon,$$

so ist $\varkappa$ eindeutig durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bestimmt. In jeder Klasse äquivalenter Ideale werde ein festes ganzes Ideal $\mathfrak{c}$ gewählt. Die Gesamtheit der Ideale $\mathfrak{c}$ werde mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet. $\mathfrak{M}$ ist also eine nur von K (und unserer Festsetzung) abhängige Idealmenge, die aus genau H Elementen besteht. Die Auswahl der $\mathfrak{c}$ sei so getroffen worden, daß auch das Einheitsideal (1) unter ihnen vorkommt.

Nach dieser Festsetzung gibt es also zu jedem Ideal $\mathfrak{b} \neq (0)$ von K genau ein $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{M}$ mit

$$\mathfrak{b} \sim \mathfrak{c}^{-1}$$

und damit genau ein $\varkappa$ aus K mit

$$\mathfrak{b}\mathfrak{c} = (\varkappa), \quad \varkappa \succ 0, \quad \varepsilon^{-1} < \frac{\varkappa}{\varkappa'} \leqq \varepsilon.$$

Umgekehrt ist auch $\mathfrak{b}$ durch das Paar $\mathfrak{c}, \varkappa$ eindeutig bestimmt. Diese eineindeutige Zuordnung des Paares $\mathfrak{c}, \varkappa$ zu $\mathfrak{b}$ wollen wir durch die Symbole

$$\mathfrak{c} = p(\mathfrak{b}), \quad \varkappa = q(\mathfrak{b})$$

ausdrücken. Somit haben wir für jedes ganze Ideal $\mathfrak{b} \neq (0)$:

$$T_{\mathfrak{b}}(\xi, \xi') = \sum_{\substack{\mathfrak{c}^{-1}|\varrho \\ 0<\varrho<\frac{\lambda}{\varkappa}}} e^{2\pi i S(\varrho\varkappa\xi)}, \tag{7}$$

wobei $\mathfrak{c} = p(\mathfrak{b})$, $\varkappa = q(\mathfrak{b})$.

Für spätere Anwendungen (s. (23)) sei noch notiert, daß für ganze $\mathfrak{b}$ das Ideal $\mathfrak{c}$ die Zahl $\varkappa$ teilt, also $\varkappa$ ganz ist. Von den Inversen aller Ideale $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{M}$ werde nun je eine Basis τ_1, τ_2 fest ausgewählt. (In Symbolen: $[\tau_1, \tau_2] = \mathfrak{c}^{-1}$.). Sei β eine Zahl aus K und $[\tau_1, \tau_2] = \mathfrak{c}^{-1}$, $\mathfrak{c} \in \mathfrak{M}$. Dann gibt es ganzrationale Zahlen a_i $(i = 1, 2)$ mit

$$S(\tau_i \beta \xi) = a_i + d_i, \quad d_i = \{S(\tau_i \beta \xi)\}, \quad i = 1, 2.$$

[6]) Vergleiche hiermit Vinogradov [10], Seite 30, Lemma 2.

Mit der zu τ_1, τ_2 komplementären Basis σ_1, σ_2 — d. h.

$$S(\tau_i \sigma_k) = \begin{matrix} 1 & \text{für} & i = k \\ 0 & \text{für} & i \neq k \end{matrix}, \quad i, k = 1, 2$$

— definieren wir

$$\nu = \nu(\beta, \mathfrak{c}) = a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 ,$$
$$\zeta = \zeta(\beta, \mathfrak{c}) = d_1 \sigma_1 + d_2 \sigma_2 , \quad \zeta' = \zeta'(\beta, \mathfrak{c}) = d_1 \sigma_1' + d_2 \sigma_2' .$$

Nach Konstruktion von ν und ζ gilt

$$\beta \xi = \nu + \zeta , \quad \beta' \xi' = \nu' + \zeta' , \quad \mathfrak{c}\mathfrak{D}^{-1} | \nu , \tag{8}$$

und es gibt eine nur von K abhängige Konstante $c_3 \geqq 1$ mit

$$|\zeta| \leqq c_3 , \quad |\zeta'| \leqq c_3 \tag{9}$$

für alle β aus K und alle $\mathfrak{c} \in \mathfrak{M}$; denn es ist $|d_i| \leqq \frac{1}{2}$ und σ_1, σ_2 mit τ_1, τ_2 festgelegt.

Hilfssatz 4. *Für jedes ganze Ideal* $\mathfrak{b}$ *von* K *mit* $1 \leqq N\mathfrak{b} \leqq A$ *gilt*

$$T_{\mathfrak{b}}(\xi, \xi') \ll X_{\mathfrak{c}}(\varkappa) ,$$

wobei

$$X_{\mathfrak{c}}(\varkappa) = \operatorname{Min}\left(\frac{A}{N\varkappa}, \sqrt{\frac{A}{N\varkappa}}\,\frac{1}{|\zeta|}, \sqrt{\frac{A}{N\varkappa}}\,\frac{1}{|\zeta'|}, \sqrt{\frac{A}{N\varkappa}}\,\frac{1}{\sqrt{|\zeta\zeta'|}}\right)$$

und

$$\mathfrak{c} = p(\mathfrak{b}), \varkappa = q(\mathfrak{b}), \zeta = \zeta(\varkappa, \mathfrak{c}), \zeta' = \zeta'(\varkappa, \mathfrak{c})$$

sei.

Beweis[7]: Sei $[\tau_1, \tau_2] = \mathfrak{c}^{-1}$, $d_i = \{S(\tau_i \varkappa \xi)\}$, dann folgt nach (7):

$$T_{\mathfrak{b}}(\xi, \xi')\, e^{2\pi i S(\tau_i \varkappa \xi)} = \sum_{\substack{\mathfrak{c}^{-1} | \varrho \\ 0 < \varrho - \tau_i < \frac{\lambda}{\varkappa}}} e^{2\pi i S(\varrho \varkappa \xi)} = T_{\mathfrak{b}}(\xi, \xi') + O\left(\sqrt{\frac{A}{N\varkappa}}\right).$$

Denn das Restglied ist höchstens von der Größenordnung des Umfanges des Rechtecks, das aus allen Punkten (x, x') besteht mit

$$0 < x < \frac{\lambda}{\varkappa}, \quad 0 < x' < \frac{\lambda'}{\varkappa'} .$$

Also folgt mit der trivialen Abschätzung

$$T_{\mathfrak{b}}(\xi, \xi') \ll \frac{A}{N\varkappa}$$

und mit $\zeta, \zeta' \ll \operatorname{Max}(|d_1|, |d_2|)$ die Beziehung

$$T_{\mathfrak{b}}(\xi, \xi') \ll \operatorname{Min}\left(\frac{A}{N\varkappa}, \sqrt{\frac{A}{N\varkappa}}\,\frac{1}{|e^{2\pi i d_1} - 1|}, \sqrt{\frac{A}{N\varkappa}}\,\frac{1}{|e^{2\pi i d_2} - 1|}\right) \ll$$
$$\ll \operatorname{Min}\left(\frac{A}{N\varkappa}, \sqrt{\frac{A}{N\varkappa}}\,\frac{1}{|d_1|}, \sqrt{\frac{A}{N\varkappa}}\,\frac{1}{|d_2|}\right) \ll \operatorname{Min}\left(\frac{A}{N\varkappa}, \sqrt{\frac{A}{N\varkappa}}\,\frac{1}{|\zeta|}, \sqrt{\frac{A}{N\varkappa}}\,\frac{1}{|\zeta'|}\right)$$
$$= X_{\mathfrak{c}}(\varkappa) .$$

q. e. d.

---

[7] Siehe SIEGEL [7], Seite 129, (25).

In diesem und den beiden nächsten Paragraphen setzen wir voraus, daß (ξ, ξ') beliebig, aber fest aus G gewählt sei. Seien α und η die nach Hilfssatz 2 zu (ξ, ξ') existierenden Zahlen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit unserer Überlegungen können wir annehmen, daß $|\alpha| \leqq |\alpha'|$ ist.

Hilfssatz 5. *Seien L_1, L_2, b reelle Zahlen, $L = L_2 - L_1$ und b positiv, g, g' ein Paar ganzrationaler Zahlen und $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$ zwei Ideale aus $\mathfrak{M}$. Ferner sei $\mathfrak{B}$ eine Menge von Zahlen β, die in $\mathfrak{c}_1^{-1}$ liegen und folgende Bedingungen erfüllen:*

$$\begin{aligned} g - \tfrac{1}{2} &\leqq 2\sqrt{D\, N\mathfrak{c}_1}\, |\alpha|\, \zeta(\beta, \mathfrak{c}_2) < g + \tfrac{1}{2}\,, \\ g' - \tfrac{1}{2} &\leqq 2\sqrt{D\, N\mathfrak{c}_1}\, |\alpha'|\, \zeta'(\beta, \mathfrak{c}_2) < g' + \tfrac{1}{2}\,, \end{aligned} \tag{10}$$

$$L_1 \leqq \beta \leqq L_2\,, \quad L_1 \leqq \beta' \leqq L_2\,, \tag{11}$$

und für zwei beliebige Zahlen $\beta, \tilde{\beta}$ aus $\mathfrak{B}$ gelte

$$|\zeta(\beta, \mathfrak{c}_2) - \zeta(\tilde{\beta}, \mathfrak{c}_2)| \leqq b\,.$$

Dann haben wir für die Anzahl $Z(g, g', b)$ aller Zahlen aus $\mathfrak{B}$ die Abschätzung

$$Z(g, g', b) \ll \frac{L^2 a^2}{|N\alpha|} + 1 \tag{12}$$

und für den Fall $|\alpha| < D^{-1/4}$ noch die weitere

$$Z(g, g', b) \ll \left(\frac{L}{|\alpha'|} + \frac{L^2 a^2}{h|\alpha'|} + 1\right)(hb + 1)\,. \tag{13}$$

Beweis: Durch (11) wird in E ein abgeschlossenes Quadrat Q der Seitenlänge L definiert. Jede Seite von Q teilen wir in m gleiche Teile, wobei $m = 1 + \left[\frac{L}{h a^{-1}}\right]$ sei. Dadurch wird Q in m^2 verschiedene Quadrate Q' der Seitenlänge $\frac{L}{m} \ll h a^{-1}$ zerlegt. Bezeichne $Z(Q')$ die Anzahl der β aus $\mathfrak{B}$, die in einem abgeschlossenen Q' liegen (d. h. $(\beta, \beta') \in Q'$ abgeschlossen). Dann ist offenbar

$$Z(g, g', b) \leqq m^2 \operatorname*{Max}_{Q'} Z(Q')\,. \tag{14}$$

Sei $\tilde{\beta}$ eines von diesen β aus Q'. Setzt man

$$\begin{gathered} \delta = \alpha\xi - \eta\,, \quad \delta' = \alpha'\xi' - \eta'\,, \quad \tilde{\zeta} = \zeta(\tilde{\beta}, \mathfrak{c}_2)\,, \quad \tilde{\zeta}' = \zeta'(\tilde{\beta}, \mathfrak{c}_2)\,, \\ \nu = \nu(\beta, \mathfrak{c}_2)\,, \quad \tilde{\nu} = \nu(\tilde{\beta}, \mathfrak{c}_2) \quad \text{und} \quad \varrho = \alpha(\nu - \tilde{\nu}) - \eta(\beta - \tilde{\beta})\,, \end{gathered}$$

so erhält man nach (8):

$$\varrho = \delta(\beta - \tilde{\beta}) - \alpha(\zeta - \tilde{\zeta}) \tag{15}$$

und nach (10):

$$|\alpha(\zeta - \tilde{\zeta})| < \tfrac{1}{2}(D\, N\mathfrak{c}_1)^{-1/2}\,, \quad |\alpha'(\zeta' - \tilde{\zeta}')| < \tfrac{1}{2}(D\, N\mathfrak{c}_1)^{-1/2}\,, \tag{16}$$

und nach (2) ergibt sich

$$|\delta(\beta - \tilde{\beta})| < h^{-1}\frac{L}{m} = o(1)\,, \quad |\delta'(\beta' - \tilde{\beta}')| < h^{-1}\frac{L}{m} = o(1)\,.$$

Hieraus folgt mit (15) und (16):

$$|\varrho| < (D\,N\mathfrak{c}_1)^{-1/2}, \quad |\varrho'| < (D\,N\mathfrak{c}_1)^{-1/2}.$$

Also ist $\varrho = 0$, da $(\mathfrak{D}\,\mathfrak{c}_1)^{-1} | \varrho$. Somit gilt

$$(17) \qquad \delta(\beta - \tilde{\beta}) = \alpha(\zeta - \tilde{\zeta}), \quad \delta'(\beta' - \tilde{\beta}') = \alpha'(\zeta' - \tilde{\zeta}'),$$

$$(18) \qquad \eta(\beta - \tilde{\beta}) = \alpha(\nu - \tilde{\nu}), \quad \eta'(\beta' - \tilde{\beta}') = \alpha'(\nu' - \tilde{\nu}').$$

Aus (18) folgt, daß α ein Teiler von $(\beta - \tilde{\beta})\,\eta\,\sqrt{D}$ ist. Nach (5) existiert dann eine nur von K abhängige natürliche Zahl v derart, daß

$$(19) \qquad \frac{\alpha}{v} \,\Big|\, (\beta - \tilde{\beta}).$$

Aus (19) folgt zunächst, daß $Z(Q')$ höchstens gleich der Anzahl aller Zahlen $\varkappa$ aus K ist mit

$$\frac{\alpha}{v} \,\Big|\, \varkappa, \quad |\varkappa| \leqq \frac{L}{m}, \quad |\varkappa'| \leqq \frac{L}{m}.$$

Also

$$(20) \qquad Z(Q') \ll \frac{L^2}{m^2 |N\alpha|} + 1.$$

Andererseits ist $Z(Q')$ nach (17) und (19) höchstens gleich der Anzahl aller ganzen $\varkappa$ aus K mit

$$|\varkappa| \leqq v \underset{\beta, \tilde{\beta} \in \mathfrak{B}}{\operatorname{Max}} \left| \frac{\zeta - \tilde{\zeta}}{\delta} \right|, \quad |\varkappa'| \leqq \frac{v}{|\alpha'|} \frac{L}{m}.$$

Beachtet man, daß im Falle $|\alpha| < D^{-1/2}$ nach (3) die Abschätzung $\delta^{-1} = O(h)$ gilt, so erhält man hier

$$(21) \qquad Z(Q') \ll (hb + 1)\left(\frac{L}{|\alpha'| m} + 1\right).$$

Aus (2), (14), (20) und (21) folgt die Behauptung des Hilfssatzes 5. Wir fügen noch hinzu, daß, falls $\mathfrak{B}$ nicht leer ist, nach (9) und (10) gilt

$$|g| \ll |\alpha| + 1, \quad |g'| \ll |\alpha'|.$$

Hilfssatz 6. *Es gilt*

$$\sum_{(g, g')} \frac{1}{\sqrt{g g'}} < 2\sqrt{1 + \log l}\,\sqrt{l},$$

wenn über irgendwelche $l\,(l \geqq 1)$ verschiedenen Paare (g, g') natürlicher Zahlen summiert wird.

Beweis: Die l verschiedenen Paare lassen sich folgendermaßen darstellen:

$$(g, g') = (g_\nu, g_{\nu\mu})$$

mit

$$g_1 < g_2 < \cdots < g_n, \quad g_{\nu 1} < g_{\nu 2} < \cdots < g_{\nu r_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \quad \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu = l.$$

Also

$$\sum_{(g,g')} \frac{1}{\sqrt{gg'}} \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left(\sum_{\mu=1}^{r_\nu} \frac{1}{\sqrt{g_{\nu\mu}}} \right) \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left(\sum_{\mu=1}^{r_\nu} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \right) <$$

$$< 2 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sqrt{r_\nu} \leqq 2 \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}} \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu} \leqq 2\sqrt{1+\log n}\,\sqrt{l} \leqq$$

$$\leqq 2\sqrt{1+\log l}\,\sqrt{l}\,. \qquad \text{q. e. d.}$$

Nach diesen Vorbereitungen zerlegen wir gemäß Hilfssatz 3 die Summe $T(\xi, \xi')$ wie folgt:

$$T(\xi, \xi') = S_1 + S_2 + O(\sqrt{A})\,, \tag{22}$$

wobei

$$S_1 = \sum_{\substack{\mathfrak{b}|\mathfrak{h} \\ N\mathfrak{b} \leqq A a^{-20}}} \mu(\mathfrak{b})\, T_\mathfrak{b}(\xi, \xi')\,, \quad S_2 = \sum_{\substack{\mathfrak{b}|\mathfrak{h} \\ A a^{-20} < N\mathfrak{b} < A}} \mu(\mathfrak{b})\, T_\mathfrak{b}(\xi, \xi')$$

ist.

§ 3. Die Abschätzung von S_1 in G

Nach (7) und Hilfssatz 4 ergibt sich

$$|S_1| = \Big| \sum_{\mathfrak{c}\in\mathfrak{M}} \sum_{\substack{\mathfrak{c}^{-1}\sim\mathfrak{b}|\mathfrak{h} \\ N\mathfrak{b} \leqq A a^{-20}}} \mu(\mathfrak{b})\, T_\mathfrak{b}(\xi, \xi')\Big| \leqq \sum_{\mathfrak{c}\in\mathfrak{M}} \sum_{\substack{1|\mathfrak{b}\sim\mathfrak{c}^{-1} \\ N\mathfrak{b} \leqq A a^{-20}}} |T_\mathfrak{b}(\xi, \xi')| \ll \tag{23}$$

$$\ll \sum_{\mathfrak{c}\in\mathfrak{M}} \Big(\sum_{\varkappa\in\mathfrak{N}} X_\mathfrak{c}(\varkappa) \Big)\,.$$

Hierbei sei $\mathfrak{N}$ die Menge aller ganzen $\varkappa$ aus K mit

$$\varkappa > 0,\ \varepsilon^{-1} < \frac{\varkappa}{\varkappa'} \leqq \varepsilon,\ N\varkappa \leqq N\mathfrak{c}\, A a^{-20}.$$

Hilfssatz 7. *Für alle $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{M}$ und alle $\varkappa$ aus $\mathfrak{N}$ mit $N\varkappa \leqq t^2$ gilt*

$$\operatorname{Max}(|\zeta(\varkappa, \mathfrak{c})|, |\zeta'(\varkappa, \mathfrak{c})|) > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\, h}\,.$$

Beweis: Nach (8) ist

$$\xi = \frac{\nu}{\varkappa} + \frac{\zeta}{\varkappa}\,, \quad \xi' = \frac{\nu'}{\varkappa'} + \frac{\zeta'}{\varkappa'}\,.$$

Da $\mathfrak{D}^{-1}|\nu$ und (ξ, ξ') außerhalb $B_{\frac{\nu}{\varkappa}}$ liegt, ist

$$\operatorname{Max}\left(\left|\frac{\zeta}{\varkappa}\right|, \left|\frac{\zeta'}{\varkappa'}\right|\right) > \frac{1}{h\sqrt{N\varkappa}}\,, \quad \text{also} \quad \operatorname{Max}(|\zeta|, |\zeta'|) > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\, h}\,. \qquad \text{q. e. d.}$$

Wie durch (23) nahegelegt wird, halten wir im folgenden das Ideal $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{M}$ fest. Wir haben

$$\sum_{\varkappa\in\mathfrak{N}} X_\mathfrak{c}(\varkappa) \leqq \sum_{\substack{\varkappa\in\mathfrak{N} \\ N\varkappa \leqq t^2}} X_\mathfrak{c}(\varkappa) + \sum_s \Big(\sum_{\substack{\varkappa\in\mathfrak{N} \\ \varepsilon^{2s+1} \leqq N\varkappa \leqq \varepsilon^{2s+2}}} X_\mathfrak{c}(\varkappa) \Big) \leqq R + \sum_s R_s\,. \tag{24}$$

Hierbei laufe s jeweils über alle natürlichen Zahlen s mit

$$\varepsilon^{-3} t^2 < U^2 \leqq \varepsilon^{-1} N\mathfrak{c}\, A a^{-20}\,, \quad \text{wobei} \quad U = \varepsilon^s \quad \text{sei}\,, \tag{25}$$

und es sei definiert:

$$R = \sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{R} \\ N\varkappa \leq t^2}} X_{\mathfrak{c}}(\varkappa)\,, \quad R_s = \sum_{\varkappa \in \mathfrak{B}_s} X_{\mathfrak{c}}(\varkappa)\,,$$

wobei $\mathfrak{B}_s$ die Menge aller ganzen $\varkappa$ aus K sei mit

$$U \leqq \varkappa \leqq \varepsilon^2 U\,, \quad U \leqq \varkappa' \leqq \varepsilon^2 U\,.$$

Nach Hilfssatz 7 läßt sich R folgendermaßen abschätzen:

$$R < \sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{R} \\ N\varkappa \leq t^2}} \sqrt{\frac{A}{N\varkappa}} \sqrt{\varepsilon}\, h \ll \sqrt{A}\, ht = A a^{-\theta}\,. \tag{26}$$

Bei der Abschätzung von R_s benutzen wir Hilfssatz 5 in der Spezialisierung

$$\mathfrak{c}_1 = (1)\,, \quad \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{c}\,, \quad L = (\varepsilon^2 - 1)\, U\,.$$

Die Zahlenpaare (g, g') mögen die in Hilfssatz 5 angegebene Rolle spielen. Dann ist offenbar

$$\begin{aligned} R_s &= \sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{B}_s \\ g = g' = 0}} X_{\mathfrak{c}}(\varkappa) + \sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{B}_s \\ g = 0, g' \neq 0}} X_{\mathfrak{c}}(\varkappa) + \sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{B}_s \\ g \neq 0, g' = 0}} X_{\mathfrak{c}}(\varkappa) + \sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{B}_s \\ gg' \neq 0}} X_{\mathfrak{c}}(\varkappa) \\ &= R_s^{(1)} + R_s^{(2)} + R_s^{(3)} + R_s^{(4)}\,. \end{aligned}$$

Wir treffen folgende Fallunterscheidung:

Fall I: $|\alpha| \geqq \dfrac{1}{4c_3\sqrt{D}}$.

Im einzelnen folgt bei Beachtung von (12), (2), (4) und (25):

$$R_s^{(1)} \leqq Z(0, 0, 2c_3)\, \frac{A}{U^2} \ll \left(\frac{U^2 a^2}{|N\alpha|} + 1\right) \frac{A}{U^2} \ll \frac{A a^2}{t} \ll A a^{3-\theta}\,,$$

$$\begin{aligned} R_s^{(2)} &\ll \sum_{0 < |g'| \ll |\alpha'|} Z(0, g', 2c_3)\, \frac{\sqrt{A}}{U}\, \frac{|\alpha'|}{|g'|} \ll \left(\frac{U^2 a^2}{|N\alpha|} + 1\right) \frac{\sqrt{A}}{U}\, |\alpha'|\, a \ll \\ &\ll (U^2 a^2 + |\alpha'|)\, \frac{\sqrt{A}}{U}\, a \ll A a^{3-\theta}\,, \end{aligned}$$

$$R_s^{(3)} \ll \sum_{0 < |g| \ll |\alpha|} Z(g, 0, 2c_3)\, \frac{\sqrt{A}}{U}\, \frac{|\alpha|}{|g|} \ll \left(\frac{U^2 a^2}{|N\alpha|} + 1\right) \frac{\sqrt{A}}{U}\, |\alpha|\, a \ll A a^{3-\theta}\,,$$

$$R_s^{(4)} \ll \sum_{\substack{0 < |g| \ll |\alpha| \\ 0 < |g'| \ll |\alpha'|}} Z(g, g', 2c_3)\, \frac{\sqrt{A}}{U} \sqrt{\frac{|N\alpha|}{|gg'|}}\,.$$

Hier ist zu bemerken, daß für höchstens $O(\mathrm{Min}\,(|N\alpha|, U^2))$ verschiedene Zahlenpaare (g, g') die Größe $Z(g, g', 2c_3)$ nicht verschwindet; denn wegen $|g| \ll |\alpha|$, $|g'| \ll |\alpha'|$ gibt es höchstens $O(|N\alpha|)$ solche Zahlenpaare, und andererseits enthält $\mathfrak{B}_s$ höchstens $O(U^2)$ Elemente $\varkappa$. Also können wir mit Hilfssatz 6 und (12) weiterschließen:

$$\begin{aligned} R_s^{(4)} &\ll \left(\frac{U^2 a^2}{|N\alpha|} + 1\right) \frac{\sqrt{A}}{U} \sqrt{|N\alpha|}\; \mathrm{Min}\left(\sqrt{|N\alpha|}\,,\, U\right) \sqrt{a} \ll \\ &\ll U a^2 \sqrt{A}\, \sqrt{a} + \sqrt{A}\, \sqrt{|N\alpha|}\, \sqrt{a} \ll A a^{3-\theta}\,. \end{aligned}$$

Fall II: $|\alpha| < \frac{1}{4c_3\sqrt{D}}$.

In diesem Fall sind nach (9) und (10) die Summen $R_s^{(3)}$ und $R_s^{(4)}$ leer. Bei Anwendung von (13) erhalten wir

$$R_s^{(1)} \leqq \sum_{0 \leq l \leq \left[\frac{\log h}{\log 2}\right]} \left(\sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{B}_s \\ g = g' = 0 \\ c_3 2^{-l-1} < |\zeta| \leq c_3 2^{-l}}} X_c(\varkappa) \right) + \sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{B}_s \\ g = g' = 0 \\ |\zeta| \leq c_3 h^{-1}}} X_c(\varkappa)$$

$$\ll \sum_{0 \leq l \leq \left[\frac{\log h}{\log 2}\right]} Z(0, 0, c_3 2^{-l+1}) \frac{\sqrt{A}}{U} 2^l + Z(0, 0, 2c_3 h^{-1}) \frac{A}{U^2}$$

$$\ll \sum_{0 \leq l \leq \left[\frac{\log h}{\log 2}\right]} \left(\frac{U}{|\alpha'|} + \frac{U^2 a^2}{h|\alpha'|} + 1 \right) \frac{h}{2^l} \frac{\sqrt{A}}{U} 2^l + \left(\frac{U}{|\alpha'|} + \frac{U^2 a^2}{h|\alpha'|} + 1 \right) \frac{A}{U^2}$$

$$\ll a \left(\frac{U}{|\alpha'|} + \frac{U^2 a^2}{h|\alpha'|} + 1 \right) h \frac{\sqrt{A}}{U} + \left(\frac{U}{|\alpha'|} + \frac{U^2 a^2}{h|\alpha'|} + 1 \right) \frac{A}{U^2} \ll A a^{3-0},$$

$$R_s^{(2)} \leqq \sum_{1 \leq n \leq [c_3|\alpha'|]} \left(\sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{B}_s \\ g = 0,\, g' \neq 0 \\ n|\alpha'|^{-1} \leq \zeta < (n+1)|\alpha'|^{-1}}} X_c(\varkappa) + \sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{B}_s \\ g = 0,\, g' \neq 0 \\ -(n+1)|\alpha'|^{-1} < \zeta \leq -n|\alpha'|^{-1}}} X_c(\varkappa) \right) + \\ + \sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{B}_s \\ g = 0,\, g' \neq 0 \\ |\zeta| \leq |\alpha'|^{-1}}} X_c(\varkappa)$$

$$\ll \sum_{1 \leq n \leq [c_3|\alpha'|]} \sum_{0 < |g'| \ll |\alpha'|} \left(Z^{(n)}(0, g', |\alpha'|^{-1}) + Z^{(-n)}(0, g', |\alpha'|^{-1}) \right) \frac{\sqrt{A}}{U} \frac{|\alpha'|}{\sqrt{n|g'|}} + \\ + \sum_{0 < |g'| \ll |\alpha'|} Z(0, g', 2|\alpha'|^{-1}) \frac{\sqrt{A}}{U} \frac{|\alpha'|}{|g'|}.$$

Der obere Index i bei $Z^{(i)}(0, g', |\alpha'|^{-1})$ soll hier die Zugehörigkeit von $Z(0, g', |\alpha'|^{-1})$ zu einer von i abhängigen Zahlenmenge bezeichnen. Wir stellen wieder fest, daß wir wegen $n \ll |\alpha'|$, $g' \ll |\alpha'|$ über höchstens $O(\mathrm{Min}(|\alpha'|^2, U^2))$ verschiedene Paare (n, g') zu summieren haben und erhalten deshalb mit Hilfssatz 6 und (13):

$$R_s^{(2)} \ll \left(\frac{U}{|\alpha'|} + \frac{U^2 a^2}{h|\alpha'|} + 1 \right) \frac{h}{|\alpha'|} \frac{\sqrt{A}}{U} |\alpha'| \,\mathrm{Min}(|\alpha'|, U) \sqrt{a} + \\ + \left(\frac{U}{|\alpha'|} + \frac{U^2 a^2}{h|\alpha'|} + 1 \right) \frac{h}{|\alpha'|} \frac{\sqrt{A}}{U} |\alpha'| \, a \ll A a^{3-0}.$$

Sowohl im Fall I als auch im Fall II ist also

(27) $$R_s \ll A a^{3-0}.$$

Bei Beachtung von: $s \ll a$ und der Tatsache, daß $\mathfrak{M}$ nur H Elemente enthält, folgt aus (23), (24), (26) und (27):

(28) $$S_1 \ll A a^{4-0}.$$

§ 4. Die Abschätzung von S_2 in G

Sei $\theta_1 = 12\theta + 6$, $\mathfrak{P}$ die Menge aller Primideale $\mathfrak{p}$ von K mit $a^{\theta_1} < N\mathfrak{p} \leqq \sqrt{A}$ und $\mathfrak{Q}_k$ die Menge aller ganzen Ideale $\mathfrak{q}$, die $\mathfrak{h}$ teilen und genau k Primteiler mit Norm $> a^{\theta_1}$ besitzen. Dann wird

$$(29)\qquad S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} W_k, \quad W_k = \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{Q}_k \\ Aa^{-2\theta} < N\mathfrak{b} < A}} \mu(\mathfrak{b})\, T_{\mathfrak{b}}(\xi, \xi').$$

Hilfssatz 8. *Es ist $W_k = 0$ für $k \geqq a$.*

Beweis: Sei $\mathfrak{b}$ ein Ideal aus $\mathfrak{Q}_k$ mit $N\mathfrak{b} < A$. Dann ist $a^{\theta_1 k} < A$, also $k < a$. Somit ist W_k für $k \geqq a$ leer.

Hilfssatz 9. *Für die Anzahl Z_0 aller Ideale $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{Q}_0$ mit $Aa^{-2\theta} < N\mathfrak{b} < A$ gilt*

$$Z_0 \ll Aa^{-\theta_1}.$$

Beweis: Sei $\mathfrak{b}$ ein Ideal aus $\mathfrak{Q}_0$ mit $Aa^{-2\theta} < N\mathfrak{b} < A$ und s die Zahl seiner Primteiler. Dann ist

$$(a^{\theta_1})^s > Aa^{-2\theta}$$

und folglich für genügend großes A:

$$s > \frac{a - 2\theta\log a}{\theta_1 \log a} > \frac{a}{2\theta_1 \log a}.$$

Deshalb ist die Zahl $\tau(\mathfrak{b})$ der Teiler jedes solchen $\mathfrak{b}$:

$$\tau(\mathfrak{b}) = 2^s > 2^{\frac{a}{2\theta_1 \log a}} = A^{\frac{\log 2}{2\theta_1 \log a}} > A^{\frac{1}{3\theta_1 \log a}}.$$

Mit der bekannten Abschätzung

$$\sum_{N\mathfrak{b} < A} \tau(\mathfrak{b}) \ll Aa$$

erhalten wir

$$Z_0 A^{\frac{1}{3\theta_1 \log a}} \ll Aa = Aa^{-\theta_1} A^{\frac{1}{3\theta_1 \log a}} a^{\theta_1+1} A^{-\frac{1}{3\theta_1 \log a}} \ll Aa^{-\theta_1} A^{\frac{1}{3\theta_1 \log a}}. \text{ q.e.d.}$$

Nach Hilfssatz 4 und 9 haben wir also für W_0:

$$(30)\qquad W_0 \ll \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{Q}_0 \\ Aa^{-2\theta} < N\mathfrak{b} < A}} \frac{A}{N\mathfrak{b}} < Z_0 a^{2\theta} \ll Aa^{2\theta-\theta_1}.$$

Weiterhin sei $k > 0$. Bildet man sämtliche Produkte $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$, $\mathfrak{q} \in \mathfrak{Q}_{k-1}$, so entsteht jedes $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{Q}_k$ genau k-mal und im Fall $k > 1$ noch jedes Produkt $\mathfrak{p}^2\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$, $\mathfrak{r} \in \mathfrak{Q}_{k-2}$, $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{r}$ genau einmal. Setzt man

$$V_k = \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathfrak{P},\, \mathfrak{q}\in\mathfrak{Q}_{k-1} \\ Aa^{-2\theta} < N(\mathfrak{p}\mathfrak{q}) < A}} \mu(\mathfrak{q})\, T_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}(\xi, \xi') \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

so folgt mit Hilfssatz 4:

$$(31)\qquad \begin{aligned} |kW_k + V_k| &\leqq \sum_{\mathfrak{p}\in\mathfrak{P}} \sum_{\substack{1|\mathfrak{r} \\ Aa^{-2\theta} < N(\mathfrak{p}^2\mathfrak{r}) < A}} |T_{\mathfrak{p}^2\mathfrak{r}}(\xi, \xi')| \ll \sum_{\mathfrak{p}\in\mathfrak{P}} \sum_{\substack{1|\mathfrak{r} \\ N\mathfrak{r} < A}} \frac{A}{N\mathfrak{p}^2 N\mathfrak{r}} \\ &\ll \sum_{\mathfrak{p}\in\mathfrak{P}} \frac{Aa}{N\mathfrak{p}^2} \ll Aa^{1-\theta_1}, \end{aligned}$$

und es bleibt V_k abzuschätzen. Gemäß der Zerlegung

$$(32)\qquad V_k = \sum_{c \in \mathfrak{M}} V_{k,c}\,, \quad V_{k,c} = \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathfrak{P}\\ \mathfrak{p}\sim c^{-1}}} \; \sum_{\substack{\mathfrak{q}\in\mathfrak{Q}_{k-1}\\ A a^{-20} < N(\mathfrak{p}\mathfrak{q}) < A}} \mu(\mathfrak{q})\, T_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}(\xi, \xi')$$

genügt es, $\mathfrak{p}$ auf die Klasse des festen Ideals c^{-1} zu beschränken. Nach den Überlegungen in § 2 gilt somit

$$V_{k,c} = \sum_{\varkappa,\mathfrak{q}} \mu(\mathfrak{q}) \left(\sum_{\substack{0<\varrho<\frac{\lambda}{\varkappa}\\ \mathfrak{q}c^{-1}|\varrho}} e^{2\pi i S(\varrho\varkappa\xi)} \right).$$

Hierbei wird summiert über alle $\varkappa$ mit

$$(\varkappa)\, c^{-1} \in \mathfrak{P}\,, \quad \varkappa > 0\,, \quad \varepsilon^{-1} < \frac{\varkappa}{\varkappa'} \leqq \varepsilon\,,$$

und zu gegebenem $\varkappa$ durchläuft $\mathfrak{q}$ alle Ideale aus $\mathfrak{Q}_{k-1}$ mit

$$A a^{-20}\, N c (N\varkappa)^{-1} < N\mathfrak{q}\,.$$

Nun wird (vergleiche den analogen Schluß bei (24))

$$(33)\qquad V_{k,c} = \sum_s C_s\,, \quad |C_s| \leqq \sum_{\varkappa} \Big| \sum_{\mathfrak{q},\varrho} \mu(\mathfrak{q})\, e^{2\pi i S(\varrho\varkappa\xi)} \Big|\,.$$

Dabei läuft s über alle natürlichen Zahlen s mit

$$\varepsilon^{-3} N c\, a^{\theta_1} < U^2 \leqq \varepsilon^{-1} N c \sqrt{A}\,, \quad U = \varepsilon^s$$

und $\varkappa$ über alle ganzen Körperzahlen mit

$$U \leqq \varkappa \leqq \varepsilon^2 U\,, \quad U \leqq \varkappa' \leqq \varepsilon^2 U\,,$$

und in der inneren Summe läuft $\mathfrak{q}$ über alle Ideale aus $\mathfrak{Q}_{k-1}$ mit Norm $> A a^{-20} N c (N\varkappa)^{-1}$, sowie ϱ über alle Körperzahlen mit

$$\mathfrak{q} c^{-1} | \varrho\,, \quad 0 < \varrho < \frac{\lambda}{\varkappa}\,.$$

Nach der Schwarzschen Ungleichung ist

$$(34)\qquad C_s^2 \ll U^2 \sum_{\mathfrak{q}_1,\mathfrak{q}_2,\varrho_1,\varrho_2} \Big| \sum_{\varkappa} e^{2\pi i S(\varkappa(\varrho_1-\varrho_2)\xi)} \Big|\,.$$

Hierbei wird summiert über alle Quadrupel $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \varrho_1, \varrho_2)$ mit

$$(35)\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{q}_j \in \mathfrak{Q}_{k-1}\,, \quad N\mathfrak{q}_j > A a^{-20} N c (\varepsilon^4 U^2)^{-1}\,, \quad \mathfrak{q}_j c^{-1} | \varrho_j\,, \\ &\qquad\qquad 0 < \varrho_j < \frac{\lambda}{U}\,, \quad 0 < \varrho_j' < \frac{\lambda'}{U}\,, \quad (j = 1, 2)\,, \end{aligned}$$

und innen läuft $\varkappa$ über alle ganzen Körperzahlen mit

$$(36)\qquad U \leqq \varkappa \leqq \varepsilon^2 U\,, \quad U \leqq \varkappa' \leqq \varepsilon^2 U\,, \quad 0 < \varkappa < \frac{\lambda}{\varrho_j}\,, \quad N\varkappa > \frac{A a^{-20} N c}{N \mathfrak{q}_j}\,, \quad (j = 1, 2)\,.$$

Der Punkt $(\varkappa, \varkappa')$ liegt also in einem Gebiet $\mathfrak{G}$, definiert durch (36), der Ebene E, das durch eine Hyperbel von einem Rechteck abgeschnitten wird. Die Länge des Randes von $\mathfrak{G}$ ist $O(U)$. Der Beweis von Hilfssatz 4 überträgt sich fast wörtlich auf

Hilfssatz 10. *Für eine beliebige Zahl σ aus K gilt*

$$\sum_{\substack{1\,|\,\varkappa \\ (\varkappa,\varkappa')\in\mathfrak{S}}} e^{2\pi i S(\varkappa\sigma\xi)} \ll Y(\sigma)\,,$$

wobei

$$Y(\sigma) = \operatorname{Min}\left(U^2, \frac{U}{|\zeta|}, \frac{U}{|\zeta'|}, \frac{U}{\sqrt{|\zeta\zeta'|}}\right)$$

und

$$\zeta = \zeta(\sigma, (1))\,, \quad \zeta' = \zeta'(\sigma, (1))$$

sei.

Hilfssatz 11. *Zu einer gegebenen Zahl σ aus K gilt für die Anzahl Z_1 aller verschiedenen Quadrupel* $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \varrho_1, \varrho_2)$, *die die Bedingungen* (35) *und die Gleichung*

$$\sigma = \varrho_1 - \varrho_2$$

erfüllen:

$$Z_1 \ll \frac{A a^{40}}{U^2}\,.$$

Beweis: Die Anzahl der verschiedenen Paare (ϱ_1, ϱ_2), die (35) und $\sigma = \varrho_1 - \varrho_2$ befriedigen, ist wegen

$$\mathfrak{c}^{-1}\,|\,\varrho_j\,, \quad 0 < \varrho_j < \frac{\lambda}{U}\,, \quad 0 < \varrho_j' < \frac{\lambda'}{U}\,, \quad (j = 1, 2)$$

höchstens von der Größenordnung $O\left(\frac{A}{U^2}\right)$. Zu gegebenem ϱ_j ist die Anzahl der $\mathfrak{q}_j$ höchstens $O(a^{20})$. Jedem solchen $\mathfrak{q}_j$ entspricht nämlich nach (35) eineindeutig ein ganzes Ideal $\mathfrak{u}$ mit $(\varrho_j)\mathfrak{c} = \mathfrak{q}_j\mathfrak{u}$, und die Anzahl der verschiedenen $\mathfrak{u}$ ist wegen

$$1 \leq N\mathfrak{u} = \frac{N(\varrho_j\mathfrak{c})}{N\mathfrak{q}_j} \ll a^{20}$$

höchstens $O(a^{20})$. Hieraus folgt die Behauptung des Hilfssatzes.

Nach (34), Hilfssatz 10 und 11 haben wir also

$$C_s^2 \ll A a^{40} M_s\,, \quad M_s = \sum_{\sigma\in\mathfrak{C}_s} Y(\sigma)\,, \tag{37}$$

wobei $\mathfrak{C}_s$ die Menge aller Zahlen σ aus $\mathfrak{c}^{-1}$ sei mit

$$|\sigma| < W\,, \quad |\sigma'| < W\,, \quad W = \operatorname{Max}\left(\frac{\lambda}{U}, \frac{\lambda'}{U}\right). \tag{38}$$

Die Abschätzung von M_s verläuft nun völlig analog zu der von R_s in § 3. Wir wenden Hilfssatz 5 an in der Spezialisierung

$$\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c}\,, \quad \mathfrak{c}_2 = (1)\,, \quad L = 2W$$

und zerlegen:

$$\begin{aligned} M_s &= \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{C}_s \\ \sigma=\sigma'=0}} Y(\sigma) + \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{C}_s \\ \sigma=0,\,\sigma'\neq 0}} Y(\sigma) + \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{C}_s \\ \sigma\neq 0,\,\sigma'=0}} Y(\sigma) + \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{C}_s \\ \sigma\sigma'\neq 0}} Y(\sigma) \\ &= M_s^{(1)} + M_s^{(2)} + M_s^{(3)} + M_s^{(4)}\,. \end{aligned}$$

Wir treffen folgende Fallunterscheidung:

Fall I: $|\alpha| \geqq \dfrac{1}{4c_3\sqrt{DN\mathfrak{c}}}$.

Mit (12), (2), (4) und (38) folgt:

$$M_s^{(1)} \ll Z(0,0,2c_3)\,U^2 \ll \left(\frac{W^2a^2}{|N\alpha|}+1\right)U^2 \ll \frac{Aa^2}{t} \ll Aa^{-60},$$

$$M_s^{(2)} \ll \sum_{0<|g'|<|\alpha'|} Z(0,g',2c_3)\,U\frac{|\alpha'|}{|g'|} \ll \left(\frac{W^2a^2}{|N\alpha|}+1\right)U\,|\alpha'|\,a \ll Aa^{-60},$$

$$M_s^{(3)} \ll \sum_{0<|g|<|\alpha|} Z(g,0,2c_3)\,U\frac{|\alpha|}{|g|} \ll \left(\frac{W^2a^2}{|N\alpha|}+1\right)U\,|\alpha|\,a \ll Aa^{-60},$$

$$M_s^{(4)} \ll \sum_{\substack{0<|g|<|\alpha|\\ 0<|g'|<|\alpha'|}} Z(g,g',2c_3)\,U\sqrt{\frac{|N\alpha|}{|gg'|}}.$$

Hier ist wiederum zu bemerken, daß man wegen (38) und $|g| \ll |\alpha|$, $|g'| \ll |\alpha'|$ höchstens über $O(\mathrm{Min}(|N\alpha|, W^2))$ verschiedene Paare (g, g') zu summieren braucht. Nach Hilfssatz 6 und (12) erhalten wir somit

$$M_s^{(4)} \ll \left(\frac{W^2a^2}{|N\alpha|}+1\right)U\sqrt{|N\alpha|}\,\mathrm{Min}\left(\sqrt{|N\alpha|},\,W\right)\sqrt{a}$$
$$\ll W^2a^2U\sqrt{a} + U\sqrt{|N\alpha|}\,W\sqrt{a} \ll Aa^{-60}.$$

Fall II: $|\alpha| < \dfrac{1}{4c_3\sqrt{DN\mathfrak{c}}}$.

In diesem Fall sind nach (9) und (10) die Summen $M_s^{(3)}$ und $M_s^{(4)}$ leer. Bei Anwendung von (13) erhalten wir

$$M_s^{(1)} \leqq \sum_{0\leqq l\leqq\left[\frac{\log h}{\log 2}\right]}\left(\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{C}_s\\ g=g'=0\\ c_3 2^{-l-1}<|\zeta|\leqq c_3 2^{-l}}} Y(\sigma)\right) + \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{C}_s\\ g=g'=0\\ |\zeta|\leqq c_3 h^{-1}}} Y(\sigma)$$

$$\ll \sum_{0\leqq l\leqq\left[\frac{\log h}{\log 2}\right]} Z(0,0,c_3 2^{-l+1})\,U\,2^l + Z(0,0,2c_3h^{-1})\,U^2$$

$$\ll \sum_{0\leqq l\leqq\left[\frac{\log h}{\log 2}\right]}\left(\frac{W}{|\alpha'|}+\frac{W^2a^2}{h|\alpha'|}+1\right)\frac{h}{2^l}\,U\,2^l + \left(\frac{W}{|\alpha'|}+\frac{W^2a^2}{h|\alpha'|}+1\right)U^2$$

$$\ll a\left(\frac{W}{|\alpha'|}+\frac{W^2a^2}{h|\alpha'|}+1\right)hU + \left(\frac{W}{|\alpha'|}+\frac{W^2a^2}{h|\alpha'|}+1\right)U^2 \ll Aa^{-60},$$

$$M_s^{(2)} \leqq \sum_{1\leqq n\leqq[c_3|\alpha'|]}\left(\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{C}_s\\ g=0,\,g'\neq 0\\ n|\alpha'|^{-1}\leqq\zeta<(n+1)|\alpha'|^{-1}}} Y(\sigma) + \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{C}_s\\ g=0,\,g'\neq 0\\ -(n+1)|\alpha'|^{-1}<\zeta\leqq -n|\alpha'|^{-1}}} Y(\sigma)\right) +$$
$$+ \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{C}_s\\ g=0,\,g'\neq 0\\ |\zeta|\leqq|\alpha'|^{-1}}} Y(\sigma)$$

$$\ll \sum_{1\leqq n\leqq[c_3|\alpha'|]}\ \sum_{0<|g'|<|\alpha'|}\left(Z^{(n)}(0,g',|\alpha'|^{-1}) + Z^{(-n)}(0,g',|\alpha'|^{-1})\right)\frac{U|\alpha'|}{\sqrt{n|g'|}} +$$
$$+ \sum_{0<|g'|<|\alpha'|} Z(0,g',2|\alpha'|^{-1})\,U\frac{|\alpha'|}{|g'|}.$$

Wir haben hier wegen (38) und $n \ll |\alpha'|$, $g' \ll |\alpha'|$ über höchstens $O(\operatorname{Min}(|\alpha'|^2, W^2))$ verschiedene Paare (n, g') zu summieren und erhalten mit Hilfssatz 6 und (13):

$$M_s^{(2)} \ll \left(\frac{W}{|\alpha'|} + \frac{W^2 a^2}{h|\alpha'|} + 1\right) \frac{h}{|\alpha'|} U \, |\alpha'| \operatorname{Min}(|\alpha'|, W) \sqrt{a} + \\ + \left(\frac{W}{|\alpha'|} + \frac{W^2 a^2}{h|\alpha'|} + 1\right) \frac{h}{|\alpha'|} U \, |\alpha'| \, a$$

$$\ll \left(W + \frac{W^2 a^2}{h}\right) h \, U \sqrt{a} + \left(\frac{W}{|\alpha'|} + \frac{W^2 a^2}{h|\alpha'|} + 1\right) h \, U \, a \ll A a^{-6\theta}.$$

Somit haben wir sowohl im Fall I als auch im Fall II:

$$M_s \ll A a^{-6\theta}.$$

Hieraus folgt nach (37):

$$C_s \ll A a^{-\theta}$$

und damit aus (32) und (33) wegen $s \ll a$:

$$V_k \ll A a^{1-\theta}$$

und weiter aus (31):

(39) $$W_k \ll \frac{1}{k} A a^{1-\theta} \quad \text{für alle} \quad k > 0.$$

Dann ergeben (29), Hilfssatz 8, (30) und (39):

(40) $$S_2 \ll A a^{2-\theta}.$$

Nach (22), (28) und (40) haben wir damit folgenden Satz bewiesen:

Satz 2. *Für alle Punkte (ξ, ξ') aus G gilt:*

$$T(\xi, \xi') \ll A a^{4-\theta}.$$

§ 5. Die Approximation von $T(\xi, \xi')$ in B_γ

Hilfssatz 12. *Seien b_1, b_2 zwei beliebige, aber fest gewählte reelle Zahlen mit $b_1 \geqq 1$, $b_2 > 0$ und Y, Y' ein Paar reeller Zahlen mit*

$$Y \geqq 2, \quad Y' \geqq 2, \quad Y \leqq (Y')^{b_1}, \quad Y' \leqq (Y)^{b_1}.$$

Ferner sei $\mathfrak{b}$ ein ganzes Ideal von K mit $N\mathfrak{b} \leqq \log^{b_2}(Y\,Y')$ und ϱ eine ganze zu $\mathfrak{b}$ teilerfremde Zahl aus K. Bezeichne $\varphi(\mathfrak{b})$ die Eulersche Funktion für Ideale und $\pi(\mathfrak{b}, \varrho, Y, Y')$ die Anzahl aller totalpositiven Primzahlen ω in K mit

$$\omega \equiv \varrho \bmod \mathfrak{b}, \quad \omega < Y, \quad \omega' < Y'.$$

Dann gilt mit einer positiven Konstanten c:

$$\pi(\mathfrak{b}, \varrho, Y, Y') = \frac{1}{H \log \varepsilon \, \varphi(\mathfrak{b})} \int_2^Y \int_2^{Y'} \frac{du\, du'}{\log(u u')} + O\left(Y\,Y' e^{-c\sqrt{\log(Y Y')}}\right).$$

Das O-Zeichen bezieht sich auf den Grenzübergang $Y\,Y' \to \infty$, wobei die O-Konstante und c nur von b_1, b_2 und K, aber nicht von $\mathfrak{b}$ und ϱ abhängen.

Dies ist der für unsere Zwecke umgeschriebene und spezialisierte Satz von Mitsui [2], Seite 35[8]).

[8]) Siehe auch Schulz-Arenstorff [5].

Im folgenden sei (ξ, ξ') aus B_γ, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\gamma$, $N\mathfrak{a} \leqq t^3$, $z = \xi - \gamma$, $z' = \xi' - \gamma'$ und F_γ die Menge aller dieser Punkte (z, z'), d. h. das Gebiet, das durch die Translation $\gamma \to 0$, $\gamma' \to 0$ aus B_γ hervorgeht. F_γ enthält das Quadrat

$$(41) \qquad |z| \leqq (ht)^{-1}, \quad |z'| \leqq (ht)^{-1}$$

und ist enthalten in dem Quadrat

$$(42) \qquad |z| \leqq (ht^{-1})^{-1}, \quad |z'| \leqq (ht^{-1})^{-1}.$$

Offenbar gilt

$$T(\xi, \xi') = \sum_{\substack{0 < \omega < \lambda \\ (\omega, \mathfrak{a}) = 1}} e^{2\pi i S(\omega\xi)} + O\Bigl(\sum_{\substack{0 < \omega < \lambda \\ \omega | \mathfrak{a}}} 1\Bigr).$$

Bezüglich der Abschätzung des Restgliedes ist zu bemerken, daß $\mathfrak{a}$ höchstens $O(\log N\mathfrak{a})$ verschiedene Primidealteiler besitzt und ein solcher Primidealteiler (ω) von höchstens $O(a)$ verschiedenen Primzahlen ω mit $0 \prec \omega \prec \lambda$ erzeugt werden kann. Wir können also schreiben:

$$(43) \qquad T(\xi, \xi') = \sum_{\substack{0 < \omega < \lambda \\ (\omega, \mathfrak{a}) = 1}} e^{2\pi i S(\omega\xi)} + O(a \log N\mathfrak{a}).$$

Sei $\theta_2 = 60\theta$. Die auf der rechten Seite von (43) stehende Summe teilen wir auf in Untersummen folgender Gestalt:

$$T(\xi, \xi')_{s,s'} = \sum_{\substack{s \leqq \omega < s_1 \\ s' \leqq \omega' < s_1' \\ (\omega, \mathfrak{a}) = 1}} e^{2\pi i S(\omega\xi)}.$$

Hierbei sei s ein Element der Zahlenreihe

$$\Bigl(0, 2, \sqrt{A}\, a^{-\theta_2}, 2\sqrt{A}\, a^{-\theta_2}, 3\sqrt{A}\, a^{-\theta_2}, \ldots, \Bigl[\frac{\lambda}{\sqrt{A}\, a^{-\theta_2}}\Bigr]\sqrt{A}\, a^{-\theta_2}, \lambda\Bigr),$$

und s' sei aus

$$\Bigl(0, 2, \sqrt{A}\, a^{-\theta_2}, 2\sqrt{A}\, a^{-\theta_2}, 3\sqrt{A}\, a^{-\theta_2}, \ldots, \Bigl[\frac{\lambda'}{\sqrt{A}\, a^{-\theta_2}}\Bigr]\sqrt{A}\, a^{-\theta_2}, \lambda'\Bigr).$$

Sei s_1 bzw. s_1' das auf s bzw. s' in diesen Zahlenreihen als nächstes folgende Element. Die Anzahl der Summen $T(\xi, \xi')_{s,s'}$ ist höchstens $O(a^{2\theta_2})$. Jedes $T(\xi, \xi')_{s,s'}$ können wir wiederum in der Form

$$T(\xi, \xi')_{s,s'} = \sum_{\tau} T(\xi, \xi')_{s,s',\tau}$$

darstellen. Hierbei bezeichne $T(\xi, \xi')_{s,s',\tau}$ den Teil von $T(\xi, \xi')_{s,s'}$, der zu den Werten $\omega \equiv \tau \bmod \mathfrak{a}$ gehört, und summiert werde über alle zu $\mathfrak{a}$ teilerfremden ganzen τ eines vollständigen Restsystems mod $\mathfrak{a}$. Die Anzahl $U_{s,s'}$ der Primzahlen ω, die die Bedingungen

$$s \leqq \omega < s_1, \quad s' \leqq \omega' < s_1', \quad \omega \equiv \tau \bmod \mathfrak{a}, \quad s \geqq 2, \quad s' \geqq 2$$

erfüllen, ist nach Hilfssatz 12:

$$(44) \qquad U_{s,s'} = \frac{1}{H \log \varepsilon\, \varphi(\mathfrak{a})} \int\limits_{s}^{s_1}\int\limits_{s'}^{s_1'} \frac{du\, du'}{\log(uu')} + O\Bigl(A e^{-c\sqrt{a}}\Bigr),$$

wobei die O-Konstante und c wegen $N\mathfrak{a} \leq t^2$ nur von K und θ abhängen. Mit (42) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
(45)\qquad e^{2\pi i S(\omega z)} - e^{2\pi i(sz + s'z')} &\ll |s_1 - s|\,|z| + |s_1' - s'|\,|z'| \\
&\ll \sqrt{A}\, a^{-\theta_1}(|z| + |z'|) \ll a^{-\frac{3}{4}\theta_1}.
\end{aligned}
$$

Aus (44) und (45) folgt für $s \geq 2$, $s' \geq 2$:

$$
\begin{aligned}
(46)\qquad T(\xi, \xi')_{s,s',\tau} &= \frac{1}{H \log\varepsilon\, \varphi(\mathfrak{a})} \int_s^{s_1}\int_{s'}^{s_1'} \frac{du\, du'}{\log(uu')}\, e^{2\pi i S(\tau\gamma) + 2\pi i(sz + s'z')} + \\
&\quad + O\left(\frac{1}{\varphi(\mathfrak{a})} \int_s^{s_1}\int_{s'}^{s_1'} \frac{du\, du'}{\log(uu')}\, a^{-\frac{3}{4}\theta_1} + A e^{-c\sqrt{a}}\right).
\end{aligned}
$$

Im Integrationsgebiet des Integrals von (46) vollziehen wir die zu (45) analoge Abschätzung

$$
e^{2\pi i(sz + s'z')} - e^{2\pi i(uz + u'z')} \ll a^{-\frac{3}{4}\theta_1}
$$

und erhalten damit für $s, s' \geq 2$ aus (46):

$$
\begin{aligned}
T(\xi, \xi')_{s,s',\tau} &= \frac{e^{2\pi i S(\tau\gamma)}}{H \log\varepsilon\, \varphi(\mathfrak{a})} \int_s^{s_1}\int_{s'}^{s_1'} \frac{e^{2\pi i(uz + u'z')}}{\log(uu')}\, du\, du' + \\
&\quad + O\left(\frac{1}{\varphi(\mathfrak{a})} \int_s^{s_1}\int_{s'}^{s_1'} \frac{du\, du'}{\log(uu')}\, a^{-\frac{3}{4}\theta_1} + A e^{-c\sqrt{a}}\right).
\end{aligned}
$$

Da

$$
\sum_{\substack{\tau \bmod \mathfrak{a} \\ (\tau, \mathfrak{a}) = 1}} e^{2\pi i S(\tau\gamma)} = \mu(\mathfrak{a})
$$

ist[8]), ergibt die Summation über die τ:

$$
\begin{aligned}
T(\xi, \xi')_{s,s'} &= \frac{\mu(\mathfrak{a})}{H \log\varepsilon\, \varphi(\mathfrak{a})} \int_s^{s_1}\int_{s'}^{s_1'} \frac{e^{2\pi i(uz + u'z')}}{\log(uu')}\, du\, du' + \\
&\quad + O\left(\int_s^{s_1}\int_{s'}^{s_1'} \frac{du\, du'}{\log(uu')}\, a^{-\frac{3}{4}\theta_1} + A e^{-c\sqrt{a}}\, t^2\right) \quad \text{für } s, s' \geq 2\,.
\end{aligned}
$$

Für $s < 2$ oder $s' < 2$ schätzen wir $T(\xi, \xi')_{s,s'}$ trivial ab durch

$$
T(\xi, \xi')_{s,s'} \ll \sqrt{A}\,.
$$

Nach Summation über alle Paare s, s' erhalten wir hiermit nach (43):

$$
\begin{aligned}
T(\xi, \xi') &= \frac{\mu(\mathfrak{a})}{H \log\varepsilon\, \varphi(\mathfrak{a})} \int_2^{\lambda}\int_2^{\lambda'} \frac{e^{2\pi i(uz + u'z')}}{\log(uu')}\, du\, du' + \\
&\quad + O\left(\int_2^{\lambda}\int_2^{\lambda'} \frac{du\, du'}{\log(uu')}\, a^{-\frac{3}{4}\theta_1} + A e^{-c\sqrt{a}}\, t^2 a^{2\theta_1}\right),
\end{aligned}
$$

[8]) Siehe Rademacher [3], Seite 116, (1.515).

und hieraus folgt mit der trivialen Abschätzung

$$\int_2^{\lambda}\int_2^{\lambda'} \frac{du\,du'}{\log(uu')} \ll A$$

der folgende Satz:

Satz 3. *Für alle (ξ, ξ') aus B_γ gilt*

$$T(\xi, \xi') = \frac{\mu(\mathfrak{a})}{H \log \varepsilon\, \varphi(\mathfrak{a})} J(z, z') + O\left(A a^{-\frac{1}{4}\vartheta_1}\right),$$

wobei

$$J(z, z') = \int_2^{\lambda}\int_2^{\lambda'} \frac{e^{2\pi i(uz + u'z')}}{\log(uu')}\, du\, du'$$

sei.

§ 6. Die Auswertung der Integrale und der Beweis des Hauptsatzes

Hilfssatz 13[10]**.** *Für alle reellen $u' \geqq 1$ und alle reellen z mit $|z| \leqq A^{-1/4}$ ist*

$$\int_2^{\lambda} \frac{e^{2\pi i u z}}{\log(uu')}\, du \ll \operatorname{Min}\left(\frac{\sqrt{A}}{a}, \frac{1}{a|z|}\right).$$

Beweis: Wir führen den Beweis in zwei Schritten.

1. $$\int_2^{\lambda} \frac{e^{2\pi i u z}}{\log(uu')}\, du \ll \int_2^{\lambda} \frac{du}{\log u} \ll \frac{\sqrt{A}}{a}.$$

2. $$\int_2^{\lambda} \frac{e^{2\pi i u z}}{\log(uu')}\, du = \int_2^{\sqrt{\lambda}} \frac{e^{2\pi i u z}}{\log(uu')}\, du + \int_{\sqrt{\lambda}}^{\lambda} \frac{e^{2\pi i u z}}{\log(uu')}\, du$$

$$\ll \int_2^{\sqrt{\lambda}} \frac{du}{\log u} + \left| \left[\frac{e^{2\pi i u z}}{2\pi i z \log(uu')}\right]_{\sqrt{\lambda}}^{\lambda} + \int_{\sqrt{\lambda}}^{\lambda} \frac{e^{2\pi i u z}\, du}{2\pi i u z \log^2(uu')} \right|$$

$$\ll \frac{A^{1/4}}{a} + \frac{1}{a|z|} + \frac{1}{|z|}\int_{\sqrt{\lambda}}^{\lambda} \frac{du}{u \log^2 u} \ll \frac{1}{a|z|} \quad \text{für} \quad |z| \leqq A^{-1/4}. \quad \text{q. e. d.}$$

Hilfssatz 14. *Sei*

$$L(z, z') = \int_2^{\lambda}\int_2^{\lambda'} \frac{e^{2\pi i(uz + u'z')}}{a}\, du\, du'.$$

Dann gelten folgende Abschätzungen:

$$L(z, z') \ll \operatorname{Min}\left(\frac{A}{a}, \frac{\sqrt{A}}{a|z|}, \frac{\sqrt{A}}{a|z'|}, \frac{1}{a|zz'|}\right) \tag{47}$$

für alle reellen z, z'.

$$J(z, z') \ll \operatorname{Min}\left(\frac{A}{a}, \frac{\sqrt{A}}{a|z|}, \frac{\sqrt{A}}{a|z'|}, \frac{1}{a|zz'|}\right) \tag{48}$$

für alle reellen z, z' mit $|z| \leqq A^{-3/8}$, $|z'| \leqq A^{-3/8}$.

---

[10]) Siehe Vinogradov [10], Seite 37.

Beweis: Die Abschätzung (47) ist trivial. (48) wird in zwei Schritten bewiesen.

1. $$J(z,z') \ll \int_2^{\lambda'} du' \left| \int_2^{\lambda} \frac{e^{2\pi i u z}}{\log(uu')}\, du \right| \ll \sqrt{A}\, \mathrm{Min}\left(\frac{\sqrt{A}}{a}, \frac{1}{a|z|}\right),$$

wie aus Hilfssatz 13 für $|z| \leqq A^{-1/4}$ folgt. Ebenso erhält man

$$J(z,z') \ll \mathrm{Min}\left(\frac{A}{a}, \frac{\sqrt{A}}{a|z'|}\right) \quad \text{für} \quad |z'| \leqq A^{-1/4}.$$

2.

$$J(z,z') \ll \left| \underset{\mathrm{Min}(u,u') \leqq A^{1/4}}{\int_2^{\lambda}\int_2^{\lambda'}} \right| + \left| \underset{\mathrm{Min}(u,u') > A^{1/4}}{\int_2^{\lambda}\int_2^{\lambda'}} \right| \ll \frac{A^{3/4}}{a} + \left| \int_{A^{1/4}}^{\lambda}\int_{A^{1/4}}^{\lambda'} \frac{e^{2\pi i(uz+u'z')}}{\log(uu')}\, du\, du' \right|$$

$$= \frac{A^{3/4}}{a} + \left| \int_{A^{1/4}}^{\lambda} du\, e^{2\pi i u z} \left(\left[\frac{e^{2\pi i u' z'}}{2\pi i z' \log(uu')} \right]_{A^{1/4}}^{\lambda'} + \int_{A^{1/4}}^{\lambda'} \frac{e^{2\pi i u' z'}\, du'}{2\pi i\, u' z' \log^2(uu')} \right) \right|$$

$$\ll \frac{A^{3/4}}{a} + \frac{1}{|z'|} \left| \int_{A^{1/4}}^{\lambda} \frac{e^{2\pi i u z}}{\log(u\lambda')}\, du \right| + \frac{1}{|z'|} \left| \int_{A^{1/4}}^{\lambda} \frac{e^{2\pi i u z}\, du}{\log(uA^{1/4})} \right| +$$

$$+ \left| \int_{A^{1/4}}^{\lambda}\int_{A^{1/4}}^{\lambda'} \frac{e^{2\pi i(uz+u'z')}\, du\, du'}{2\pi i u' z' \log^2(uu')} \right|$$

$$\ll \frac{A^{3/4}}{a} + \frac{1}{a|zz'|} + \left| \int_{A^{1/4}}^{\lambda'} \frac{e^{2\pi i u' z'}}{2\pi i u' z'}\, du' \left(\left[\frac{e^{2\pi i u z}}{2\pi i z \log^2(uu')} \right]_{A^{1/4}}^{\lambda} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2 \int_{A^{1/4}}^{\lambda} \frac{e^{2\pi i u z}\, du}{2\pi i u z \log^3(uu')} \right) \right|$$

$$\ll \frac{A^{3/4}}{a} + \frac{1}{a|zz'|} + \frac{1}{|zz'|} \int_{A^{1/4}}^{\lambda'} \frac{du'}{u' \log^2(Au')} + \frac{1}{|zz'|} \int_{A^{1/4}}^{\lambda}\int_{A^{1/4}}^{\lambda'} \frac{du\, du'}{uu' \log^3(uu')}$$

$$\ll \frac{A^{3/4}}{a} + \frac{1}{a|zz'|} \ll \frac{1}{a|zz'|} \quad \text{für} \quad |z| \leqq A^{-3/8},\ |z'| \leqq A^{-3/8}.$$

Hilfssatz 15. *Für natürliches $k \geqq 2$ und reelles $d > 0$ gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{e^{uv}}{v^k}\, dv = \begin{cases} \dfrac{u^{k-1}}{(k-1)!} & \textit{für} \quad u > 0 \\ 0 & \textit{für} \quad u \leqq 0. \end{cases}$$

Beweis: Die Behauptung ergibt sich durch direkte Anwendung des Residuensatzes.

Hilfssatz 16. *Für natürliches $k \geqq 2$ und reelles $u > 2k$ gilt*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{2\pi i v} - e^{-2\pi i v}}{2\pi i v} \right)^k e^{-2\pi i u v}\, dv = \frac{(u-2k)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Beweis: Verschiebt man den Integrationsweg von I parallel zu sich selbst um die Strecke 1 in die obere v-Halbebene, so ändert sich I wegen der Holomorphie des Integranden nach dem Cauchyschen Integralsatz nicht, da die Integrale über die im Unendlichen gelegenen vertikalen Wegstücke verschwinden. Also

$$I = \int_{-\infty+i}^{\infty+i} \left(\frac{e^{2\pi i(u-2)v} - 1}{2\pi i v}\right)^k e^{-2\pi i(u-2k)v}\, dv$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{2\pi - i\infty}^{2\pi + i\infty} \left(\frac{1 - e^{-(u-2)w}}{w}\right)^k e^{(u-2k)w}\, dw$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} \frac{1}{2\pi i} \int_{2\pi - i\infty}^{2\pi + i\infty} e^{((u-2k)-\nu(u-2))w} \frac{dw}{w^k} = \frac{(u-2k)^{k-1}}{(k-1)!},$$

wie durch Anwendung von Hilfssatz 15 auf die einzelnen Summanden folgt.

Mit den Bezeichnungen des § 5 folgt aus Satz 3:

$$T^r(\xi, \xi') = \frac{1}{(H \log \varepsilon)^r} \left(\frac{\mu(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})}\right)^r J^r(z, z') + O\left(A^r a^{-\frac{3}{4} r \theta_2} + \frac{A^{r-1}}{\varphi(\mathfrak{a})^{r-1}} A a^{-\frac{3}{4}\theta_2}\right)$$

$$= \frac{1}{(H \log \varepsilon)^r} \left(\frac{\mu(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})}\right)^r J^r(z, z') + O\left(\frac{A^r a^{-\frac{3}{4}\theta_2}}{\varphi(\mathfrak{a})^{r-1}}\right).$$

Die Integration über B_γ bei Benutzung von (42) und die nachfolgende Summation über alle γ aus Γ ergeben

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \iint_{B_\gamma} T^r(\xi, \xi')\, e^{-2\pi i S(\lambda \xi)}\, d\xi\, d\xi'$$

(49)
$$= \frac{1}{(H \log \varepsilon)^r} \sum_{\gamma \in \Gamma} \left(\frac{\mu(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})}\right)^r e^{-2\pi i S(\gamma \lambda)} R_\gamma(\lambda) + O\left(A^{r-1} a^{-\frac{\theta_2}{4}+1}\right),$$

wobei

$$R_\gamma(\lambda) = \iint_{F_\gamma} J^r(z, z')\, e^{-2\pi i(\lambda z + \lambda' z')}\, dz\, dz'$$

sei.

Hilfssatz 17. $$R_\gamma(\lambda) = \frac{A^{r-1}}{[(r-1)!]^2 a^r} + O\left(\frac{A^{r-1}}{a^{r+1}}\right).$$

Beweis: Es ist

$$|L(z, z') - J(z, z')| \leq \int_2^\lambda \int_2^{\lambda'} \left(\frac{1}{\log(u u')} - \frac{1}{a}\right) du\, du'.$$

Substituiert man im letzten Integral $u = x$, $u u' = y$, setzt

$$\Phi_1(y) = \mathrm{Max}\left(2, \frac{y}{\lambda'}\right), \quad \Phi_2(y) = \mathrm{Min}\left(\lambda, \frac{y}{2}\right)$$

und teilt den Integrationsweg bezüglich y in $4 \leq y \leq A^{3/4}$, $A^{3/4} \leq y \leq A$,

so erhält man

$$|L(z,z') - J(z,z')| \leqq \int\limits_{4}^{A^{3/4}} \left(\frac{1}{\log y} - \frac{1}{a}\right) \log \frac{\Phi_2(y)}{\Phi_1(y)}\, dy + \int\limits_{A^{3/4}}^{A} \left(\frac{1}{\log y} - \frac{1}{a}\right) \log \frac{\Phi_2(y)}{\Phi_1(y)}\, dy$$

$$\ll A^{3/4} + \int\limits_{A^{3/4}}^{A} \left(\frac{1}{\log y} - \frac{1}{a}\right) \log \frac{A}{y}\, dy \ll \frac{A}{a^2}.$$

Hieraus ergibt sich mit Hilfssatz 14 und (42):

$$\iint\limits_{F_\gamma} |L^r(z,z') - J^r(z,z')|\, dz\, dz' \ll \operatorname{Max}|L - J| \iint\limits_{F_\gamma} (|L|^{r-1} + |J|^{r-1})\, dz\, dz'$$

$$\ll \frac{A}{a^2}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{A}}}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{A}}} \frac{A^{r-1}}{a^{r-1}}\, dz\, dz' + \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{A}}} dz \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{A}}}^{(h t^{-1})^{-1}} \frac{\sqrt{A^{r-1}}\, dz'}{a^{r-1}(z')^{r-1}} + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{A}}}^{(h t^{-1})^{-1}} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{A}}}^{(h t^{-1})^{-1}} \frac{dz\, dz'}{a^{r-1}(zz')^{r-1}}\right) \tag{50}$$

$$\ll \frac{A^{r-1}}{a^{r+1}}$$

und mit (41):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} L^r(z,z')\, e^{-2\pi i(\lambda z + \lambda' z')}\, dz\, dz' - \iint\limits_{F_\gamma} L^r(z,z')\, e^{-2\pi i(\lambda z + \lambda' z')}\, dz\, dz'$$

$$\ll \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |L|^r\, dz\, dz' - \int\limits_{-(ht)^{-1}}^{(ht)^{-1}}\int\limits_{-(ht)^{-1}}^{(ht)^{-1}} |L|^r\, dz\, dz' \ll \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{A}}} dz \int\limits_{(ht)^{-1}}^{\infty} \frac{\sqrt{A}^{\,r}\, dz'}{a^r (z')^r} \tag{51}$$

$$+ \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{A}}}^{\infty}\int\limits_{(ht)^{-1}}^{\infty} \frac{dz\, dz'}{a^r (zz')^r} \ll \frac{\sqrt{A}^{\,r-1}(ht)^{r-1}}{a^r} = \frac{A^{r-1}}{a^{r+(r-1)\theta}} \ll \frac{A^{r-1}}{a^{r+1}}.$$

Aus (50) und (51) folgt

$$R_\gamma(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} L^r(z,z')\, e^{-2\pi i(\lambda z + \lambda' z')}\, dz\, dz' + O\left(\frac{A^{r-1}}{a^{r+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{a^r}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{2\pi i A z} - e^{2\pi i 4 z}}{2\pi i z}\right)^r e^{-2\pi i \lambda z}\, dz \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{2\pi i A' z'} - e^{2\pi i 4 z'}}{2\pi i z'}\right)^r e^{-2\pi i \lambda' z'}\, dz' +$$

$$+ O\left(\frac{A^{r-1}}{a^{r+1}}\right),$$

und hieraus ergibt sich mit Hilfssatz 16 die Behauptung des Hilfssatzes 17.

Um die zu unserem additiven Problem gehörige singuläre Reihe[11]):

$$\mathfrak{S}_r(\lambda) = \sum_{\gamma \bmod \mathfrak{D}^{-1}} \left(\frac{\mu(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})}\right)^r e^{-2\pi i S(\gamma\lambda)}$$

---

[11]) Siehe Rademacher [3], Seite 156, (4.83).

in (49) einzuführen, schätzen wir folgenden Ausdruck ab:

$$
(52)\qquad \frac{A^{r-1}}{[(r-1)!]^2 a^r} \sum_{\substack{\gamma \bmod \mathfrak{D}^{-1} \\ N\mathfrak{a} > t^2}} \left(\frac{\mu(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})}\right)^r e^{-2\pi i S(\gamma\lambda)}
$$

$$
\ll \frac{A^{r-1}}{a^r} \sum_{N\mathfrak{a} > t^2} \frac{1}{\varphi(\mathfrak{a})^{r-1}} \ll \frac{A^{r-1}}{a^r t} \ll \frac{A^{r-1}}{a^{r+1}}.
$$

Aus (49), Hilfssatz 17 und (52) folgt somit:

$$
\sum_{\gamma \in \Gamma} \iint\limits_{B_\gamma} T^r(\xi, \xi')\, e^{-2\pi i S(\lambda\xi)}\, d\xi\, d\xi'
$$

$$
(53)\qquad = \frac{1}{[(r-1)!]^2 (H \log \varepsilon)^r} \frac{A^{r-1}}{a^r} \mathfrak{S}_r(\lambda) + O\left(\frac{A^{r-1}}{a^{\frac{\theta_1}{4}-1}} + \frac{A^{r-1}}{a^{r+1}}\right).
$$

Zur Abschätzung des in (6) stehenden Restintegrals wenden wir Satz 2 an und erhalten

$$
(54)\qquad \iint\limits_{G} T^r(\xi, \xi') e^{-2\pi i S(\lambda\xi)} d\xi\, d\xi' \ll \sup_{(\xi, \xi') \in G} |T(\xi, \xi')|^{r-2} \iint\limits_{F} |T(\xi, \xi')|^2 d\xi\, d\xi'
$$

$$
\ll \frac{A^{r-2}}{a^{(r-2)(\theta-4)}} \cdot \frac{A}{a} = \frac{A^{r-1}}{a^{(\theta-4)(r-2)+1}}.
$$

Setzt man $\theta = r + 4$, gelangt man über (6), (53) und (54) unmittelbar zu Satz 1.

Literatur

[1] Hardy, G. H. and J. E. Littlewood: Some problems of "Partitio numerorum"; III: On the expression of a number as a sum of primes. Acta Math. 44, 1—70 (1923).

[2] Mitsui, T.: Generalized prime number theorem. Japanese J. Math. 26, 1—42 (1956).

[3] Rademacher, H.: Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper I: Über die Darstellung totalpositiver Zahlen als Summe von totalpositiven Primzahlen im reell-quadratischen Zahlkörper. Abhandl. math. Seminar hamburg. Univ. 3, 109—163 (1924).

[4] Rademacher, H.: Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper III: Über die Darstellung totalpositiver Zahlen als Summen von totalpositiven Primzahlen in einem beliebigen Zahlkörper. Math. Z. 27, 321—426 (1928).

[5] Schulz-Arenstorff, R.: Über die zweidimensionale Verteilung der Primzahlen reell-quadratischer Zahlkörper in Restklassen. J. reine angew. Math. 198, 204—220 (1957).

[6] Siegel, C. L.: Additive Theorie der Zahlkörper I. Math. Ann. 87, 1—35 (1922).

[7] Siegel, C. L.: Generalization of Waring's problem to algebraic number fields. Am. J. Math. 66, 122—136 (1944).

[8] Tatuzawa, T.: Additive prime number theory in an algebraic number field. J. Math. Soc. Japan 7, 409—423 (1955).

[9] Vinogradov, I.: Some theorems concerning the theory of primes. Rec. math. Moscou, N.s. 2, 179—194 (1937).

[10] Vinogradov, I.: The method of trigonometrical sums in the theory of numbers. London: Interscience publishers. O. J.

(Eingegangen am 24. März 1960)

ROELCKE, W.
Math. Annalen 141, 367—376 (1960)

Über die Verteilung der zweiten Zeilen der Matrizen gewisser Grenzkreisgruppen*

Von

WALTER ROELCKE in Münster (Westf.)

Das Bildungsgesetz der Matrizen einer Grenzkreisgruppe[1]) ist bekanntlich im allgemeinen schwer erfaßbar. Schon bei den Heckeschen[2]) Gruppen $G(\lambda)$, die ja mit der übersichtlichen Modulgruppe in geometrischer Hinsicht manches gemeinsam haben, herrscht Unkenntnis. Man wird daher gelegentlich einen Ersatz in anderen allgemeinen Aussagen über die Struktur der Grenzkreisgruppen suchen. Die folgende Untersuchung kann in diesem Sinne verstanden werden.

§ 1

Es sei Γ eine Grenzkreisgruppe erster Art im Sinne von [6], S. 57. Γ ist also eine diskrete Untergruppe der speziellen linearen Gruppe $\mathfrak{W} = SL(2; R)$, Γ enthält die negative Einheitsmatrix $-I$, und ein (Lebesguesch) meßbarer Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ von Γ in der oberen Halbebene hat einen endlichen hyperbolischen Inhalt $F > 0$. Γ möge parabolische Spitzen besitzen. $A \in \mathfrak{W}$ sei eine beliebige fest gewählte Matrix, so daß $A^{-1}\infty$ parabolische Spitze von Γ ist, und $B \in \mathfrak{W}$ sei beliebig gewählt. $\mathfrak{S}(A, \Gamma, B)$ bezeichne die Menge der zweiten Zeilen des Matrizenkomplexes $A\Gamma B$. Wir fassen diese zweiten Zeilen als Elemente des linearen Vektorraumes R^2 der Paare (u, v) reeller Zahlen u, v auf. Das Ziel dieser Arbeit ist es nun, die asymptotische Verteilung dieser Paare in Winkelräumen zu bestimmen. Es handelt sich also zunächst noch nicht um die zweiten Zeilen der Matrizen von Γ. Wir werden auf diesen Fall erst durch eine einfache Transformation zurückkommen. Dabei wird dann Γ selbst die Spitze ∞ besitzen.

Wir beziehen uns bei unserer Untersuchung auf eine positiv-definite quadratische Maßbestimmung im R^2. Mit einer gewissen zweireihigen reellen symmetrischen positiv-definiten Matrix Q, deren Determinante $|Q|$ wir aus Normierungsgründen gleich 1 voraussetzen, ist also für je zwei Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in R^2$ das Skalarprodukt

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_Q := \mathfrak{a} Q \mathfrak{b}'$$

($\mathfrak{b}'$ transponiert zu $\mathfrak{b}$) und

$$|\mathfrak{a}|_Q := (\mathfrak{a}, \mathfrak{a})_Q^{1/2}$$

---

* HANS MAASS zum 50. Geburtstag gewidmet.

[1]) Im Sinne von H. PETERSSON [6], S. 32.

[2]) Siehe E. HECKE [2], S. 672.

als die Länge von $\mathfrak{a}$ definiert. Wegen der Normierung $|Q| = 1$ ist das zu der Q-Maßbestimmung gehörige Flächenelement mit dem üblichen Flächenelement $du\,dv$ des R^2 identisch. Durch je zwei von 0 verschiedene Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in R^2$ ist in der Q-Maßbestimmung in bekannter Weise ein (orientierter) Winkel $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}_Q$ bis auf ganzrationale Vielfache von 2π eindeutig bestimmt. Fortan sei $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}_Q$ als Repräsentant seiner Restklasse mod 2π durch die Forderung

$$0 \leqq \{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}_Q < 2\pi$$

eindeutig festgelegt. $\frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|_Q}$ wird also durch eine Q-Drehung im positiven Sinne um den Winkel $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}_Q$ in $\frac{\mathfrak{b}}{|\mathfrak{b}|_Q}$ übergeführt, und es ist

$$\cos\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}_Q = \frac{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_Q}{|\mathfrak{a}|_Q |\mathfrak{b}|_Q}.$$

Ein Winkelraum $\mathfrak{R}$ in R^2 sei definiert als eine Menge von nicht verschwindenden Vektoren, so daß mit $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}$ stets auch $t\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}$ für alle $t > 0$ gilt. Wir nennen $\mathfrak{R}$ *zulässig*, wenn der Durchschnitt von $\mathfrak{R}$ mit der Eichkurve

$$\mathfrak{E}_Q := \{\mathfrak{a};\, \mathfrak{a} \in R^2,\, |\mathfrak{a}|_Q = 1\}$$

Riemann-meßbar ist hinsichtlich des eindimensionalen Riemannschen Maßes λ_Q in $\mathfrak{E}_Q$, das von dem Q-Linienelement in $\mathfrak{E}_Q$ geliefert wird. Dieser Zulässigkeitsbegriff hängt nicht von Q ab. Man bestätigt nämlich leicht, daß die Zulässigkeit von $\mathfrak{R}$ gleichwertig ist mit jeder der beiden folgenden Aussagen.

1. Der Rand von $\mathfrak{R}$ hat das Lebesguesche Maß 0;
2. Der Durchschnitt von $\mathfrak{R}$ mit jedem Kompaktum ist Riemann-meßbar.

Für zulässige Winkelräume $\mathfrak{R}$ definieren wir

$$\mu_Q(\mathfrak{R}) := \lambda_Q(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{E}_Q)$$

als die — Q-drehinvariante — Q-Öffnung von $\mathfrak{R}$. $\mu_Q(\mathfrak{R})$ ist auch gleich dem doppelten Flächeninhalt des von $\mathfrak{E}_Q$ umschlossenen Teiles von $\mathfrak{R}$. Für beliebiges $X \geqq 0$ sei $N(A, \Gamma, B, Q, \mathfrak{R}, X)$ die Anzahl der Elemente $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{G}(A, \Gamma, B) \cap \mathfrak{R}$ mit $|\mathfrak{a}|_Q \leqq X$, d. h. die Anzahl der verschiedenen zweiten Zeilen $\mathfrak{a}$ der Matrizen des Komplexes $A\Gamma B$ mit $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{a}Q\mathfrak{a}' \leqq X^2$.

Satz 1: *Für jeden zulässigen Winkelraum $\mathfrak{R}$ des R^2 gilt*

$$N(A, \Gamma, B, Q, \mathfrak{R}, X) \sim \frac{\mu_Q(\mathfrak{R})}{\pi F} \cdot X^2 \qquad \textit{für} \quad X \to \infty. \tag{1.1}$$

Im Falle $\mu_Q(\mathfrak{R}) = 0$ soll dies bedeuten

$$X^{-2} N(A, \Gamma, B, Q, \mathfrak{R}, X) \to 0 \qquad \textit{für} \quad X \to \infty.$$

Bemerkung: Einfache Beispiele zeigen, daß man das Riemannsche Maß λ_Q in der Definition der Zulässigkeit von Winkelräumen nicht durch das entsprechende Lebesguesche Maß in $\mathfrak{E}_Q$ ersetzen darf, wenn Satz 1 gelten soll. Ebensowenig genügt es, anstelle unserer Zulässigkeitsforderung zu verlangen, daß $\mathfrak{R}$ offen oder abgeschlossen ist (vgl. Fußnote 3).

Beweis des Satzes: Da Γ voraussetzungsgemäß die Spitze $A^{-1}\infty$ besitzt, so besitzt die Grenzkreisgruppe erster Art $A\Gamma A^{-1}$ die Spitze ∞. Daher gilt

$$\mathfrak{G}(A, \Gamma, B) = \mathfrak{G}(I, A\Gamma A^{-1}, AB)$$

und

(1.2) $$N(A, \Gamma, B, Q, \mathfrak{R}, X) = N(I, A\Gamma A^{-1}, AB, Q, \mathfrak{R}, X)$$

mit der alten Bedeutung der Symbole $\mathfrak{G}$, N. Zugleich mit $\mathfrak{R}$ ist

$$\mathfrak{R}B^{-1} := \{\mathfrak{a}B^{-1}; \mathfrak{a} \in \mathfrak{R}\}$$

ein zulässiger Winkelraum, und $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}$ ist gleichwertig mit $\mathfrak{a}B^{-1} \in \mathfrak{R}B^{-1}$. Für alle $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in R^2$ ist ferner

(1.3) $$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_Q = (\mathfrak{a}B^{-1}, \mathfrak{b}B^{-1})_{BQB'},$$

insbesondere also

$$|\mathfrak{a}|_Q = |\mathfrak{a}B^{-1}|_{BQB'}.$$

Aus diesen Angaben folgt

(1.4) $$N(A, \Gamma, B, Q, \mathfrak{R}, X) = N(A, \Gamma, I, BQB', \mathfrak{R}B^{-1}, X).$$

Aus (1.2) und (1.4) folgt

$$N(A, \Gamma, B, Q, \mathfrak{R}, X) = N(I, A\Gamma A^{-1}, I, (AB)\,Q(AB)', \mathfrak{R}(AB)^{-1}, X).$$

Beachtet man ferner, daß aus (1.3)

$$\mu_Q(\mathfrak{R}) = \mu_{(AB)\,Q(AB)'}(\mathfrak{R}(AB)^{-1})$$

folgt und daß meßbare Fundamentalbereiche von Γ und $A\Gamma A^{-1}$ denselben hyperbolischen Inhalt F haben, so braucht (1.1) nur noch im Falle $A = B = I$ bewiesen zu werden. In diesem Falle ist also ∞ parabolische Spitze von Γ, und es handelt sich um die asymptotische Verteilung der zweiten Zeilen von Γ. Diese Reduktion gibt eine Motivierung dafür, daß wir uns nicht auf den Fall der zu $Q = I$ gehörigen Maßbestimmung beschränkt haben. Eine weitere Motivierung liefert die Analysis des § 2.

Wir halten jetzt Γ, $A = B = I$ und Q fest und verzichten künftig auf die Angabe dieser Argumente, schreiben also z. B. $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, $\mathfrak{G}$, $N(\mathfrak{R}, X)$ anstelle von $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_Q$, $\mathfrak{G}(A, \Gamma, B)$ und $N(A, \Gamma, B, Q, \mathfrak{R}, X)$. Wir setzen

(1.5) $$\mathfrak{e} := (0, 1),$$

definieren $\mathfrak{e}' \in \mathfrak{E}$ durch $\{\mathfrak{e}, \mathfrak{e}'\} = \frac{\pi}{2}$ und erklären die Funktion $\chi_{\mathfrak{R}}$ der reellen Variablen φ mit der Periode 2π durch

$$\chi_{\mathfrak{R}}(\varphi) := \begin{cases} 1 & \text{für } \mathfrak{e}\cos\varphi + \mathfrak{e}'\sin\varphi \in \mathfrak{R} \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Dann ist

(1.6) $$N(\mathfrak{R}, X) = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{G} \cap \mathfrak{R} \\ |\mathfrak{a}| \le X}} 1 = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{G} \\ |\mathfrak{a}| \le X}} \chi_{\mathfrak{R}}(\{\mathfrak{e}, \mathfrak{a}\}).$$

Wie bei Verteilungsproblemen in Winkelräumen üblich (vgl. E. HECKE [1], sowie [9][3]) und [5]) wird jetzt die letzte Reihe als summatorische Funktion

[3]) An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß in [9], Satz 1, nebst Beweis die Voraussetzung, daß $\tilde{\mathfrak{G}}$ offen ist, durch die bei (53) benötigte Voraussetzung ersetzt werden muß, daß $\tilde{\mathfrak{G}}$ einen Rand vom Lebesgueschen Maß 0 hat. (Falls die abgeschlossene Hülle von $\tilde{\mathfrak{G}}$ kompakt ist, ist damit gleichwertig, daß $\tilde{\mathfrak{G}}$ Riemannsch meßbar ist.) — Von den fünf Eigenschaften der im Anschluß an (53) genannten Funktion $v_\varepsilon(\varrho)$ müssen die ersten drei abgeändert werden in

1. $v_\varepsilon(\varrho) \gtrless 0$, 2. $v_\varepsilon(\varrho) = 0$ für $\varrho \geq \varepsilon$, 3. $\int\limits_{\mathfrak{E}} v_\varepsilon(\varrho(\tau, \theta))\,\omega(\theta) = 1$.

der Dirichlet-Reihe
$$\sum_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{S}} \chi_{\mathfrak{R}}(\{\mathfrak{c}, \mathfrak{a}\})\, |\mathfrak{a}|^{-s}$$

aufgefaßt und durch die summatorischen Funktionen von endlichen Linearkombinationen der Reihen

$$D(s, n) := \sum_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{S}} e^{-in(\mathfrak{c},\mathfrak{a})} |\mathfrak{a}|^{-s} \qquad (n \text{ ganzrat.}) \tag{1.7}$$

von unten und oben her approximiert. Wir stützen uns dabei auf den folgenden Hilfssatz, den wir in § 2 beweisen werden.

Hilfssatz: *Die Reihen* $D(s, n)$ *aus* (1.7) *sind für* $\operatorname{Re} s > 2$ *absolutkonvergent. Es gibt ein* $\eta > 0$, *so daß*

$$D(s, n) - \frac{4\delta(n)}{F(s-2)} \quad \textit{mit} \quad \delta(n) := \begin{cases} 1 & \textit{für} \quad n = 0 \\ 0 & \textit{für} \quad n \neq 0 \end{cases}$$

als holomorphe Funktion in das Gebiet $\operatorname{Re} s > 2 - \eta$ *fortgesetzt werden kann.*

Da $\mathfrak{R}$ zulässig ist, ist $\chi_{\mathfrak{R}}$ Riemann-integrierbar. Daraus folgt z. B. auf Grund einer Konstruktion mit Hilfe von Treppenfunktionen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es endliche Linearkombinationen L_ε^-, L_ε^+ der Funktionen $e^{in\varphi}$ (n ganz) mit konstanten Koeffizienten, so daß gilt

$$0 < L_\varepsilon^- \leqq 1 + \chi_{\mathfrak{R}} \leqq L_\varepsilon^+ \tag{1.8}$$

sowie

$$\int_0^{2\pi} |1 + \chi_{\mathfrak{R}} - L_\varepsilon^\pm|\, d\varphi \leqq \varepsilon\pi F\,. \tag{1.9}$$

Wir benötigen ferner das folgende Theorem von Ikehara (s. [12], S. 127, Theorem 16).

Theorem: *Es sei* $\Lambda(u)$ *eine für* $u > 1$ *definierte monoton wachsende Funktion, und das Integral*

$$\psi(s) := \int_{1+0}^{\infty} u^{-s}\, d\Lambda(u)$$

möge für $\operatorname{Re} s > 1$ *konvergieren. Es gebe eine Konstante* $C > 0$, *so daß für jede Wahl der reellen Zahlen* α, β ($\alpha < \beta$) *der Limes*

$$\lim_{\sigma\to 1+0} \left(\psi(\sigma + it) - \frac{C}{\sigma + it - 1}\right)$$

gleichmäßig im Intervall $\alpha \leqq t \leqq \beta$ *existiert. Dann gilt die asymptotische Gleichung*

$$\Lambda(u) \sim Cu \quad \textit{für} \quad u \to \infty\,.$$

Wählt man nun

$$\Lambda(u) = \sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{S}\\ |\mathfrak{a}|^2 \leqq u}} L_\varepsilon^\pm(\{\mathfrak{c}, \mathfrak{a}\})\,,$$

so wird

$$\psi(s) = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{S} \\ |\mathfrak{a}| > 1}} L_\varepsilon^\pm(\{\mathfrak{e}, \mathfrak{a}\}) \, |\mathfrak{a}|^{-2s},$$

nach dem Hilfssatz ist

$$C = \frac{2}{F} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_\varepsilon^\pm \, d\varphi$$

zu setzen, und es folgt

$$\sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{S} \\ |\mathfrak{a}|^2 \leq u}} L_\varepsilon^\pm(\{\mathfrak{e}, \mathfrak{a}\}) \sim \frac{u}{\pi F} \int_0^{2\pi} L_\varepsilon^\pm \, d\varphi \quad \text{für} \quad u \to \infty \, .$$

Es gibt also ein $X_\varepsilon > 0$, so daß für $X \geq X_\varepsilon$ gilt

$$\left| \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{S} \\ |\mathfrak{a}| \leq X}} L_\varepsilon^\pm(\{\mathfrak{e}, \mathfrak{a}\}) - \frac{X^2}{\pi F} \int_0^{2\pi} L_\varepsilon^\pm \, d\varphi \right| < \varepsilon X^2 \, . \tag{1.10}$$

Mit Hilfe von (1.9) und (1.8) erhält man hieraus

$$\left| \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{S} \\ |\mathfrak{a}| \leq X}} [1 + \chi_\mathfrak{R}(\{\mathfrak{e}, \mathfrak{a}\})] - \frac{X^2}{\pi F} \int_0^{2\pi} (1 + \chi_\mathfrak{R}) \, d\varphi \right| \leq 2\varepsilon X^2 \quad \text{für} \quad X \geq X_\varepsilon \, .$$

Da hier $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben war, bedeutet das

$$\sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{S} \\ |\mathfrak{a}| \leq X}} [1 + \chi_\mathfrak{R}(\{\mathfrak{e}, \mathfrak{a}\})] \sim \frac{X^2}{\pi F} \int_0^{2\pi} (1 + \chi_\mathfrak{R}) \, d\varphi \, .$$

Subtrahiert man hiervon den zu $\mathfrak{R} = \emptyset$, d. h. $\chi_\mathfrak{R} = 0$ gehörigen Spezialfall dieser Formel, so erhält man mit Hilfe von (1.6) und wegen

$$\mu(\mathfrak{R}) = \int_0^{2\pi} \chi_\mathfrak{R} \, d\varphi$$

die Behauptung (1.1).

Aus Satz 1 folgt durch eine ähnliche Approximation wie eben

Satz 2: *Γ sei eine Grenzkreisgruppe erster Art mit der Spitze ∞, und $\mathfrak{S}$ die Menge der zweiten Zeilen von Matrizen aus Γ. $r(\varphi)$ sei eine reellwertige nichtnegative Funktion der reellen Variablen φ, $r(\varphi)$ besitze die Periode 2π und sei Riemann-integrierbar. Wir setzen dann*

$$\mathfrak{B} := \{t(\cos\varphi, \sin\varphi); \, t, \varphi \text{ reell}, \, 0 < t \leq r(\varphi)\} \, .$$

Für $X \geq 0$ sei

$$X\mathfrak{B} := \{X\mathfrak{a}; \, \mathfrak{a} \in \mathfrak{B}\}$$

und

$$N(\mathfrak{B}, X) := \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{S} \\ \mathfrak{a} \in X\mathfrak{B}}} 1 \, .$$

Dann gilt

$$N(\mathfrak{B}, X) \sim \frac{2\nu(\mathfrak{B})}{\pi F} X^2 ,$$

wobei

$$\nu(\mathfrak{B}) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2(\varphi)\, d\varphi$$

den Flächeninhalt des Bereiches $\mathfrak{B}$ *bezeichnet.*

Beweis: Für jede natürliche Zahl m und für $j = 1, 2, \ldots, m$ definieren wir

$$U_j^{(m)} := \inf \left\{ r^2(\varphi);\, \frac{j-1}{m} \leqq \frac{\varphi}{2\pi} < \frac{j}{m} \right\},$$

$$O_j^{(m)} := \sup \left\{ r^2(\varphi);\, \frac{j-1}{m} \leqq \frac{\varphi}{2\pi} < \frac{j}{m} \right\}.$$

Dann ist

$$\nu(\mathfrak{B}) = \lim_{m\to\infty} \frac{\pi}{m} \sum_{j=1}^{m} U_j^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{\pi}{m} \sum_{j=1}^{m} O_j^{(m)} .$$

Mit

$$\mathfrak{R}_j^{(m)} := \left\{ (t \cos\varphi, t \sin\varphi);\, t > 0, \frac{j-1}{m} \leqq \frac{\varphi}{2\pi} < \frac{j}{m} \right\}$$

und $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d. h. $\tau = i$ und $\mu(\mathfrak{R}_j^{(m)}) = \frac{2\pi}{m}$, ist ferner

$$\text{(1.11)} \quad \sum_{j=1}^{m} N\left(\mathfrak{R}_j^{(m)}, \sqrt{U_j^{(m)}}\, X\right) \leqq N(\mathfrak{B}, X) \leqq \sum_{j=1}^{m} N\left(\mathfrak{R}_j^{(m)}, \sqrt{O_j^{(m)}}\, X\right).$$

Es sei jetzt $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen dann die natürliche Zahl m, so daß gilt

$$\text{(1.12)} \quad \frac{\pi}{m} \sum_{j=1}^{m} U_j^{(m)} \geqq \nu(\mathfrak{B}) - \varepsilon\pi F ,$$

$$\text{(1.13)} \quad \frac{\pi}{m} \sum_{j=1}^{m} O_j^{(m)} \leqq \nu(\mathfrak{B}) + \varepsilon\pi F .$$

Zu diesem Paar ε, m gibt es gemäß (1.1) ein X_0, so daß für $1 \leqq j \leqq m$ und alle $X \geqq X_0$ gilt

$$N\left(\mathfrak{R}_j^{(m)}, \sqrt{U_j^{(m)}}\, X\right) \geqq \frac{2}{mF} U_j^{(m)} X^2 - \frac{\varepsilon}{m} X^2 ,$$

$$N\left(\mathfrak{R}_j^{(m)}, \sqrt{O_j^{(m)}}\, X\right) \leqq \frac{2}{mF} O_j^{(m)} X^2 + \frac{\varepsilon}{m} X^2 .$$

Hiermit folgt aus (1.11)

$$\frac{2}{mF} \sum_{j=1}^{m} U_j^{(m)} X^2 - \varepsilon X^2 \leqq N(\mathfrak{B}, X) \leqq \frac{2}{mF} \sum_{j=1}^{m} O_j^{(m)} X^2 + \varepsilon X^2 ,$$

und mit Hilfe von (1.12) und (1.13)

$$\left| N(\mathfrak{B}, X) - \frac{2}{\pi F} \nu(\mathfrak{B}) X^2 \right| \leqq 3\varepsilon X^2 \quad \text{für} \quad X \geqq X_0 .$$

Daraus folgt die Behauptung.

Auf Grund des Zusammenhanges zwischen der Öffnung $\mu(\mathfrak{R})$ eines Winkelraumes $\mathfrak{R}$ und dem Flächeninhalt des durch $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{E}$ bestimmten Sektors (S. 368) folgt Satz 1 übrigens sofort wieder aus Satz 2.

Wir beschließen diesen Paragraphen mit einigen Bemerkungen zu dem Fall, daß Γ die Spitze ∞ hat.

I. Satz 2 gestattet insbesondere, anstelle der asymptotischen Verteilung der zweiten Zeilen (c, d) der Matrizen $S \in \Gamma$ die Verteilung der Vektoren $(\varepsilon_1 c, \varepsilon_2 d)$ für jede mögliche feste Wahl der Zahlen $\varepsilon_\nu = \pm 1$ $(\nu = 1, 2)$ anzugeben, und Entsprechendes gilt für die Verteilung der Vektoren $(\varepsilon_1 d, \varepsilon_2 c)$.

II. Wegen

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

und wegen I. haben wir mit der Verteilung der zweiten Zeilen von Γ zugleich die der ersten Spalten ermittelt.

III. Falls Γ die Matrix

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

enthält, ist $J\Gamma J^{-1} = \Gamma$. Wegen

$$JSJ^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad JS^{-1}J^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

und wegen I. kennt man dann mit der Verteilung der zweiten Zeilen von Γ auch die der ersten Zeilen und der zweiten Spalten.

§ 2. Beweis des Hilfssatzes aus § 1

Wir benutzen für die Matrix Q, die unserer Metrik in R^2 zugrunde liegt, die Parameterdarstellung

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{x^2 + y^2}{y} & \frac{x}{y} \\ \frac{x}{y} & \frac{1}{y} \end{pmatrix} = TT' \quad \text{mit} \quad T = \frac{1}{\sqrt{y}} \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\tau = x + iy$ ist also ein Punkt der oberen Halbebene. Es handelt sich hierbei bekanntlich um eine umkehrbar-eindeutige Zuordnung zwischen den zulässigen Matrizen Q und den Punkten der oberen Halbebene. Für $\mathfrak{a} = (c, d) \in R^2$ findet man

$$|\mathfrak{a}|^2 = (\mathfrak{a}\,T)(\mathfrak{a}\,T)' = \frac{|c\tau + d|^2}{y}. \tag{2.1}$$

Ferner findet man für $\mathfrak{a} = (c, d) \neq (0, 0)$ und mit $\mathfrak{e}$ aus (1.5)

$$\cos\{\mathfrak{e}, \mathfrak{a}\} = \frac{(\mathfrak{e}, \mathfrak{a})}{|\mathfrak{e}| \cdot |\mathfrak{a}|} = \frac{cx + d}{|c\tau + d|} = \cos(\arg(c\tau + d)).$$

Hieraus folgt

$$\{\mathfrak{e}, \mathfrak{a}\} = \varepsilon \arg(c\tau + d) \pmod{2\pi}, \tag{2.2}$$

wobei für ε zunächst die Werte ± 1 in Frage kommen, und ε zunächst noch von τ und $\mathfrak{a}$ abhängen kann. Für die Vektoren $\mathfrak{a} = \pm(1, 0)$ gilt aber (2.2)

offenbar mit $\varepsilon = -1$. Aus Stetigkeitsgründen gilt daher (2.2) allgemein mit $\varepsilon = -1$. Hiermit und unter Beachtung von (2.1) erhält man aus (1.7)

$$D(s, n) = \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{S}} \frac{y^{s/2}}{|c\tau + d|^s} \left(\frac{c\tau + d}{|c\tau + d|}\right)^n =: E\left(\tau, s; \frac{n}{2}\right).$$

Reihen von diesem Typ sind in H. Maass [3], [4] als Wellenformen eingeführt worden. Sie konvergieren absolut für $\operatorname{Re} s > 2$ (s. [7]). Da $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{a}$ zugleich $-\mathfrak{a}$ enthält, gilt $E(\tau, s; n) = 0$ für $n \equiv 1 \pmod 2$, wie auch schon aus (1.7) ersichtlich. Der Hilfssatz braucht daher nur noch für $n = 2m$, m ganz, bewiesen zu werden. Von dem Transformationsverhalten bei den Substitutionen $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$, nämlich

$$E(\tau, s; m) = \left(\frac{\gamma\tau + \delta}{\gamma\bar{\tau} + \delta}\right)^m \cdot E(M\tau, s; m),$$

wird dabei kein Gebrauch gemacht werden. Das im Hilfssatz behauptete analytische Verhalten von $E(\tau, s; m)$ (m ganz) ist zuerst von A. Selberg bewiesen worden. Wir stützen uns zu seinem Nachweis auf die von Selberg unabhängige Arbeit [8]. Gemäß [8], Satz 1 ist die Aussage des Hilfssatzes für $m = 0$ richtig. Der Fall $m \neq 0$ kann auf den Fall $m = 0$ zurückgeführt werden. Es gilt nämlich, wie aus Maass [4] zu entnehmen, für $\operatorname{Re} s > 2$ und alle ganzen m

$$\left(\frac{s}{2} - m\right) E(\tau, s; m - 1) = -m E(\tau, s; m) + y\left(i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) E(\tau, s; m),$$

$$\left(\frac{s}{2} + m\right) E(\tau, s; m + 1) = m E(\tau, s; m) + y\left(-i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) E(\tau, s; m).$$

Aus diesen Gleichungen folgt für natürliche Zahlen m und $\operatorname{Re} s > 2$

$$E(\tau, s; -m) \prod_{\nu=0}^{m-1} \left(\frac{s}{2} + \nu\right) = \left\{\prod_{\nu=0}^{m-1} \left[\nu + y\left(i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\right\} E(\tau, s),$$

$$E(\tau, s; m) \prod_{\nu=0}^{m-1} \left(\frac{s}{2} + \nu\right) = \left\{\prod_{\nu=0}^{m-1} \left[\nu + y\left(-i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\right\} E(\tau, s),$$

mit $E(\tau, s) := E(\tau, s; 0)$. Der Hilfssatz wird daher bewiesen sein, wenn wir zeigen: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß für die Funktion

$$\dot{E}(\tau, s) := E(\tau, s) - \frac{4}{F(s - 2)} \tag{2.3}$$

die folgende Aussage (A) zutrifft.

(A) Für $\operatorname{Re} s > 2 - \varepsilon$ existieren die sämtlichen partiellen Ableitungen nach x, y ($-\infty < x < \infty$, $y > 0$; $\tau = x + iy$). In Abhängigkeit von s sind diese Ableitungen im Gebiet $\operatorname{Re} s > 2 - \varepsilon$ holomorph.

Der Beweis von (A) besteht in einer Ausgestaltung von [8]. Dazu folgende Hinweise. Es sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß $s = 2$ der einzige Pol der fortgesetzten Reihe $E(\tau, s)$ in $\operatorname{Re} s > 2 - \varepsilon$ ist. Das ist nach [8], Satz 1 möglich. Gemäß [8], Satz 1 ist dann $\dot{E}(\tau, s)$ in $\operatorname{Re} s > 2 - \varepsilon$ holomorph. Ferner kann die zur Definition von $\Phi(\tau, s)$ in [8], (8) dienende Hilfsfunktion $q(y)$ über das dort Gesagte

hinaus beliebig oft differenzierbar gewählt werden. Dann besitzt $\Phi(\tau, s)$ in Abhängigkeit von s holomorphe partielle Ableitungen beliebig hoher Ordnungen nach x, y. Dasselbe gilt dann auch für die in [8], (9) definierte und in (16) eingehende Funktion $\Psi(\tau; \lambda)$, mit $\lambda = \frac{s(2-s)}{4}$. Wegen [8], (10) genügt es daher, die Aussage (A) für die Funktion

$$\dot{E}(\tau, s) - \Phi(\tau, s) = u(\tau, s) - \frac{4}{F(s-2)}$$

anstelle von $\dot{E}(\tau, s)$ zu zeigen. Das erste Glied der rechten Seite von [8], (16) ist von τ unabhängig und fällt daher bei der Bildung der partiellen Ableitungen nach x, y fort. Es bleibt daher zu zeigen, daß das zweite Glied

$$G(I - \lambda G)^{-1} \Psi(\tau; \lambda) \tag{2.4}$$

in [8], (16) die Eigenschaft (A) besitzt. Für den Fall der partiellen Ableitungen j-ter Ordnung (j beliebige natürliche Zahl) zerlegt man

$$G(I - \lambda G)^{-1} \Psi = (G + \lambda G^2 + \cdots + \lambda^{j-1} G^j) \Psi + \lambda^j G^{j+1} (I - \lambda G)^{-1} \Psi .$$

Die Glieder auf der rechten Seite können einzeln auf der Basis von [9], § 3—4, insbesondere S. 32—34 diskutiert werden. Bei dem letzten Glied der rechten Seite benutzt man, daß G^{j+1} ein Integraloperator ist, dessen Kern aus dem zu G gehörigen Kern, der Greenschen Funktion $G(\tau, \tau')$, durch j-malige Faltung entsteht und daher j-mal stetig differenzierbar nach x, y ist. Für den Nachweis der Holomorphie der Ableitungen des letzten Gliedes verwendet man die bei [8], (17) ausgeführte Schlußweise. Diese Andeutungen mögen zur Begründung der Aussage (A) für die Funktion (2.4) genügen.

Es sei noch bemerkt, daß man auf die skizzierte Weise auch die τ, s-Stetigkeit der Funktion $\dot{E}(\tau, s)$ und ihrer sämtlichen partiellen Ableitungen in $\operatorname{Re} s > 2 - \varepsilon$ beweisen kann. — Die Aussage (A) fände eine ganz unmittelbare Begründung, wenn die folgende, die Funktionentheorie mehrerer komplexer Variablen betreffende, Frage positiv beantwortet werden könnte.

Problem: Es sei U ein Gebiet im R^m, V ein Gebiet im R^n. f sei eine auf $U \times V$ definierte Funktion, so daß $f(u, v)$ für jedes feste $u \in U$ in Abhängigkeit von $v \in V$ holomorph ist. Schließlich gebe es ein Teilgebiet $V_0 \subset V$, so daß die Einschränkung $f | U \times V_0$ reell-analytisch in (u, Re v, Im v) ist. Ist dann $f | U \times V$ ebenfalls reell-analytisch ?

Zusatz bei der Korrektur: Wie aus W. Rothstein [11], S. 101 zu entnehmen, ist diese Frage positiv zu beantworten.

Literatur

[1] Hecke, E.: Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen, 1. Mitt. Math. Z. 1, 357—376 (1918); 2. Mitt. Math. Z. 6, 11—51 (1920).

[2] Hecke, E.: Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung. Math. Ann. 112, 664—699 (1936).

[3] Maass, H.: Automorphe Funktionen und indefinite quadratische Formen. Sitz.ber. heidelberg. Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl. 1949, 1. Abh.

[4] Maass, H.: Die Differentialgleichungen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Math. Ann. 125, 235—263 (1953).
[5] Maass, H.: Über die Verteilung der zweidimensionalen Untergitter in einem euklidischen Gitter. Math. Ann. 137, 319—327 (1959).
[6] Petersson, H.: Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen, Teil I. Math. Ann. 115, 23—67 (1938).
[7] Petersson, H.: Über den Bereich der absoluten Konvergenz der Poincaréschen Reihen. Acta Math. 80, 23—63 (1948).
[8] Roelcke, W.: Analytische Fortsetzung der Eisenstein-Reihen zu den parabolischen Spitzen von Grenzkreisgruppen erster Art. Math. Ann. 132, 121—129 (1956).
[9] Roelcke, W.: Über die Verteilung der Klassen eigentlich assoziierter zweireihiger Matrizen, die sich durch eine positive-definite Matrix darstellen lassen. Math. Ann. 131, 260—277 (1956).
[10] Roelcke, W.: Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster Art. Sitz.ber. heidelberg. Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl. 1956, 4. Abh.
[11] Rothstein, W.: Über die Fortsetzbarkeit regulärer und meromorpher Funktionen von zwei Veränderlichen und den Hauptsatz von Hartogs. Math. Nachr. 3, 95—101 (1949/50).
[12] Wiener, N.: The Fourier integral and certain of its applications. Cambridge 1933.

(Eingegangen am 4. April 1960)

RIEGER, G. J.
Math. Annalen 141, 377—383 (1960)

Dedekindsche Summen in algebraischen Zahlkörpern*

Von

G. J. RIEGER in College Park, Maryland

Das Ziel dieser Note ist es, die für den Körper P der rationalen Zahlen geläufigen Begriffe „*erste Bernoullische Funktion*" und „*Dedekindsche Summe*" für beliebige algebraische Zahlkörper einzuführen.

§ 1. Es bezeichne θ_0 eine beliebige über P algebraische Zahl, die der irreduziblen Gleichung

$$g_0 x^n + g_1 x^{n-1} + \cdots + g_n = 0$$

mit teilerfremden Koeffizienten aus dem Ring Γ der ganzrationalen Zahlen genügen möge ($g_0 > 0$); dann ist $g_0\theta_0 \doteq \theta$ ganzalgebraisch[1]) und $P(\theta_0) = P(\theta) \doteq K$; die Diskriminante D von θ ist $\neq 0$. Der Ring $\mathfrak{o}$ der ganzen Zahlen von K ist in

$$\{\alpha \mid \alpha = \frac{1}{D}(a_1 + a_2\theta + \cdots + a_n\theta^{n-1});\ a_1 \in \Gamma, \ldots, a_n \in \Gamma\}$$

enthalten. $\{a_n \mid \alpha \in \mathfrak{o}\}$ ist ein die Zahl D enthaltendes Hauptideal in Γ, erzeugt etwa durch $b_{nn} > 0$; ω_n sei eine willkürlich gewählte Zahl aus $\mathfrak{o}$ der Gestalt

$$\omega_n = \frac{1}{D}(b_{n1} + b_{n2}\theta + \cdots + b_{nn}\theta^{n-1}).$$

$\{a_{n-1} \mid \alpha \in \mathfrak{o}, a_n = 0\}$ ist ein die Zahl D enthaltendes Hauptideal in Γ, erzeugt etwa durch $b_{n-1,n-1} > 0$; ω_{n-1} sei eine willkürlich gewählte Zahl aus Γ der Gestalt

$$\omega_{n-1} = \frac{1}{D}(b_{n-1,1} + b_{n-1,2}\theta + \cdots + b_{n-1,n-1}\theta^{n-2}).$$

Fahren wir in dieser Weise fort, so gelangen wir zu

$$\omega_2 = \frac{1}{D}(b_{21} + b_{22}\theta)$$

und schließlich zu

$$\omega_1 = \frac{1}{D} b_{11} = 1.$$

$\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ ist eine (nicht eindeutig festgelegte) (Ganzheits-) Basis von K. Subtrahieren wir von ω_k ein geeignetes Vielfaches von $\omega_{k-1}, \ldots, \omega_1$[2]), so läßt sich zu ω_k genau eine Zahl

$$\omega_k^* = \frac{1}{D}(a_{k1} + a_{k2}\theta + \cdots + a_{kk}\theta^{k-1}) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

* Mein Dank gilt der Universität von Maryland (General Research Board) für finanzielle Unterstützung.

[1]) $\doteq$ bedeutet = per definitionem.

[2]) Also $\omega_1^* = \omega_1$.

finden mit

$$a_{kk} = b_{kk} > 0 \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

$$a_{jk} \in \Gamma \qquad \begin{pmatrix} k = 1, \ldots, n \\ j = k, \ldots, n \end{pmatrix},$$

$$0 \leqq a_{jk} < a_{kk} \qquad \begin{pmatrix} k = 1, \ldots, n-1 \\ j = k+1, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Wir haben damit

Hilfssatz 1. *$\{\omega_1^*, \omega_2^*, \ldots, \omega_n^*\}$ ist eine durch θ_0 eindeutig bestimmte Basis von K.*

Wir nennen sie die *absolute Basis* von K.

Ersetzen wir $\mathfrak{o}$ durch ein beliebiges ganzes Ideal $\mathfrak{c}$ aus K, erhalten wir auf wörtlich demselben Wege die absolute Basis $\{\gamma_1^*, \ldots, \gamma_n^*\}$ von $\mathfrak{c}$; ist $\mathfrak{c}$ gebrochen, so bestimmen wir die kleinste natürliche c derart, daß $c\mathfrak{c}$ ganz ist; ist dann $\{\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*\}$ die absolute Basis von $c\mathfrak{c}$, so nennen wir die Basis $\left\{\frac{\alpha_1^*}{c}, \ldots, \frac{\alpha_n^*}{c}\right\}$ von $\mathfrak{c}$ die absolute Basis von $\mathfrak{c}$; $\frac{\alpha_k^*}{c} \doteq \gamma_k^*$ $(k = 1, \ldots, n)$. Wir haben damit

Hilfssatz 2. *Die Basis $\{\gamma_1^*, \ldots, \gamma_n^*\}$ des ganzen oder gebrochenen Ideals $\mathfrak{c}$ ist durch θ_0 und $\mathfrak{c}$ eindeutig bestimmt.*

Wegen

$$\alpha \equiv \alpha + \omega_k^* N\mathfrak{c} \mod \mathfrak{c} \qquad (k = 1, \ldots, n)^{3)}$$

ist unter den $N\mathfrak{c}^n$ Zahlen

$$\alpha = x_1\omega_1^* + \cdots + x_n\omega_n^* \qquad (0 < x_k \leqq N\mathfrak{c})$$

ein vollständiges Restsystem mod $\mathfrak{c}$ enthalten; repräsentieren wir jede Restklasse mod $\mathfrak{c}$ durch ihre „kleinste" im Sinne von „lexikographisch früheste" unter diesen Zahlen α vorkommende Zahl, entsteht das durch θ_0 und $\mathfrak{c}$ eindeutig bestimmte *absolute Restsystem* mod $\mathfrak{c}$.

§ 2. Nun sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges ganzes Ideal, dessen Klasse wir $\mathfrak{K}$ nennen. Das in $\mathfrak{K}^{-1}$ gelegene Ideal $\mathfrak{a}^{h-1} \doteq \mathfrak{u}$[4]) habe mit dem beliebig gewählten Ideal $\mathfrak{c}$ genau die verschiedenen Primteiler $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ gemein; dann ist

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{p}_1^{u_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{u_k}\mathfrak{u}',$$

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{p}_1^{c_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{c_k}\mathfrak{c}',$$

$$(\mathfrak{u}', \mathfrak{c}) = (\mathfrak{u}, \mathfrak{c}') = \mathfrak{o}.$$

Das System

$$\xi \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\, \mathfrak{p}_j,$$

$$\xi \not\equiv 0 \quad \mathrm{mod}\, \mathfrak{p}_j^2,$$

$$\xi \equiv 1 \quad \mathrm{mod}\, \mathfrak{c}\mathfrak{p}_j^{-c_j}$$

denken wir uns durch die „kleinste" in der lösenden Restklasse gelegene Zahl π_j

[3]) $N\mathfrak{c}$ bedeutet Norm von $\mathfrak{c}$.

[4]) h ist die Klassenzahl von K.

gelöst ($j = 1, \ldots, k$). Wir setzen

$$\mathfrak{u}' \left(\frac{\mathfrak{p}_1}{\pi_1}\right)^{u_1} \cdots \left(\frac{\mathfrak{p}_k}{\pi_k}\right)^{u_k} \doteq \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}}, \qquad (\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = \mathfrak{o}.$$

$\mathfrak{m}\mathfrak{n}^{h-1} \doteq \mathfrak{a}^*$ liegt in $\mathfrak{K}^{-1}$ und erfüllt $(\mathfrak{a}^*, \mathfrak{c}) = \mathfrak{o}$. Wir haben also

Hilfssatz 3. *Nach Vorgabe des ganzen Ideals $\mathfrak{c}$ läßt sich zu jedem ganzen Ideal $\mathfrak{a}$ aus der Idealklasse $\mathfrak{K}$ ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}^*$ aus $\mathfrak{K}^{-1}$ mit $(\mathfrak{a}^*, \mathfrak{c}) = \mathfrak{o}$ eindeutig zuordnen.*

Wir nennen $\mathfrak{a}^*$ den *$\mathfrak{c}$-Partner* von $\mathfrak{a}$.

Für beliebige ganze Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sei jetzt $\mathfrak{a}^*$ der $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$-Partner von $\mathfrak{a}$; es ist $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^* = \langle\mu\rangle$[5]; in der Schar der zu μ assoziierten Zahlen sei μ^* die „kleinste". Auch das System

$$\sigma \equiv 1 \mod \mathfrak{a}\mathfrak{b},$$
$$\sigma \equiv 0 \mod \mathfrak{a}^*$$

denken wir uns durch die „kleinste" Zahl σ^* gelöst. Durchläuft ξ_j ($j = 1, \ldots, k$) ein vollständiges (ansonsten beliebiges) Restsystem von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, so durchläuft auch $\sigma^* \xi_j$ ein vollständiges Restsystem von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, wobei die Reihenfolge der Restklassen eingehalten wird. Die Zahlen

$$\frac{\sigma^* \xi_j}{\mu^*} \doteq \eta_j$$

sind ganz und bilden ein vollständiges Restsystem von $\mathfrak{o}$ nach $\mathfrak{b}$; es ist $k = N\mathfrak{b}$ und

$$\left(\frac{\xi_j}{\mathfrak{a}}, \mathfrak{b}\right) = (\eta_j, \mathfrak{b}). \tag{1}$$

Bezeichnen wir noch die Restklassengruppe von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a} - \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, so haben wir

Hilfssatz 4. *Jedem geordneten Paar von ganzen Idealen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ aus K läßt sich in eindeutiger Weise eine Abbildung zuordnen, die $\mathfrak{a} - \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ (bezüglich der Addition) isomorph auf $\mathfrak{o} - \mathfrak{b}$ abbildet.*

Diese Abbildung heiße der *kanonische Isomorphismus* von $\mathfrak{a} - \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{o} - \mathfrak{b}$.

Schließlich sei $\mathfrak{g} \doteq \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}}$ mit $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{o}$ und außerdem $\mathfrak{b}$ ein beliebiges ganzes Ideal. Durchläuft ζ_j ($j = 1, \ldots, k$) ein vollständiges Restsystem von $\mathfrak{g}$ nach $\mathfrak{g}\mathfrak{b}$, so durchläuft $c\zeta_j \doteq \xi_j$, wenn c die kleinste natürliche Zahl in $\mathfrak{n}$ bedeutet, ein vollständiges Restsystem von $\langle c\rangle\mathfrak{g}$ nach $\langle c\rangle\mathfrak{g}\mathfrak{b}$. Mit $\langle c\rangle\mathfrak{g} \doteq \mathfrak{a}$ folgt aus Hilfssatz 4 allgemeiner

Satz 1. *Jedem geordneten Paar aus einem ganzen oder gebrochenen Ideal $\mathfrak{g}$ und einem ganzen Ideal $\mathfrak{b}$ läßt sich in eindeutiger Weise eine Abbildung zuordnen, die $\mathfrak{g} - \mathfrak{g}\mathfrak{b}$ isomorph auf $\mathfrak{o} - \mathfrak{b}$ abbildet.*

Auch dieser Isomorphismus heiße kanonisch. Nennen wir eine Restklasse von $\mathfrak{g}$ nach $\mathfrak{g}\mathfrak{b}$, die mit $\mathfrak{g}\mathfrak{b}$ den Teiler $\mathfrak{g}\mathfrak{f}$ gemein hat, vom Teiler $\mathfrak{f}$ und im Falle $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$ prim, so folgt wegen

$$\left(\frac{\zeta_j}{\mathfrak{g}}, \mathfrak{b}\right) = \left(\frac{\xi_j}{\mathfrak{a}}, \mathfrak{b}\right)$$

und wegen (1) sofort

[5] $\langle\mu\rangle$ bedeutet das von μ erzeugte Hauptideal.

Hilfssatz 5. *Beim kanonischen Isomorphismus von $\mathfrak{g} - \mathfrak{g}\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{o} - \mathfrak{b}$ werden die Restklassen vom Teiler $\mathfrak{f}$ auf die Restklassen vom Teiler $\mathfrak{f}$ abgebildet.*

Wählt man in der Herleitung von Satz 1 anstelle von $\mathfrak{a}^*$ ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}'$ mit $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathfrak{o}$ aus der Klasse von $\mathfrak{a}^*$, so erhält man ebenfalls einen Isomorphismus von $\mathfrak{a} - \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{o} - \mathfrak{b}$, und zwar geht dieser aus dem kanonischen durch Multiplikation mit einer zu $\mathfrak{b}$ teilerfremden Zahl hervor. Denn: es ist $\mathfrak{a}\mathfrak{a}' = \langle \mu' \rangle$; die „kleinste" Lösung des Systems

$$\sigma \equiv 1 \mod \mathfrak{a}\mathfrak{b}\,,$$

$$\sigma \equiv 0 \mod \mathfrak{a}'$$

bezeichnen wir mit σ'; durchläuft ξ_j ein vollständiges Restsystem von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, so durchläuft

$$\frac{\sigma' \xi_j}{\mu'} \doteq \eta_j'$$

ein vollständiges Restsystem von $\mathfrak{o}$ nach $\mathfrak{b}$, und zwar additionsisomorph; dann ist

$$\sigma' \mu^* \eta_j = \sigma^* \mu' \eta_j'\,,$$

$$\left(\frac{\sigma' \mu^*}{\sigma^* \mu'}, \mathfrak{b}\right) = \mathfrak{o}\,,$$

was zu zeigen war.

§ 3. Für ein beliebiges ganzes Ideal $\mathfrak{b}$ sei $\mathfrak{S}(\mathfrak{b}) \doteq \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}} - \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{d}}$, wo $\mathfrak{d}$ das Grundideal von K bedeutet; die durch die Zahl σ aus $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}$ vertretene Klasse mod $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{d}}$ bezeichnen wir mit $\bar{\sigma}$. Aus $\sigma \equiv \sigma'$ mod $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{d}}$ folgt $S(\sigma) \equiv S(\sigma')$ mod 1*); vermöge

$$S(\bar{\sigma}) \equiv S(\sigma) \mod 1\,,$$

$$0 < S(\bar{\sigma}) \leq 1$$

wird jedem Element $\bar{\sigma}$ von $\mathfrak{S}(\mathfrak{b})$ eine rationale Zahl $S(\bar{\sigma})$ eindeutig zugeordnet; diese Zuordnung ist ein Homomorphismus von $\mathfrak{S}(\mathfrak{b})$ in die Menge der Restklassen mod 1. $\mathfrak{U}(\mathfrak{b}) \doteq \{\bar{\sigma} \in \mathfrak{S}(\mathfrak{b}) \mid S(\bar{\sigma}) = 1\}$ ist eine Untergruppe von $\mathfrak{S}(\mathfrak{b})$ der Ordnung $u(\mathfrak{b})$ etwa. Die kleinste Zahl in $\{S(\bar{\sigma}) \mid \bar{\sigma} \in \mathfrak{S}(\mathfrak{b})\}$ ist notwendig der Kehrwert einer durch $\mathfrak{b}$ eindeutig bestimmten natürlichen Zahl $h(\mathfrak{b})$;

$$u(\mathfrak{b})\, h(\mathfrak{b}) = N\mathfrak{b}\,. \tag{2}$$

Für $h(\mathfrak{b}) = N\mathfrak{b}$ ist der erwähnte Homomorphismus ein Isomorphismus; dann ist $\mathfrak{S}(\mathfrak{b})$ und wegen Satz 1 auch $\mathfrak{o} - \mathfrak{b}$ zyklisch, was für $K \neq P$ nicht allgemein gilt.

Die $u(\mathfrak{b})$ Klassen $\bar{\sigma}$ mit $S(\bar{\sigma}) = 1/h(\mathfrak{b})$ bezeichnen wir mit $\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_{u(\mathfrak{b})}$;

$$S(\bar{\sigma}_j) = 1/h(\mathfrak{b}) \qquad (j = 1, \ldots, u(\mathfrak{b}))\,. \tag{3}$$

---

*) $S(\sigma)$ bedeutet Spur von σ.

Die Mengen $\mathfrak{U}_k(\mathfrak{b}) \doteq \{\bar{\sigma} \in \mathfrak{G}(\mathfrak{b}) \mid S(\bar{\sigma}) = k/h(\mathfrak{b})\}$ $(k = 1, \ldots, h(\mathfrak{b}) - 1)$ sind die Nebenklassen von $\mathfrak{G}(\mathfrak{b})$ nach $\mathfrak{U}(\mathfrak{b})$; es ist

$$(4) \qquad \mathfrak{U}_k(\mathfrak{b}) = k\bar{\sigma}_j + \mathfrak{U}(\mathfrak{b}) \qquad (j = 1, \ldots, u(\mathfrak{b}));$$

$$(5) \qquad \mathfrak{G}'(\mathfrak{b}) \doteq \bigcup_{k=1}^{h(\mathfrak{b})-1} \mathfrak{U}_k(\mathfrak{b}).$$

Wir bilden jetzt $\mathfrak{G}(\mathfrak{b})$ kanonisch auf $\tilde{\mathfrak{G}}(\mathfrak{b}) \doteq \mathfrak{o} - \mathfrak{b}$ ab (Satz 1); das Bild von $\bar{\sigma}$ bezeichnen wir dabei mit $\tilde{\sigma}$. Es sei nun μ eine beliebige Zahl aus $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}$;

$$(6) \qquad \langle\mu\rangle = \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}} \qquad (\mathfrak{c} \text{ ganz});$$

für jede Zahl τ aus $\tilde{\sigma}$ gilt $\mu\tau \in \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}$; aus $\mu \equiv \mu' \bmod \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{d}}$, $\tau \equiv \tau' \bmod \mathfrak{b}$ folgt $\mu\tau \equiv \mu'\tau' \bmod \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{d}}$; für τ aus $\tilde{\sigma}$ definieren wir deshalb $\mu\bar{\sigma} \doteq \bar{\mu}\bar{\sigma} \doteq \overline{\mu\tau}$. Durchläuft $\bar{\sigma}$ die Gruppe $\mathfrak{G}(\mathfrak{b})$, so durchläuft $\bar{\mu}\bar{\sigma}$ die Gruppe $\mathfrak{G}(\mathfrak{b}')$ mit $\mathfrak{b}' \doteq \frac{\mathfrak{b}}{(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})}$, und zwar genau $N(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$-mal; also ist

$$(7) \qquad S(\bar{\mu}\bar{\sigma}) = \frac{a}{h(\mathfrak{b}')}$$

mit einer gewissen natürlichen Zahl $a = a(\bar{\mu}, \mathfrak{b}, \bar{\sigma})$.

§ 4. In Anbetracht der für die erste Bernoullische Funktion

$$B(x) \doteq \begin{cases} 0 & \text{für } x \equiv 0 \bmod 1, \\ x - [x] - 1/2 & \text{für } x \not\equiv 0 \bmod 1 \end{cases}$$

im Falle einer rationalen Zahl $x = \frac{u}{v}$ gültigen Eisensteinschen Formel

$$(8) \qquad B(x) = \frac{i}{2v} \sum_{l=1}^{v-1} 1^{xl} \operatorname{ctg} \pi \frac{l}{v} \text{ [7]}$$

definieren wir für jede Zahl μ aus K mit (6) die *erste Bernoullische Funktion* $B_K(\mu, \mathfrak{b})$ in direkter Verallgemeinerung von (8) vermöge

$$(9) \qquad B_K(\mu, \mathfrak{b}) \doteq \frac{i}{2N\mathfrak{b}} \sum_{\bar{\sigma} \in \mathfrak{G}'(\mathfrak{b})} 1^{S(\mu\bar{\sigma})} \operatorname{ctg} \pi\, S(\bar{\sigma}) \text{ [8]}.$$

Offenbar hängt $B_K(\mu, \mathfrak{b})$ höchstens von (K und von) $\mathfrak{b}$ und von der Klasse $\bar{\mu}$ von $\mu \bmod \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{d}}$ ab; $B_K(\bar{\mu}, \mathfrak{b}) \doteq B_K(\mu, \mathfrak{b})$.

Mit $\bar{\sigma}$ durchläuft auch $-\bar{\sigma}$ die Menge $\mathfrak{G}'(\mathfrak{b})$; daher ist $B_K(\mu, \mathfrak{b})$ reell, und es ist

$$B_K(\bar{\mu}, \mathfrak{b}) = \frac{1}{2N\mathfrak{b}} \sum_{\bar{\sigma} \in \mathfrak{G}'(\mathfrak{b})} \sin 2\pi\, S(\bar{\mu}\bar{\sigma}) \operatorname{ctg} \pi\, S(\bar{\sigma}).$$

---

[7] $1^x \doteq e^{2\pi i x}$.

[8] Eine leere Summe bedeutet 0.

Da mit $\bar{\mu}$ auch $-\bar{\mu}$ die Gruppe $\mathfrak{G}(\mathfrak{b})$ durchläuft und da $B_K(-\bar{\mu}, \mathfrak{b}) = -B_K(\bar{\mu}, \mathfrak{b})$ ist, folgt

$$\sum_{\bar{\mu} \in \mathfrak{G}(\mathfrak{b})} B_K(\bar{\mu}, \mathfrak{b}) = 0 .$$

Wegen (9), (5), (4), $\overline{\sigma + \sigma'} = \bar{\sigma} + \bar{\sigma}'$, $\bar{\mu}\,\overline{\sigma + \sigma'} = \bar{\mu}\bar{\sigma} + \bar{\mu}\bar{\sigma}'$ folgt

$$(10)\qquad \begin{aligned} B_K(\bar{\mu}, \mathfrak{b}) &= \frac{i}{2N\mathfrak{b}} \sum_{\bar{\sigma} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{b})} \sum_{k=1}^{h(\mathfrak{b})-1} 1^{S(k\bar{\mu}\bar{\sigma}_j + \bar{\mu}\bar{\sigma})} \operatorname{ctg} \pi\, S(k\,\bar{\sigma}_j + \bar{\sigma}) \\ &= \frac{i}{2N\mathfrak{b}} \sum_{\bar{\sigma} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{b})} 1^{S(\bar{\mu}\bar{\sigma})} \sum_{k=1}^{h(\mathfrak{b})-1} 1^{k\,S(\bar{\mu}\bar{\sigma}_j)} \operatorname{ctg} \pi\, k\, S(\bar{\sigma}_j) . \end{aligned}$$

$\mathfrak{V}(\bar{\mu}, \mathfrak{b}) \doteq \{\bar{\mu}\bar{\sigma} \mid \bar{\sigma} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{b})\}$ ist eine Untergruppe von $\mathfrak{G}(\mathfrak{b}')$ der Ordnung $v(\bar{\mu}, \mathfrak{b})$ etwa; es ist $v(\bar{\mu}, \mathfrak{b})\,|u(\mathfrak{b})|\, v(\bar{\mu}, \mathfrak{b})\, N(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$. $\mathfrak{W}(\bar{\mu}, \mathfrak{b}) \doteq \{\bar{\mu}\bar{\sigma} \mid \bar{\sigma} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{b}),\ S(\bar{\mu}\bar{\sigma}) = 1\}$ ist eine Untergruppe von $\mathfrak{V}(\bar{\mu}, \mathfrak{b})$ der Ordnung $w(\bar{\mu}, \mathfrak{b})$ etwa. Die kleinste Zahl in $\{S(\bar{\mu}\bar{\sigma}) \mid \bar{\sigma} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{b})\}$ ist notwendig der Kehrwert einer durch $\bar{\mu}$ und $\mathfrak{b}$ eindeutig bestimmten natürlichen Zahl $s(\bar{\mu}, \mathfrak{b})$;

$$w(\bar{\mu}, \mathfrak{b})\, s(\bar{\mu}, \mathfrak{b}) = v(\bar{\mu}, \mathfrak{b}) .$$

Wegen (7) ist daher $s(\bar{\mu}, \mathfrak{b}) \mid (v(\bar{\mu}, \mathfrak{b}), h(\mathfrak{b}'))$. Mit

$$\delta(\bar{\mu}, \mathfrak{b}) \doteq \begin{cases} 1 & \text{für } s(\bar{\mu}, \mathfrak{b}) = 1 , \\ 0 & \text{für } s(\bar{\mu}, \mathfrak{b}) > 1 \end{cases}$$

gilt

$$(11)\qquad \sum_{\bar{\sigma} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{b})} 1^{S(\bar{\mu}\bar{\sigma})} = \delta(\bar{\mu}, \mathfrak{b})\, u(\mathfrak{b}) .$$

Aus (10), (11), (7), (2), (8) folgt

$$(12)\qquad B_K(\bar{\mu}, \mathfrak{b}) = \delta(\bar{\mu}, \mathfrak{b})\, B(S(\bar{\mu}\bar{\sigma}_j)) .$$

$\mathfrak{S}(\mathfrak{b}) \doteq \{\bar{\mu} \in \mathfrak{G}(\mathfrak{b}) \mid s(\bar{\mu}, \mathfrak{b}) = 1\}$ ist eine Untergruppe von $\mathfrak{G}(\mathfrak{b})$. Für $\bar{\mu} \in \mathfrak{S}(\mathfrak{b})$ ist $S(\bar{\mu}\bar{\sigma}_j) = S(\bar{\mu}\bar{\sigma}_l)$ $(j, l = 1, \ldots, u(\mathfrak{b}))$; daher ist die kleinste Zahl in $\{S(\bar{\mu}\bar{\sigma}_j) \mid \bar{\mu} \in \mathfrak{S}(\mathfrak{b})\}$ notwendig der Kehrwert einer durch $\mathfrak{b}$ eindeutig bestimmten und von j unabhängigen natürlichen Zahl $k(\mathfrak{b})$ mit $k(\mathfrak{b}) \mid h(\mathfrak{b})$ wegen (7). Für $\bar{\mu} \in \mathfrak{S}(\mathfrak{b})$ ist also

$$(13)\qquad S(\bar{\mu}\bar{\sigma}_j) = \frac{a}{k(\mathfrak{b})}$$

mit einer von j unabhängigen natürlichen Zahl $a = a(\bar{\mu}, \mathfrak{b})$; $a(\bar{\mu} + \bar{\mu}', \mathfrak{b}) \equiv a(\bar{\mu}, \mathfrak{b}) + a(\bar{\mu}', \mathfrak{b}) \bmod k(\mathfrak{b})$. $\mathfrak{T}(\mathfrak{b}) \doteq \{\bar{\mu} \in \mathfrak{S}(\mathfrak{b}) \mid S(\bar{\mu}\bar{\sigma}_j) = 1\}$ ist eine Untergruppe von $\mathfrak{S}(\mathfrak{b})$ der Ordnung $t(\mathfrak{b})$ etwa. Durchläuft $\bar{\mu}$ die Gruppe $\mathfrak{S}(\mathfrak{b})$, so nimmt $a(\bar{\mu}, \mathfrak{b})$ jeden der Werte $1, \ldots, k(\mathfrak{b})$ genau $t(\mathfrak{b})$-mal an. Aus (12), (13) folgt

Satz 2. *Es ist*

$$B_K(\bar{\mu}, \mathfrak{b}) = \delta(\bar{\mu}, \mathfrak{b})\, B\left(\frac{a(\bar{\mu}, \mathfrak{b})}{k(\mathfrak{b})}\right) .$$

Es ist nicht schwer, weitere Eigenschaften der $B_K(\bar{\mu}, \mathfrak{b})$ herzuleiten. Auch bleibe die Frage nach Bernoullischen Funktionen beliebigen Grades noch unerörtert.

§ 5. In direkter Verallgemeinerung der für eine beliebige rationale Zahl

$$x = \frac{u}{v}\,, \qquad (u, v) = 1$$

definierten geläufigen Dedekindschen Summe

$$D(x) \doteq \sum_{l=1}^{v} B\left(\frac{l}{v}\right) B(xl) \tag{14}$$

definieren wir für jede Zahl ν aus K mit

$$\langle \nu \rangle = \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}}\,, \qquad (\mathfrak{c}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{o} \tag{15}$$

eine *verallgemeinerte Dedekindsche Summe*

$$D_K(\nu) \doteq \sum_{\bar\mu \in \mathfrak{S}(\mathfrak{b})} B_K(\bar\mu, \mathfrak{b})\, B_K(\mu\bar\sigma, \mathfrak{b})\,. \tag{16}$$

Nach Vorgabe von ν ist $\mathfrak{b}$ eindeutig bestimmt wegen (15). Wegen Satz 2 folgt

Satz 3. *$D_K(\nu)$ ist eine durch (K und) ν eindeutig bestimmte rationale Zahl.*

$\mathfrak{G}(\nu) \doteq \{\bar\mu \mid \bar\mu \in \mathfrak{S}(\mathfrak{b}), \bar\nu\,\bar\mu \in \mathfrak{S}(\mathfrak{b})\}$ ist eine Untergruppe von $\mathfrak{S}(\mathfrak{b})$; $\mathfrak{G}'(\nu) \doteq \{\bar\nu\,\bar\mu \mid \bar\mu \in \mathfrak{S}(\mathfrak{b}), \bar\nu\,\bar\mu \in \mathfrak{S}(\mathfrak{b})\}$; wegen § 3 durchläuft mit $\bar\mu$ auch $\bar\nu\,\bar\mu$ die Gruppe $\mathfrak{G}(\mathfrak{b})$. Daher ist $\mathfrak{G}'(\nu) \cong \mathfrak{G}(\nu)$. Aus (16), (12) folgt

$$D_K(\nu) = \sum_{\bar\mu \in \mathfrak{G}(\nu)} B(S(\bar\mu\bar\sigma_j))\, B(S(\bar\nu\,\bar\mu \cdot \bar\sigma_j))\,. \tag{17}$$

$\mathfrak{U}(\nu) \doteq \{\bar\mu \in \mathfrak{G}(\nu) \mid S(\bar\mu\bar\sigma_j) = 1\}$ ist eine Untergruppe von $\mathfrak{G}(\nu)$ der Ordnung $u(\nu)$ etwa. Über ν setzen wir jetzt

$$\mathfrak{G}'(\nu) = \mathfrak{G}(\nu) \tag{18}$$

voraus. Die kleinste Zahl in $\{S(\bar\mu\bar\sigma_j) \mid \bar\mu \in \mathfrak{G}(\nu)\} = \{S(\bar\nu\,\bar\mu \cdot \bar\sigma_j) \mid \bar\mu \in \mathfrak{G}(\nu)\}$ ist notwendig der Kehrwert einer durch ν eindeutig bestimmten natürlichen Zahl $k(\nu)$ mit $k(\nu) \mid k(\mathfrak{b})$ wegen (13). Für $\bar\mu \in \mathfrak{G}(\nu)$ ist also

$$S(\bar\mu\bar\sigma_j) = \frac{a}{k(\nu)}$$

mit einer von j unabhängigen natürlichen Zahl $a = a(\bar\mu, \nu)$. Durchläuft $\bar\mu$ die Gruppe $\mathfrak{G}(\nu)$, so nimmt $a(\bar\mu, \nu)$ und $a(\bar\nu\,\bar\mu, \nu)$ jeden der Werte $1, \ldots, k(\nu)$ genau $u(\nu)$-mal an. Die $u(\nu)$ Klassen $\bar\mu$ mit $S(\bar\mu\bar\sigma_j) = \frac{1}{k(\nu)}$ bezeichnen wir mit $\bar\mu_1, \ldots, \bar\mu_{u(\nu)}$;

$$S(\bar\mu_l\bar\sigma_j) = \frac{1}{k(\nu)} \qquad (l = 1, \ldots, u(\nu))\,; \tag{19}$$

dann ist $S(\bar\nu\,\bar\mu_l \cdot \bar\sigma_j)$ von der Gestalt

$$S(\bar\nu\,\bar\mu_l \cdot \bar\sigma_j) = \frac{a_l(\nu)}{k(\nu)}\,, \qquad (a_l(\nu), k(\nu)) = 1\,. \tag{20}$$

Aus (17), (19), (20), (14) folgt

Satz 4. *Für ν mit* (18) *gilt*

$$D_K(\nu) = \sum_{l=1}^{u(\nu)} D\left(\frac{a_l(\nu)}{k(\nu)}\right).$$

Damit sind die verallgemeinerten Dedekindschen Summen im Falle (18) auf gewöhnliche Dedekindsche Summen zurückgeführt. Ein eingehendes Studium der $D_K(\nu)$ und verwandter Summen ist der Gegenstand einer weiteren Arbeit.

(Eingegangen am 4. April 1960)

Koecher, M.
Math. Annalen 141, 384—432 (1960)

Beiträge zu einer Reduktionstheorie in Positivitätsbereichen. I

Von

Max Koecher in Münster (Westf.)

Inhalt

Einleitung

Es bezeichne X den Vektorraum über dem Körper R der reellen Zahlen, der aus den m-reihigen reellen symmetrischen Matrizen $\mathfrak{Y} = (\eta_{kl})$ besteht, und Y die Teilmenge der positiv definiten Matrizen $\mathfrak{Y}$ von X. Jede m-reihige unimodulare Matrix $\mathfrak{U}$, d. h. Matrix mit ganz-rationalen Elementen und Determinante ± 1, induziert vermöge

$$\mathfrak{Y} \to \mathfrak{U}'\mathfrak{Y}\mathfrak{U}$$

eine lineare Transformation von X, die Y in sich überführt. Die Gruppe dieser linearen Transformationen werde mit U bezeichnet. Zwei Matrizen, die durch eine Abbildung aus U ineinander übergeführt werden, mögen *äquivalent* genannt werden.

Die Reduktionstheorie der quadratischen Formen dient im wesentlichen der Behandlung der folgenden vier Problemkreise:

(I) Aufsuchen eines vernünftigen Fundamentalbereiches F in der Menge Y bezüglich der Gruppe U, z. B. durch Beschreibung von F durch endlich viele Ungleichungen. Studium der Nachbarn von F, d. h. der Bilder $\mathfrak{U}'F\mathfrak{U}$ von F, für die der Durchschnitt von F und $\mathfrak{U}'F\mathfrak{U}$ nicht leer ist. Nachweis der Endlichkeit des Volumens der Menge der $\mathfrak{Y} \in F$, deren Determinante beschränkt ist.

(II) Untersuchung der Klassenzahl, d. h. der Anzahl der inäquivalenten ganzzahligen positiv definiten Matrizen gegebener Determinante.

(III) Anwendung von (I) auf indefinite quadratische Formen fester Signatur; Bereitstellung der notwendigen Hilfsmittel zur Untersuchung der

Klassenzahl und Konstruktion von Fundamentalbereichen bezüglich der Einheitengruppen.

(IV) Kompaktifizierung des Quotientenraumes des Siegelschen Halbraumes nach der Modulgruppe m-ten Grades und Anwendung von (I) in der Theorie der zugehörigen Modulformen m-ten Grades.

Die eigentliche Reduktionstheorie (I, II und III) geht für $m = 2$ auf J. L. LAGRANGE und für $m = 3$ auf L. A. SEEBER zurück. CH. HERMITE gab die ersten Ergebnisse für beliebiges m und H. MINKOWSKI [5] brachte einen vorläufigen Abschluß.

Die Behandlung dieser vier Punkte geschieht meist so, daß (I) in den Mittelpunkt der Untersuchungen gestellt wird. Hierfür sind drei mögliche Wege bekannt:

(A) Die direkte Beweismethode nach H. MINKOWSKI [5] und C. L. SIEGEL [7].

(B) Die Methode von H. WEYL [13], die auf einer konsequenten Anwendung des Minkowskischen Satzes über die sukzessiven Minima eines konvexen Körpers beruht.

(C) Der Ansatz von G. VORONOÏ [10], der sämtliche Darstellungen des Minimums einer quadratischen Form berücksichtigt.

Diese drei Beweismethoden sind ihrer Art nach wesentlich verschieden. Für die Praxis gibt neben neueren Untersuchungen von B. L. v. D. WAERDEN [12] nur (A) eine befriedigende Kenntnis der für (III) und (IV) wesentlichen Aussagen über den Bereich F. Während sowohl (A) durch P. HUMBERT [2] als auch (B) durch H. WEYL [13] selbst auf quadratische Formen über beliebigen algebraischen Zahlkörpern verallgemeinert wurden, waren die Voronoischen Untersuchungen (C) bisher wenig beachtet worden. Die Tragweite von (B) erkennt man weiter in der Anwendung von H. WEYL [13] und C. L. SIEGEL [8] auf quadratische Formen über den Quaternionen. Gerade eine Analyse von (C) gibt aber eine Darstellung der Reduktionstheorie und ihrer Verallgemeinerungen von besonderer Einfachheit: Einmal gibt Ausbau und Weiterentwicklung des Voronoischen Ansatzes alle durch Verwendung von (A) oder (B) bisher erhaltenen Resultate. Zum anderen kann die Theorie in einem allgemeinen Rahmen so geführt werden, daß die klassische Reduktionstheorie sowie die Verallgemeinerungen auf algebraische Zahlkörper und auf Quaternionenschiefkörper in gewissem Sinne als Beispiele erscheinen, bei denen lediglich einige Voraussetzungen zu prüfen sind. Zugrunde liegt der Begriff des Positivitätsbereiches ([3], im folgenden mit PB zitiert), der sich hier als durchaus angemessen erweist und von dem nur einfachste Eigenschaften benötigt werden. Sofern man bereit ist, die Begriffsbildung eines Positivitätsbereiches zu akzeptieren, verlaufen die Untersuchungen in einem angepaßten Rahmen. Es sei gestattet, darauf hinzuweisen, daß die konsequente Benutzung der Positivitätsbereiche eine erhebliche Ökonomie in der Schreibweise mit sich bringt. Dem Leser wird empfohlen, sich bei den allgemeinen Überlegungen der §§ 1—5 an dem Beispiel der quadratischen Formen über den reellen Zahlen im § 8 zu orientieren.

Im § 1 werden Positivitätsbereiche definiert und die wenigen benötigten Eigenschaften zusammengestellt, deren Beweise aus PB übernommen werden können. Die §§ 2—5 geben eine axiomatische Darstellung des verallgemeinerten Voronoischen Ansatzes unter Verwendung der sämtlichen Darstellungen des Minimums einer Linearform. Einfache Folgerungen über Einheiten in total-reellen algebraischen Zahlkörpern schließen sich in § 6 an. § 7 knüpft an die allgemeine Situation der §§ 2—5 an und benutzt eine zusätzliche Voraussetzung, die eine erste schwache Bedingung beinhaltet. Die reellen quadratischen Formen, die quadratischen Formen über algebraischen Zahlkörpern und über den Quaternionen werden in §§ 8—10 behandelt.

Die bekannten Minkowskischen Reduktionsbedingungen und ihre Verallgemeinerungen zusammen mit einer daraus folgenden Ungleichung von C. L. SIEGEL werden im § 11 als definierende Eigenschaften der sogenannten Minkowskischen Pyramiden eingeführt. Es zeigt sich dabei, daß diese Bedingungen im wesentlichen jeder beliebigen Pyramide eines Positivitätsbereiches zukommen und jene Ungleichungen an sich daher sicher keine arithmetische Bedeutung haben. Nach den bisherigen Beweisen mußte man das Gegenteil annehmen. Die einzige arithmetische Aussage ist in der vorliegenden Darstellung ein Endlichkeitssatz, der hier im einfachsten Fall dargelegt werden soll: Bezeichne $\mu(\mathfrak{Y})$ für $\mathfrak{Y} \in Y$ das Infimum der Zahlen $\mathfrak{g}'\mathfrak{Y}\mathfrak{g}$ für von Null verschiedene Vektoren $\mathfrak{g}$ mit ganz-rationalen Komponenten. In Abänderung der Voronoischen Definition nennen wir eine Matrix $\mathfrak{Y}$ *vollkommen*, wenn es $n = m(m+1)/2$ ganz-rationale Vektoren $\mathfrak{g}_k$ $(1 \leqq k \leqq n)$ mit $\mathfrak{g}_k'\mathfrak{Y}\mathfrak{g}_k = \mu(\mathfrak{Y})$ gibt, für die die Matrizen $\mathfrak{g}_k\mathfrak{g}_k'$ linear unabhängig sind. Offenbar ist mit $\mathfrak{Y}$ auch jede äquivalente Matrix vollkommen. Der erwähnte Endlichkeitssatz besteht dann in der Aussage, daß es nur endlich viele inäquivalente vollkommene Matrizen $\mathfrak{Y}$ mit $\mu(\mathfrak{Y}) = 1$ gibt.

Mein Dank gilt Frau Prof. Dr. H. BRAUN, sowie den Herren Prof. Dr. E. ARTIN und Prof. Dr. H. MAASS für viele Ratschläge und Hinweise. Herrn Prof. Dr. C. L. SIEGEL verdanke ich den Hinweis auf die Arbeiten von G. VORONOI.

§ 1. Positivitätsbereiche in Vektorräumen

1. Wir denken uns einen n-dimensionalen Vektorraum X über dem Körper R der reellen Zahlen vorgegeben. Die Elemente von X bezeichnen wir mit kleinen lateinischen und die von R mit kleinen griechischen Buchstaben. Jedes $a \in X$ wird synonym auch *Punkt* oder *Vektor* von X genannt. Es sei zu X eine symmetrische und positiv definite Bilinearform σ gegeben, d. h. eine Abbildung

$$\sigma : X \times X \to R$$

mit folgenden Eigenschaften:

(BL. 1) $$\sigma(a, b) = \sigma(b, a)\,,$$

(BL. 2) $$\sigma(\alpha a + \beta b, c) = \alpha\sigma(a, c) + \beta\sigma(b, c)\,,$$

(BL. 3) $$\sigma(a, a) > 0 \quad \text{für} \quad a \neq 0\,.$$

Definiert man den absoluten Betrag von $a \in X$ durch

$$|a| := \sqrt{\sigma(a, a)},$$

dann genügt dieser Betrag wegen (BL. 1—3) der Dreiecksungleichung. $|a|$ ist zugleich eine Norm von X und X kann in der zugehörigen Normtopologie als lokalkompakter topologischer Vektorraum über R aufgefaßt werden. Speziell gilt $|\sigma(a, b)| \leqq |a|\,|b|$ und $\sigma : X \times X \to R$ ist stetig. Für Teilmengen A von X bezeichne $\mathring{A}$ den offenen Kern und $\overline{A}$ die abgeschlossene Hülle von A in der Normtopologie. Weiter sei $\operatorname{Rd} A := \overline{A} - \mathring{A}$ die Menge der Randpunkte von A.

(BL. 3) zieht nach sich, daß zu jeder Linearform $\lambda(x)$ von X ein $a \in X$ mit $\lambda(x) = \sigma(a, x)$ existiert und a ist hierbei durch $\lambda(x)$ eindeutig bestimmt.

2. Eine Teilmenge Y von X nennen wir nun einen *Positivitätsbereich in* X, wenn gilt

(PB. 1) Y ist offen und nicht leer,
(PB. 2) Für alle a und b aus Y gilt $\sigma(a, b) > 0$,
(PB. 3) Zu jedem $x \in X - Y$ gibt es $0 \neq a \in \overline{Y}$ mit $\sigma(a, x) \leqq 0$.

Wegen der Stetigkeit von σ ist $\sigma(a, y) \geqq 0$ für alle a und y aus $\overline{Y}$.

Jeder Positivitätsbereich in X kann nach Wahl einer Basis $u_1, \ldots, u_n$ von X als Positivitätsbereich im R^n (im Sinne von PB, § 3) aufgefaßt werden. Sind nämlich α_k (bzw. $\beta_k, \ldots$) für $1 \leqq k \leqq n$ die Komponenten von a (bzw. $b, \ldots$) bezüglich der Basis $u_1, \ldots, u_n$, dann gibt es nach (BL. 1—3) eine reelle symmetrische positiv definite Matrix $S = (\sigma_{kl})$ mit

$$\sigma(a, b) = \sum_{k,l} \alpha_k \beta_l \sigma_{kl}\,.$$

Nach PB, § 2—4, ergeben dann für $a \in Y$ die aus den $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ gebildeten Spaltenvektoren einen nicht ausgearteten Positivitätsbereich des R^n mit Charakteristik S. Alle Ergebnisse der §§ 2—4 von PB können daher cum grano salis auf die hier definierten Positivitätsbereiche umgeschrieben werden. Die wichtigsten jener Ergebnisse formulieren wir als

Lemma 1. *Ist Y ein Positivitätsbereich in X, dann gilt:*

a) *Mit a und b liegt auch $\alpha a + \beta b$ in Y falls $\alpha > 0$, $\beta > 0$.*

b) *Für $0 \neq a \in \overline{Y}$ und $y \in Y$ ist $\sigma(a, y) > 0$.*

c) *Zu $x \in X - \overline{Y}$ gibt es $a \in Y$ mit $\sigma(a, x) < 0$.*

d) *Liegt a und $-a$ in $\overline{Y}$, dann ist $a = 0$.*

e) *Zu $0 \neq a \in \operatorname{Rd} Y$ gibt es $0 \neq b \in \operatorname{Rd} Y$ mit $\sigma(a, b) = 0$.*

f) *Zu jedem Kompaktum K von Y gibt es $\varrho(K) > 0$ mit $\sigma(a, y) \geqq \varrho(K)\,|y|$ für alle $a \in K$ und $y \in Y$*[1]).

Besteht hier im Teil f) das Kompaktum K nur aus dem Punkt a, dann schreiben wir auch $\varrho(a) := \varrho(K)$.

3. Zu dem Positivitätsbereich Y in X erklärt man zwei *Halbordnungen* „>" und „≧" von X durch die Festsetzung, daß $x > y$ (bzw. $x \geqq y$) mit

[1]) Ist $A \subset X$, dann heißt K ein *Kompaktum von* A, falls K in der Topologie von X kompakt und in A enthalten ist.

$x - y \in Y$ (bzw. $x - y \in \overline{Y}$) gleichbedeutend ist. Es ist stets $x \geqq x$ und es gelten die Rechenregeln:

Aus $x \geqq y$, $y \geqq z$ folgt $x \geqq z$.

Aus $x \geqq y$ folgt $a + x \geqq a + y$.

Aus $x \geqq y$, $0 < \lambda \in R$ folgt $\lambda x \geqq \lambda y$.

Entsprechende Gesetze hat man für „$>$" an Stelle von „$\geqq$". Lemma 1d zeigt weiter, daß $x \geqq y$ und $y \geqq x$ stets $x = y$ zur Folge hat. Für $y \in \overline{Y}$ und $a \geqq b$ ist $\sigma(a, y) \geqq \sigma(b, y)$, d. h. die Bilinearform σ ist bezüglich der Halbordnung monoton. Wir werden in Zukunft für die Punkte y von Y auch $y > 0$ und für y aus $\overline{Y}$ auch $y \geqq 0$ schreiben. Nach PB, Lemma 2, sind beide Halbordnungen *archimedisch*, d. h. z. B., *daß es zu* $a > 0$ *und* $x \in X$ *ein positives* λ *mit* $\lambda a > x$ *gibt*. Zweimalige Anwendung dieser Aussage zeigt, daß *es zu* $a > 0$, $b > 0$ *stets ein* $c > 0$ *gibt mit* $a \geqq c$, $b \geqq c$.

Auch der Betrag verhält sich monoton in dem Sinne, *daß es eine Konstante* $\gamma_1 > 0$ *so gibt, daß aus* $a \geqq b \geqq 0$ *stets* $|a| \geqq \gamma_1 |b|$ *folgt*. Zum Beweis wählt man festes $c \in Y$ und hat sodann $|a|\,|c| \geqq \sigma(a, c) \geqq \sigma(b, c) \geqq \varrho(c)\,|b|$.

4. Betrachten wir jetzt die Gruppe der linearen Transformationen von X, d. h. der eineindeutigen und linearen Abbildungen $x \to \Phi x$ von X auf sich. Nach 1 gibt es zu jeder linearen Transformation Φ von X eine lineare Transformation Φ^* von X mit $\sigma(\Phi x, y) = \sigma(x, \Phi^* y)$ für alle x, y aus X. Man hat $(\Phi\Psi)^* = \Psi^*\Phi^*$ und $\Phi^{*-1} = \Phi^{-1*}$. Für eine lineare Transformation Φ und $A \subset X$ bezeichne ΦA die Menge der Φx für $x \in A$. Φ nennen wir einen *Automorphismus von* Y, wenn $\Phi Y = Y$. Da Φ eine topologische Abbildung vermittelt, ist das mit $\Phi \overline{Y} = \overline{Y}$ gleichbedeutend. Die Gruppe aller Automorphismen von Y werde mit $\Sigma(Y)$ bezeichnet. Wie in PB, Lemma 3, zeigt man, *daß mit* Φ *auch* Φ^* *zu* $\Sigma(Y)$ *gehört*. Wir benutzen im folgenden immer die volle Automorphismengruppe $\Sigma(Y)$ von Y, obwohl es in der vorliegenden Note ausreichen würde, wenn wir an Stelle von $\Sigma(Y)$ eine Untergruppe Σ von $\Sigma(Y)$ nehmen würden. Von Σ braucht nur vorausgesetzt zu werden, daß mit Φ auch Φ^* zu Σ gehört. Wir denken uns weiter einen positiven Charakter der Gruppe $\Sigma(Y)$ gegeben, d. h. einen Homomorphismus $\Phi \to \chi(\Phi)$ der Automorphismen Φ von Y in die multiplikative Gruppe der positiven reellen Zahlen.

Eine auf Y definierte Funktion $\omega(y)$ möge nun eine *Norm von* Y (bezüglich χ) heißen, wenn gilt:

(N. 1) $\omega(y)$ ist auf Y stetig und positiv,

(N. 2) $\omega(\Phi y) = \chi(\Phi)\,\omega(y)$ für alle $y \in Y$ und $\Phi \in \Sigma(Y)$,

(N. 3) $\omega(y)$ strebt gegen Null, falls $y \in Y$ gegen einen Randpunkt von Y konvergiert,

(N. 4) Für $d \in Y$ und $0 < \xi \in R$ ist die Menge der $y \in Y$ mit $y \geqq d$ und $\omega(y) \leqq \xi$ beschränkt.

Erklärt man $\omega(y)$ durch 0 falls $y \in \mathrm{Rd}\, Y$, dann ist ω wegen (N. 3) auf ganz $\overline{Y}$ noch stetig.

Gibt man eine Basis von X vor, so erhält man in dem Betrag der Determinante derjenigen Matrix, durch die die lineare Transformation Φ dargestellt

wird, einen Charakter $\chi(\Phi)$. Nach PB, § 5, existiert dann eine Funktion $\omega(y)$ zu χ mit (N. 1) und (N. 2). Man kann zeigen, daß für diese spezielle Funktion auch (N. 3) und (N. 4) erfüllt sind. Wir werden dies aber nicht benötigen. Die Überlegungen von PB, § 6, ergeben darüber hinaus

Lemma 2. *Ist Y ein Positivitätsbereich in X, dann gibt es eine Metrik $|a, b|$ von Y mit folgenden Eigenschaften:*

a) *Die durch die Metrik in Y induzierte Topologie stimmt mit der Relativtopologie von Y überein.*

b) *Für jedes $\Phi \in \Sigma(Y)$ ist $|\Phi a, \Phi b| = |a, b|$.*

Teil b) besagt hier, daß $\Sigma(Y)$ eine Gruppe von Isometrien der Metrik $|a, b|$ ist.

Die bisherigen Bezeichnungen behalten wir konsequent in den folgenden Paragraphen bei. Ohne es jedesmal wieder zu sagen, ist immer Y ein Positivitätsbereich im n-dimensionalen Vektorraum X über R. In den §§ 2—4 wird nur von den in 1 bis 3 gegebenen Begriffen Gebrauch gemacht.

§ 2. Über die Minima gewisser Linearformen

1. Es bezeichne D eine fest ausgewählte, nicht leere Teilmenge von $\overline{Y} - \{0\}$, die in X diskret liegt. In jedem Kompaktum K von X liegen also nur endlich viele Punkte von D. Wir bilden die Linearformen $\sigma_y(x) := \sigma(x, y)$ für festes $y \in Y$ und betrachten diese auf D. Der vorliegende Paragraph beschäftigt sich mit den Minima dieser Linearformen σ_y auf D. Für $y \in Y$ sei dazu

$$\mu(y) := \mu_D(y) := \inf\{\sigma(a, y); a \in D\}.$$

Wegen Lemma 1f ist $\sigma(a, y) \geqq \varrho(y)\,|a|$. Speziell ist daher $\mu(y) > 0$ und das Infimum wird von endlich vielen $a \in D$ angenommen, d. h. $\mu(y)$ ist das erwähnte Minimum der Linearform σ_y auf D.

Weiter sei

$$M(y) := M_D(y) := \{a; a \in D, \mu(y) = \sigma(a, y)\}$$

die Menge der endlich vielen Punkte von D, welche Darstellungen des Minimums $\mu(y)$ vermitteln. Für jedes $y \in Y$ und jedes $a \in D$ ist also $\sigma(a, y) \geqq \mu(y)$ und das Gleichheitszeichen steht nur für $a \in M(y)$. Trägt man in diese Ungleichung ein festes $a \in D$ ein, so folgt $\mu(y) \leqq \sigma(a, y) \leqq |a|\,|y| \leqq \gamma_2 |y|$ mit einer nur von D abhängigen Konstanten γ_2.

2. Als erstes Ergebnis beweisen wir

Lemma 3. *Zu jedem $y \in Y$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Umgebung $U \subset Y$ von y derart, daß*

$$M(x) \subset M(y) \quad und \quad |\mu(x) - \mu(y)| < \varepsilon$$

für alle $x \in U$ gilt. Insbesondere ist $\mu(y)$ stetig.

Beweis: Es sei $K \subset Y$ eine kompakte Umgebung von y. Nach Lemma 1f ist $\sigma(a, x) \geqq \varrho(K)\,|a|$ für alle $x \in K$. Für diejenigen $a \in D$, für die es $x \in K$ mit $\sigma(a, x) \leqq 2\mu(y)$ gibt, ist dann $|a| \leqq \dfrac{2\mu(y)}{\varrho(K)}$, d. h. es gibt endlich viele solche $a_k \in D$, $1 \leqq k \leqq m$. Die von diesen a_k verschiedenen $a \in D$ erfüllen daher $\sigma(a, x) > 2\mu(y)$. Jedes $a \in M(y)$ kommt unter den a_k vor, wir wählen die

Numerierung der a_k so, daß $M(y) = \{a_1, \ldots, a_r\}$ gilt. Wir bestimmen $\delta > 0$ mit

$$\sigma(a_k, y) > \mu(y) + \delta \quad \text{für} \quad r < k \leqq m .$$

Von ε darf ohne Einschränkung $\varepsilon < \mu(y)$ und $\varepsilon < \frac{1}{2}\,\delta$ vorausgesetzt werden. Die Umgebung U von y wird nun als Teilmenge von K derart gewählt, daß

$$(2.1) \qquad |\sigma(a_k, x) - \sigma(a_k, y)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad 1 \leqq k \leqq m \quad \text{und} \quad x \in U$$

erfüllt ist. Man hat für $x \in U$

$$\sigma(a_k, y) = \mu(y), \text{ d. h. } \sigma(a_k, x) < \mu(y) + \varepsilon \quad \text{für} \quad 1 \leqq k \leqq r ,$$

$$\sigma(a_k, y) > \mu(y) + \delta, \text{ d. h. } \sigma(a_k, x) > \mu(y) + \delta - \varepsilon > \mu(y) + \varepsilon, r < k \leqq m ,$$

$$\sigma(a, x) > 2\,\mu(y) > \mu(y) + \varepsilon \quad \text{für} \quad a \in D, a \neq a_k, 1 \leqq k \leqq m .$$

Das Minimum von $\sigma(a, x)$ kann also höchstens für $a = a_k$, $1 \leqq k \leqq r$, angenommen werden, das bedeutet aber $M(x) \subset M(y)$. Die restliche Behauptung folgt sodann aus (2.1).

Für eine beliebige Teilmenge A von X bezeichne $\dim A$ die Maximalzahl der linear unabhängigen Vektoren aus A. $\dim A$ ist dann im üblichen Sinne die Dimension des von A aufgespannten linearen Teilraums von X. Lemma 3 zeigt, daß die Funktion $\dim M(y)$ in jedem Punkt von Y ein lokales Maximum hat. Sind $a_1, \ldots, a_r \in M(y)$ linear unabhängig gewählt, $r := \dim M(y)$, dann gibt es für jedes andere $a \in M(y)$ eine Darstellung

$$(2.2) \qquad a = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k a_k ,$$

und da a und die a_k Darstellungen des Minimums $\mu(y)$ sind, folgt

$$(2.3) \qquad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k = 1 .$$

$\dim M(y) \cap M(\tilde{y}) = \dim M(y)$ kann für $y, \tilde{y} \in Y$ nur in trivialer Weise erfüllt sein, d. h. es soll gezeigt werden, *daß aus* $\dim M(y) \cap M(\tilde{y}) = \dim M(y)$ *schon* $M(y) \subset M(\tilde{y})$ *folgt*. Sei dazu $\dim M(y) = r$ und a_k, $1 \leqq k \leqq r$ linear unabhängig aus $M(y) \cap M(\tilde{y})$ gewählt. Jedes $a \in M(y)$ hat eine Darstellung (2.2) mit (2.3) und es ist

$$\sigma(a, \tilde{y}) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \, \sigma(a_k, \tilde{y}) = \mu(\tilde{y}) \sum_{k=1}^{r} \lambda_k = \mu(\tilde{y}) ,$$

d. h. $a \in M(\tilde{y})$ wie behauptet war.

3. Ist A eine Teilmenge von X, dann bezeichne OA den bezüglich σ orthogonalen Teilraum zu A, d. h.

$$OA := \{x;\, x \in X, \sigma(a, x) = 0 \quad \text{für alle} \quad a \in A\} .$$

OA ist ein linearer Teilraum von X und es ist $\dim OA = n - \dim A$.

Sei jetzt $y \in Y$ und M eine nicht leere Teilmenge von $M(y)$. Für $x \in OM$ mit $y + x \in Y$ und $a \in M$ ist $\sigma(a, y + x) = \sigma(a, y) + \sigma(a, x) = \sigma(a, y) = \mu(y)$, d. h. man hat

$$\mu(y + x) \leqq \mu(y) \quad \text{für} \quad \theta \neq M \subset M(y),\ x \in OM,\ y + x \in Y\,. \tag{2.4}$$

Lemma 4. *Sei $y \in Y$, M eine nicht leere Teilmenge von $M(y)$ und $x \neq 0$ aus OM. Entweder gilt dann*

a) $\mu(y + \lambda x) = \mu(y)$ *für alle* $\lambda \geqq 0$ *mit* $y + \lambda x \in Y$

oder

b) *Es gibt ein $\lambda \geqq 0$ mit*

1. $y + \lambda x \in Y$, 2. $\mu(y + \lambda x) = \mu(y)$,

3. $M \subset M(y + \lambda x)$, 4. $\dim M(y + \lambda x) > \dim M$.

Hier ist λ genau dann positiv, wenn $\sigma(a, x) \geqq 0$ für alle a aus $M(y)$.

Der Fall a) kann wirklich auftreten, z. B. dann, wenn D aus nur einem Punkt von $\overline{Y}$ besteht. Man beachte weiter, daß dieses Lemma nur etwas aussagt, wenn OM nicht nur aus dem Nullvektor besteht.

Beweis: Wir nehmen an, daß a) nicht vorliegt. Es gibt dann wegen (2.4) ein $\lambda_0 > 0$ mit $\mu(y + \lambda_0 x) < \mu(y)$ und $y + \lambda_0 x \in Y$. Nach Definition des Minimums existiert daher $b_0 \in D$ mit $\sigma(b_0, y + \lambda_0 x) < \mu(y) \leqq \sigma(b_0, y)$, d. h. es ist $\sigma(b_0, x) < 0$. Die Menge B der $b \in D$ mit $\sigma(b, x) < 0$ ist daher nicht leer. Für $b \in B$ setze man

$$\varphi(b) := \frac{\sigma(b, y) - \mu(y)}{-\sigma(b, x)}\,.$$

Offenbar ist $\varphi(b) \geqq 0$ und $\varphi(b_0) < \lambda_0$. Da $\varphi(b) < \lambda$ mit $\mu(y) > \sigma(b, y + \lambda x)$ gleichbedeutend ist, gilt für jedes $b \in B$ mit $\varphi(b) < \lambda_0$ nach Lemma 1f die Ungleichung $\mu(y) > \sigma(b, y + \lambda_0 x) \geqq \varrho(y + \lambda_0 x)\,|b|$. Da D diskret ist, gibt es nur endlich viele solche b und daher wird

$$\lambda := \inf\{\varphi(b);\, b \in B\}$$

von φ angenommen. Es ist $0 \leqq \lambda < \lambda_0$ und $y + \lambda x \in Y$. Offenbar ist $\lambda = 0$ mit $\sigma(b, y) = \mu(y)$ für ein $b \in B$, d. h. mit $M(y) \cap B \neq \theta$ gleichbedeutend. Man erhält also $\lambda > 0$ genau dann, wenn $M(y)$ und B keinen Punkt gemeinsam haben. Das ist bereits die Behauptung über λ.

Man hat jetzt nach Definition von λ

$$\mu(y) = \sigma(b, y) + \varphi(b)\,\sigma(b, x) \leqq \sigma(b, y + \lambda x) \quad \text{für alle} \quad b \in B\,,$$

$$\mu(y) \leqq \sigma(a, y) + \lambda\sigma(a, x) = \sigma(a, y + \lambda x) \quad \text{für alle} \quad a \in D - B\,.$$

Für jedes $a \in D$ ist daher $\mu(y) \leqq \sigma(b, y + \lambda x)$, d. h. $\mu(y) \leqq \mu(y + \lambda x)$. Zusammen mit (2.4) erhält man die Behauptung 2. Aber auch 3. ist richtig, denn $a \in M$ zieht $\sigma(a, y + \lambda x) = \sigma(a, y) = \mu(y) = \mu(y + \lambda x)$, d. h. $M \subset M(y + \lambda x)$, nach sich.

Es sei F die Menge aller $b \in B$ mit $\varphi(b) = \lambda$. Jede Linearkombination d von Vektoren aus M genügt der Gleichung $\sigma(d, x) = 0$, denn es war $x \in OM$. Kein

Vektor aus F kann daher als Linearkombination von Vektoren aus M geschrieben werden. Andererseits ist für $b \in F$ nach Definition von φ und λ

$$\sigma(b, y + \lambda x) = \sigma(b, y) + \varphi(b)\,\sigma(b, x) = \mu(y) = \mu(y + \lambda x),$$

d. h. $F \subset M(y + \lambda x)$ und mit 3. folgt 4.

§ 3. Vollkommene Punkte

1. Wie bisher sei D eine diskrete Teilmenge von $\overline{Y} - \{0\}$. Ein $v \in Y$ nennen wir (bezüglich D) *vollkommen*, falls $OM(v)$ nur aus dem Nullvektor besteht. v ist also dann und nur dann vollkommen, wenn $\dim M(v) = n$. Offenbar ist mit v auch λv, $\lambda > 0$, vollkommen und es gilt $M(\lambda v) = M(v)$. Zur Untersuchung der vollkommenen Punkte kann man sich daher meist auf $\mu(v) = 1$ beschränken. Die Menge der vollkommenen $v \in Y$ mit $\mu(v) = 1$ bezeichnen wir mit $V(D)$.

Für $\dim M(v) = n$ *bestimmt die Menge* $M(v)$ *(bis auf einen skalaren Faktor) den Punkt* v *eindeutig:* Nehmen wir ein v aus $V(D)$ und setzen für $y \in Y$ allgemeiner voraus, daß $M(v)$ in $M(y)$ enthalten ist. Wir wollen zeigen, daß v und y linear abhängig sind. Dazu wählen wir $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ mit $\alpha\mu(v) = \beta\mu(y)$. Für alle $a \in M(v)$ ist $\sigma(a, \alpha v - \beta y) = 0$, d. h. $\alpha v - \beta y$ liegt in $OM(v)$. Wegen $\dim M(v) = n$ folgt $\alpha v = \beta y$ und in der Voraussetzung gilt dann sogar das Gleichheitszeichen.

2. Die Frage nach der Existenz von vollkommenen Punkten kann unter gewissen Voraussetzungen durch Lemma 4 beantwortet werden. Man hat dabei nur dafür zu sorgen, daß dort der Fall a) nicht eintreten kann. Eine einfache hinreichende Bedingung dafür wollen wir jetzt formulieren und nennen dazu die diskrete Teilmenge D von $\overline{Y} - \{0\}$ *zulässig*, wenn $\mu(y)$ gegen Null strebt, falls y gegen einen Randpunkt von Y konvergiert. Wir zeigen sogleich, daß D dann und nur dann zulässig ist, wenn es zu jedem Randpunkt b von Y und jedem $\varepsilon > 0$ ein $a \in D$ mit $\sigma(a, b) < \varepsilon$ gibt. Sei dazu y_k eine gegen $b \in \mathrm{Rd}\, Y$ konvergente Folge aus Y, dann wählen wir zu $\varepsilon > 0$ ein $a \in D$ mit $\sigma(a, b) < \varepsilon$ und bestimmen k_0 so groß, daß $|y_k - b| < \frac{\varepsilon}{|a|}$ für $k \geqq k_0$ gilt. Jetzt ist für diese k

$$\mu(y_k) \leqq \sigma(a, y_k) = \sigma(a, b) + \sigma(a, y_k - b) \leqq \varepsilon + |a|\,|y_k - b| < 2\varepsilon,$$

d. h. $\mu(y_k) \to 0$. Sei umgekehrt $b \in \mathrm{Rd}\, Y$ und $c_k \in Y$ eine gegen 0 konvergente Folge. Die Punkte $y_k := b + c_k$ liegen in Y und y_k konvergiert gegen b. Zu jedem k gibt es $a_k \in D$ mit

$$\mu(y_k) = \sigma(a_k, y_k) = \sigma(a_k, b) + \sigma(a_k, c_k) \geqq \sigma(a_k, b) \geqq 0.$$

Da nach Voraussetzung $\mu(y_k)$ gegen Null strebt, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $a \in D$ mit $\sigma(a, b) < \varepsilon$.

Lemma 5. *Für eine zulässige Menge* D *ist* $V(D)$ *eine diskrete Menge.*

Beweis: Sei $v_k \in V(D)$ eine konvergente Folge, $v_k \to v$. v liegt dann in $\overline{Y}$. Wegen $\mu(v_k) = 1$ kann aber v kein Randpunkt von Y sein, denn nach Defi-

nition würde in diesem Falle $\mu(v_k)$ gegen Null streben. v liegt also in Y und nach Lemma 3 gibt es ein k_0 mit $M(v_k) \subset M(v)$ für alle $k \geq k_0$. In 1 war gezeigt, daß dann $v_k = \lambda_k v$ gilt und wegen $1 = \mu(v_k) = \lambda_k \mu(v)$ und der Stetigkeit von $\mu(y)$ folgt $\lambda_k = 1$, d. h. $v_k = v$ für $k \geq k_0$. $V(D)$ ist also diskret.

3. Kehren wir nun zu der Frage nach der Existenz von vollkommenen Punkten v zurück. Es soll zuerst gezeigt werden, daß für zulässiges D der Fall a) in Lemma 4 nicht für x und $-x$ zugleich eintreten kann. y und $M \subset M(y)$ werden wie in Lemma 4 gewählt, ferner $x \neq 0$ aus OM. $y + \lambda x$ und $y - \lambda x$ können nicht für alle $\lambda > 0$ zu Y gehören, denn sonst wäre $\frac{1}{\lambda} y \pm x$ in Y enthalten und für $\lambda \to \infty$ hätte man $\pm x \in \overline{Y}$, also $x = 0$. Man kann also — indem man eventuell von x zu $-x$ übergeht — voraussetzen, daß $y + \lambda x$, $0 \leq \lambda < \varrho$, zu Y gehört, aber $y + \varrho x$ ein Randpunkt von Y ist. Wegen $\mu(y + \lambda x) \to 0$ für $\lambda \to \varrho$ ist daher für dieses x der Fall a) in Lemma 4 nicht möglich. Wendet man dies auf $M = M(y)$ an, so gibt es für zulässiges D zu jedem $y \in Y$ mit $OM(y) \neq \{0\}$ ein $z \in Y$ mit

$$(3.1) \qquad \mu(y) = \mu(z)\,, \quad M(y) \subset M(z)\,, \quad \dim M(y) < \dim M(z)\,.$$

Wir zeigen nun

Satz 1. *Ist D zulässig, dann gibt es zu jedem $y \in Y$ ein vollkommenes $v \in Y$ mit $\mu(y) = \mu(v)$ und $M(y) \subset M(v)$.*

Über die Existenz von vollkommenen Punkten hinaus zeigt dieser Satz, daß man alle Darstellungen $M(y)$ der Minima $\mu(y)$ übersieht, wenn man diese nur für die vollkommenen Punkte kennt.

Beweis: Unter allen $v \in Y$ mit $\mu(y) = \mu(v)$ und $M(y) \subset M(v)$ sei v so gewählt, daß $\dim M(v)$ maximal ist. Wäre hier $\dim M(v) < n$, so wäre $OM(v) \neq \{0\}$ und nach (3.1) für $y = v$ würde man ein z erhalten mit $\mu(y) = \mu(z)$, $M(y) \subset$ $\subset M(v) \subset M(z)$, $\dim M(v) < \dim M(z)$. Das widerspricht aber der Maximalitätseigenschaft von v und es ist daher $\dim M(v) = n$ und v vollkommen.

§ 4. Die vollkommenen Pyramiden von Y

1. Für eine endliche nicht leere Teilmenge M von X sei $P(M)$ die von den Vektoren aus M aufgespannte konvexe Pyramide, d. h.

$$P(M) := \{y;\, y = \sum_{a \in M} \lambda(a) \cdot a,\ \lambda(a) \geq 0\}\,.$$

Wir nennen $P(M)$ die *Pyramide zu M*, sie ist eine konvexe abgeschlossene Teilmenge von X und besitzt dann und nur dann innere Punkte, wenn es n linear unabhängige Vektoren in M gibt. $P(M)$ heißt *r-dimensional*, wenn $\dim M = r$. Ist M leer, dann setzen wir

$$P(\emptyset) = \{0\}\,.$$

Mit M ist auch $P(M)$ in $\overline{Y}$ enthalten.

Jede Hyperebene H durch Null kann in der Form $H = H_u$ mit

$$H_u := \{x;\, \sigma(u, x) = 0\}$$

geschrieben werden und $u \neq 0$ ist durch H nur bis auf einen skalaren Faktor bestimmt. Für $u = 0$ setzen wir sinngemäß $H_u = X$. Wir sagen, *daß auf einer Hyperebene H (durch 0) eine r-dimensionale Seitenfläche von $P(M)$ liegt, wenn*

1. $P(M)$ auf einer Seite von H liegt, d. h. H keine inneren Punkte von $P(M)$ enthält,
2. $\dim H \cap P(M) = r$.

Der Durchschnitt $H \cap P(M)$ ist eine r-dimensionale Pyramide, die wir auch *r-dimensionale Seitenfläche* von $P(M)$ nennen wollen. In diesem Sinne ist der Nullpunkt für jedes $P(M)$ eine 0-dimensionale Seitenfläche. Die elementare Geometrie zeigt, daß es zu jeder r-dimensionalen Seitenfläche F einer n-dimensionalen Pyramide $P(M)$ stets $(n-1)$-dimensionale Seitenflächen $F_1, \ldots, F_{n-r}$ mit

$$F = \bigcap_{1 \leq k \leq n-r} F_k$$

gibt. Außerdem existieren endlich viele Hyperebenen H_{u_k}, $1 \leq k \leq m$, durch Null derart, daß $P(M)$ genau aus den Punkten y mit $\sigma(u_k, y) \geq 0$, $1 \leq k \leq m$, besteht und auf H_{u_k} eine $(n-1)$-dimensionale Seitenfläche von $P(M)$ liegt.

Jede n-dimensionale Pyramide $P(M)$ kann als endliche Vereinigung von solchen Pyramiden $P(M_k)$ dargestellt werden, für die die Mengen $M_k \subset M$ aus genau n linear unabhängigen Vektoren bestehen. Man beweist dies z. B. durch Induktion nach der Anzahl der Elemente von M, indem man $P(M)$ durch eine Hyperebene durch Null in zwei n-dimensionale Pyramiden zerlegt, falls M mehr als n Vektoren enthält.

2. Für endliche Teilmengen M von $\overline{Y} - \{0\}$ mit $\dim M = n$ wollen wir die Pyramide $P(M)$ jetzt durch baryzentrische Unterteilung als Vereinigung von sogenannten regulären Pyramiden darstellen. Eine endliche geordnete Teilmenge $M = \{a_1, \ldots, a_m\}$ von $\overline{Y}$ wollen wir *regulär* nennen, wenn a_1 zu Y gehört und die a_k in der Halbordnung nach § 1.3 fallend geordnet sind, d. h.

$$a_1 > 0, a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_m \geq 0$$

gilt. Wegen Lemma 1d folgt aus $a_k \geq a_l$ notwendig $k \leq l$. Eine Pyramide P heißt weiter *regulär*, wenn es reguläre Menge $M \subset \overline{Y}$ mit $P = P(M)$ gibt. Wenn wir davon sprechen, daß eine Pyramide $P(M)$ regulär ist, dann soll das stets heißen, daß die zur Definition von $P(M)$ verwendete Menge M selbst regulär ist.

Zur Formulierung der angekündigten Zerlegung bezeichnen wir noch für Teilmengen A von $\overline{Y} - \{0\}$ mit $S(A)$ die Menge aller endlichen Summen $a_1 + a_2 + \cdots$ mit $a_k \in A$. Ersichtlich ist $S(A)$ in $\overline{Y} - \{0\}$ enthalten.

Lemma 6. *Zu jeder n-dimensionalen Pyramide $P(M)$ gibt es endlich viele reguläre Mengen M^* der folgenden Art:*

a) *Alle Mengen M^* sind in $S(M)$ enthalten,*

b) *Zwei verschiedene Pyramiden $P(M^*)$ haben keine inneren Punkte gemeinsam,*

c) *$P(M)$ ist gleich der Vereinigung der regulären Pyramiden $P(M^*)$.*

d) *Jede Permutation der Elemente von M induziert eine Permutation der Pyramiden $P(M^*)$ untereinander.*

Beweis: Da sich nach 1 jede n-dimensionale Pyramide $P(M)$ als endliche Vereinigung von Pyramiden $P(\hat{M})$ schreiben läßt, bei denen die Mengen $\hat{M}$ aus genau n linear unabhängigen Vektoren bestehen, darf von vornherein

$$M = \{b_1, \ldots, b_n\}, \quad \dim M = n$$

angenommen werden. $P(M)$ wird jetzt baryzentrisch unterteilt: Wir bilden für jedes k die Menge

$$M_k := \{a_1\} \cup \{b_l;\, l \neq k\} \quad \text{mit} \quad a_1 := \sum_{l=1}^{n} b_l \in S(M)\,.$$

a_1 liegt in allen M_k, es ist $\dim M_k = n$ und $a_1 > 0$. Denn wäre $a_1 \in \operatorname{Rd} Y$, dann gibt es nach Lemma 1e ein $0 \neq d \in \overline{Y}$ mit $\sigma(a_1, d) = 0$, d. h. $\sigma(b_l, d) = 0$ für alle l oder $d = 0$. Offenbar ist $P(M)$ die Vereinigung der $P(M_k)$.

Bei festem k_1 bilden wir für $k_2 \neq k_1$

$$M_{k_1, k_2} := \{a_1, a_2^{(k_1)}\} \cup \{b_l;\, l \neq k_1, k_2\} \quad \text{mit} \quad a_2^{(k_1)} := \sum_{l \neq k_1} b_l \in S(M)\,.$$

Es ist $a_1 \geq a_2^{(k_1)}$, $\dim M_{k_1, k_2} = n$ und

$$P(M_{k_1}) = \bigcup_{k_2 \neq k_1} P(M_{k_1, k_2})\,.$$

Das Verfahren kann fortgesetzt werden und ergibt eine Zerlegung der behaupteten Art. Die weiteren Aussagen des Lemmas ergeben sich aus der erläuterten Konstruktion.

3. Sei wie in den §§ 2 und 3 wieder D eine diskrete Teilmenge von $\overline{Y} - \{0\}$. Wir zeigen, daß dann die Pyramiden zu $M(y)$ besonders einfache Eigenschaften haben: *Für je zwei Punkte y und $\tilde{y}$ von Y ist*

$$P(M(y)) \cap P(M(\tilde{y})) = P(M(y) \cap M(\tilde{y})) \subset H_u,\; u := \mu(\tilde{y})\, y - \mu(y)\, \tilde{y}\,.$$

Zum Beweis sei $w \in P(M(y)) \cap P(M(\tilde{y}))$, d. h.

$$w = \sum_{a \in M(y)} \lambda(a) a = \sum_{\tilde{a} \in M(\tilde{y})} \tilde{\lambda}(\tilde{a}) \tilde{a},\; \lambda(a) \geq 0,\; \tilde{\lambda}(\tilde{a}) \geq 0\,.$$

Bildet man $\sigma(w, y)$, dann folgt

$$\mu(y) \sum_{a \in M(y)} \lambda(a) = \sum_{\tilde{a} \in M(\tilde{y})} \tilde{\lambda}(\tilde{a})\, \sigma(\tilde{a}, y) \geq \mu(y) \sum_{\tilde{a} \in M(\tilde{y})} \tilde{\lambda}(\tilde{a})\,,$$

d. h.

$$\sum_{a \in M(y)} \lambda(a) \geq \sum_{\tilde{a} \in M(\tilde{y})} \tilde{\lambda}(\tilde{a})\,.$$

Hier steht das Gleichheitszeichen nur, wenn alle $\tilde{\lambda}(\tilde{a})$ verschwinden, für die $\tilde{a}$ nicht in $M(y)$ liegt. Entsprechend hat man

$$\sum_{\tilde{a} \in M(\tilde{y})} \tilde{\lambda}(\tilde{a}) \geq \sum_{a \in M(y)} \lambda(a)\,,$$

und das Gleichheitszeichen steht wieder nur, wenn alle $\lambda(a)$ verschwinden, für die a nicht in $M(\tilde{y})$ liegt. Zusammen folgt, daß in beiden Fällen das Gleichheitszeichen steht und daher $\lambda(a) = 0$ für die a ist, die nicht zu $M(\tilde{y})$ gehören.

In der Darstellung von w sind also höchstens die $\lambda(a)$, $a \in M(y)$, von Null verschieden, für die zugleich $a \in M(\bar{y})$.

Ist jetzt $M(y) \cap M(\bar{y}) = \theta$, dann ist $\lambda(a) = \bar{\lambda}(\bar{a}) = 0$ für alle $a \in M(y)$, $\bar{a} \in M(\bar{y})$, und daher $P(M(y)) \cap P(M(\bar{y})) = \{0\}$. Hiervon gilt die Umkehrung. Sei also $M(y) \cap M(\bar{y}) \neq \theta$, dann ist

$$w = \sum_{a \in M(y) \cap M(\bar{y})} \lambda(a) a$$

und daher ist $P(M(y)) \cap P(M(\bar{y})) \subset P(M(y) \cap M(\bar{y}))$. Die Inklusion in der umgekehrten Richtung ist aber trivial, die Gleichheit der beiden ersten Ausdrücke daher gesichert.

Für die noch fehlende Inklusion bildet man wieder

$$\sigma(w, y) = \mu(y) \sum_{a \in M(y) \cap M(\bar{y})} \lambda(a), \quad \sigma(w, \bar{y}) = \mu(\bar{y}) \sum_{a \in M(y) \cap M(\bar{y})} \lambda(a).$$

Beide Darstellungen zusammen ergeben $\sigma(w, \mu(\bar{y}) y - \mu(y) \bar{y}) = 0$ oder $P(M(y)) \cap P(M(\bar{y})) \subset H_u$ mit der angegebenen Bedeutung von u.

4. Eine Pyramide $P(M(v))$ wollen wir jetzt eine *vollkommene Pyramide* nennen, wenn $v \in Y$ (bezüglich D) vollkommen ist. Die vollkommenen Pyramiden sind diejenigen unter den Pyramiden $P(M(y))$, $y \in Y$, die n-dimensional sind. Das Ergebnis von 3 zeigt, daß für verschiedene vollkommene Pyramiden $P(M(v))$ und $P(M(\bar{v}))$

1. $P(M(v))$ und $P(M(\bar{v}))$ keine inneren Punkte gemeinsam haben, denn u ist nicht der Nullvektor, und

2. der Durchschnitt $P(M(v)) \cap P(M(\bar{v}))$ eine r-dimensionale Seitenfläche von $P(M(v))$ und $P(M(\bar{v}))$ ist $(0 \leq r < n)$.

Setzen wir nun voraus, daß D zulässig ist. Wir werden zeigen, daß die letzte Aussage in dem folgenden Sinne umkehrbar ist: *Liegt auf einer Hyperebene H eine $(n-1)$-dimensionale Seitenfläche F von $P(M(v))$, die Punkte von Y enthält, und ist v vollkommen, dann gibt es ein vollkommenes $\bar{v}$ mit $\mu(\bar{v}) = \mu(v)$ und $F = P(M(v)) \cap P(M(\bar{v}))$. Wird ein Punkt $y \in Y$ durch die Hyperebene H von $P(M(v))$ getrennt, dann gilt $\sigma(y, v) > \sigma(y, \bar{v})$.*

Zum Beweis sei also F eine $(n-1)$-dimensionale Seitenfläche von $P(M(v))$. Es gibt dann Vektoren $a_k \in M(v)$, $1 \leq k \leq m$, mit

1. $F = \left\{y;\ y = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k,\ \lambda_k \geq 0\right\}$,

2. $\dim\{a_1, \ldots, a_m\} = n - 1$,

3. Für geeignete $\lambda_k \geq 0$ liegt $b := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k$ in Y.

Wegen 2. ist durch $\sigma(a_k, x) = 0$, $1 \leq k \leq m$, ein $x \neq 0$ bis auf einen skalaren Faktor bestimmt, d. h. bei $M := \{a_1, \ldots, a_m\}$ besteht OM aus den Vektoren λx, $\lambda \in R$. Mit diesem x ist $F \subset H_x$, d. h. $H = H_x$. Wir können x noch so wählen, daß $\sigma(x, y) \geq 0$ für alle $y \in P(M(v))$ gilt, und dann ist x bis auf einen positiven Faktor bestimmt. x gehört nicht zu $\bar{Y}$, denn wegen 3. wäre sonst $\sigma(b, x) > 0$ im Widerspruch zur Wahl von x. Es gibt daher ein $\lambda_0 > 0$ derart, daß $v + \lambda_0 x$

ein Randpunkt von Y ist. Da D zulässig vorausgesetzt war, strebt $\mu(v + \lambda x)$ gegen Null für $\lambda \to \lambda_0$ und Fall a) in Lemma 4 (mit v an Stelle von y) tritt nicht ein. Das dortige λ ist aber auch positiv, da wegen $\sigma(x, y) \geqq 0$ für alle $y \in P(M(v))$ auch $\sigma(a, y) \geqq 0$ für alle $a \in M(v)$ gilt. Für $\bar{v} := v + \lambda x$ besagt dann Lemma 4b $\mu(\bar{v}) = \mu(v)$, $a_1, \ldots, a_m \in M(\bar{v})$, $\dim M(\bar{v}) > \dim M = n - 1$. $M(\bar{v})$ enthält also n linear unabhängige Vektoren und $\bar{v}$ ist somit vollkommen. Wegen $a_k \in M(\bar{v})$ ist aber auch F in $P(M(v)) \cap P(M(\bar{v}))$ enthalten und nach 3 stimmen beide Mengen überein.

Liegt y auf der anderen Seite von $H = H_x$ als $P(M(v))$, dann ist $\sigma(x, y) < 0$ und $\sigma(y, \bar{v}) = \sigma(y, v) + \lambda\sigma(y, x) < \sigma(y, v)$ ergibt die noch fehlende Behauptung.

5. Unter einem *Nachbarn* einer vollkommenen Pyramide $P(M(v))$ wird man eine vollkommene Pyramide $P(M(\bar{v}))$ verstehen, für die der Durchschnitt $P(M(v)) \cap P(M(\bar{v}))$ einen Punkt von Y enthält. Wir wollen nachweisen, daß jede vollkommene Pyramide nur endlich viele Nachbarn besitzt. Da jeder Durchschnitt $P(M(v)) \cap P(M(\bar{v}))$ nach 4 stets eine r-dimensionale Seitenfläche von $P(M(v))$ ist und nach 1 jede Pyramide nur endlich viele Seitenflächen besitzt, genügt es, wenn gezeigt wird, daß es zu gegebener Seitenfläche F von $P(M(v))$, die einen Punkt von Y enthält, nur endlich viele vollkommene $\bar{v}$ mit $P(M(v)) \cap P(M(\bar{v})) = F$ gibt. Das folgt aber aus

Lemma 7. *Ist D zulässig, dann gibt es zu jedem Kompaktum K von Y nur endlich viele vollkommene Pyramiden, die mit K Punkte gemeinsam haben.*

Beweis: Sei v vollkommen und $y \in K \cap P(M(v))$, dann gibt es nach 1 linear unabhängige $a_k \in M(v)$, $1 \leqq k \leqq n$, mit

$$y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k,\ \lambda_k \geqq 0 .$$

Für die Punkte y von K ist $|y|$ durch γ_3 beschränkt. Da D diskret ist, gibt es $\gamma_4 > 0$ mit $|a| \geqq \gamma_4$ für alle $a \in D$ und wegen $y \geqq \lambda_k a_k$ für alle k folgt nach § 1.3

$$\gamma_3 \geqq |y| \geqq \gamma_1 \lambda_k |a_k| \geqq \gamma_5 \lambda_k .$$

Unter Verwendung von Lemma 1f ist nun

$$\varrho(K)\,|v| \leqq \sigma(y, v) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu(v) \leqq \gamma_6 \cdot \mu(v) .$$

Da man ohne Einschränkung $\mu(v) = 1$ annehmen darf, sind die vollkommenen v mit $\mu(v) = 1$ und $K \cap P(M(v)) \neq \emptyset$ beschränkt, nach Lemma 5 gibt es daher nur endlich viele.

6. Die wichtigsten Ergebnisse dieses Paragraphen über vollkommene Pyramiden fassen wir zusammen in

Satz 2. *Ist D zulässig, dann gilt:*

a) *Zwei verschiedene vollkommene Pyramiden haben keine inneren Punkte gemeinsam.*

b) *Jede vollkommene Pyramide besitzt nur endlich viele Nachbarn.*

c) *Jede vollkommene Pyramide ist endliche Vereinigung regulärer Pyramiden* $P(M)$ *mit* $M \subset S(D)$.

d) *Die vollkommenen Pyramiden überdecken* Y.

Hier ist wegen Lemma 6 lediglich noch d) zu beweisen. Es sei dazu $y \in Y$ und $v \in V(D)$. Liegt y nicht in $P(M(v))$, so gibt es nach 1 eine Hyperebene $H = H_u$, auf der eine $(n-1)$-dimensionale Seitenfläche von $P(M(v))$ liegt und die y und $P(M(v))$ trennt. Nach 4 gibt es dann $v_1 \in V(D)$ mit $\sigma(y, v) > \sigma(y, v_1)$. Liegt y in $P(M(v_1))$, so ist man fertig, anderenfalls kann das Verfahren fortgesetzt werden und man erhält Punkte v_k aus $V(D)$ mit

$$\sigma(y, v) > \sigma(y, v_1) > \cdots > \sigma(y, v_k) > \cdots.$$

Nach Lemma 1f ist wieder $\sigma(y, v_k) \geqq \varrho(y)\,|v_k|$, d. h. die möglichen v_k sind beschränkt, nach Lemma 5 gibt es nur endlich viele und das obige Verfahren bricht ab, d. h. man erhält ein v_m mit $y \in P(M(v_m))$. Damit ist zusammen mit den früheren Überlegungen alles bewiesen.

Dieser Satz gestattet offenbar die folgende geometrische Interpretation: Man betrachte eine Hyperebene H, auf deren einer Seite nur ein beschränkter Teil von Y liegt. Die Zerlegung von Y in vollkommene und der vollkommenen in reguläre Pyramiden induziert dann in $H \cap Y$ eine simpliziale Unterteilung, deren Eckpunkte die Form λa mit $\lambda > 0$ und geeignetem $a \in S(D)$ haben.

§ 5. Diskontinuierliche Gruppen und Fundamentalbereiche

1. Die bisherigen Überlegungen werden uns erlauben, einfache Fundamentalbereiche von gewissen diskontinuierlichen Untergruppen von $\Sigma(Y)$ in Y zu konstruieren. Den Begriff eines Fundamentalbereiches wollen wir hierfür wie folgt präzisieren:

Es sei T ein lokalkompakter topologischer Raum. $I(T)$ bezeichne die Gruppe der topologischen Selbstabbildungen $\Phi: T \to T$. Eine Untergruppe Ω von $I(T)$ heißt *diskontinuierlich*, wenn für jede Folge von verschiedenen $\Phi_k \in \Omega$ und jedes $x \in T$ die Folge $\Phi_k x$ in T keinen Häufungspunkt besitzt. Unter einem *Fundamentalbereich* F von Ω (in T) wollen wir nun eine Teilmenge F von T verstehen, für die gilt:

(F. 1) F ist abgeschlossen,

(F. 2) Zu $x \in T$ gibt es $\Phi \in \Omega$ mit $\Phi x \in F$,

(F. 3) Sind Φx und Ψx innere Punkte von F, $\Phi, \Psi \in \Omega$, dann ist $\Phi = \Psi$,

(F. 4) Zu jedem Kompaktum K von T gibt es nur endlich viele $\Phi \in \Omega$, für die $\Phi F \cap K$ nicht leer ist.

(F. 2) bedeutet, daß die Familie ΦF, $\Phi \in \Omega$, eine Überdeckung von T darstellt, bei der die inneren Punkte von F wegen (F. 3) genau einmal überdeckt werden. Man kann zeigen (vgl. W. Roelcke [6]), daß mit F auch $\bar{\mathring{F}}$ ein Fundamentalbereich von Ω ist, jeder Fundamentalbereich besitzt daher innere Punkte.

Besitzt Ω einen Fundamentalbereich F im obigen Sinne, dann ist Ω diskontinuierlich. Dies folgt aus der folgenden schärferen Aussage, deren Beweis wir unterdrücken: *Existiert zu* Ω *ein Fundamentalbereich, dann gibt es zu je zwei*

Punkten $x, y \in T$ Umgebungen U bzw. V, für die $U \cap \Phi V \neq \emptyset$ nur für endlich viele $\Phi \in \Omega$ möglich ist. Speziell ist dann der Quotientenraum T/Ω ein Hausdorff-Raum.

Bezeichnet π die natürliche Abbildung von T auf den Quotientenraum T/Ω, dann besagt (F. 2), daß die Beschränkung π_F von π auf F den Bereich F noch auf T/Ω abbildet. Nach (F. 3) ist π_F auf $\mathring{F}$ topologisch. Ohne Beweis geben wir an, daß wegen (F. 4) die Abbildung π_F eine eigentliche Abbildung ist, d. h. die Urbilder kompakter Mengen kompakt sind.

Unter einem *Nachbarn* eines Fundamentalbereiches F versteht man ein Bild ΦF, $\Phi \in \Omega$, das mit F einen Punkt gemeinsam hat. Nach W. Roelcke [6] wird Ω von den Φ aus Ω erzeugt, für die $\Phi F \cap F$ nicht leer ist. Besitzt ein Fundamentalbereich also *nur endlich viele Nachbarn, dann hat Ω endlich viele Erzeugende.*

Sei F ein Fundamentalbereich von Ω und Ω_F die Menge der $\Phi \in \Omega$ mit $\Phi F \cap F \neq \emptyset$. Für $x \in T$ sei weiter Ω_x die Gruppe der $\Phi \in \Omega$ mit $\Phi x = x$. Wegen

$$\Omega_{\Phi x} = \Phi \cdot \Omega_x \cdot \Phi^{-1}, \quad \Phi \in \Omega,$$

kann man sich bei der Untersuchung der Gruppen Ω_x auf Punkte $x \in F$ beschränken. Offenbar ist dann $\Omega_x \subset \Omega_F$ und man hat: *Besitzt Ω einen Fundamentalbereich mit endlich vielen Nachbarn, dann sind die Ordnungen der Gruppen Ω_x für $x \in T$ beschränkt.*

2. Die vorstehenden allgemeinen Begriffe spezialisieren wir nun auf einen Positivitätsbereich Y in einem Vektorraum X. Es ist also $T = Y$. Nach Lemma 2 ist Y ein metrischer Raum und $\Sigma(Y)$ eine Gruppe von Isometrien der zugehörigen Metrik. Unsere Aufgabe wird es sein, für gewisse Untergruppen Ω von $\Sigma(Y)$ einfache Fundamentalbereiche anzugeben.

Wie früher sei $D \subset \overline{Y} - \{0\}$ eine in X diskrete Menge, ferner Ω eine Untergruppe von $\Sigma(Y)$ mit

$$\Omega D = D.$$

Für jedes $\Phi \in \Omega$ und $a \in D$ ist also $\Phi a \in D$. Bezeichne Ω^* die Gruppe der Φ^* für $\Phi \in \Omega$. Ω^* ist nach § 1.4 wieder Untergruppe von $\Sigma(Y)$. In der Bezeichnung der §§ 2—4 gilt nun für alle $\Phi \in \Omega$

$$\mu(\Phi^* y) = \mu(y), \quad M(\Phi^* y) = \Phi^{-1} M(y),$$

$$O M(\Phi^* y) = \Phi^* O M(y), \quad P(M(\Phi^* y)) = \Phi^{-1} P(M(y)).$$

Mit v ist daher auch $\Phi^* v$, $\Phi \in \Omega$, vollkommen und es ist

$$\Omega^* V(D) = V(D),$$

wenn $V(D)$ wie in § 3.1 die Menge der vollkommenen $v \in Y$ mit $\mu(v) = 1$ bezeichnet.

3. Zwei Punkte $a, b \in Y$ wollen wir *nach Ω äquivalent* nennen, wenn es $\Phi \in \Omega$ mit $a = \Phi b$ gibt. Nach 2 besteht $V(D)$ aus Klassen nach Ω^* äquivalenter Punkte. Ein volles System nach Ω^* inäquivalenter Punkte von $V(D)$ bezeichnen wir mit $V(D)/\Omega^*$ und denken uns dieses System irgendwie fest ausgewählt.

Der Fall, daß $V(D)$ aus nur endlich vielen nach Ω^* inäquivalenter Punkte besteht, d. h. daß $V(D)/\Omega^*$ endlich ist, wird für uns von besonderem Interesse sein. In gewissen einfachen Fällen läßt sich die Endlichkeit von $V(D)/\Omega^*$ leicht zeigen: *Sei D_0 eine Teilmenge von Y, für die es ein $d \in Y$ mit $a \geqq d$ für alle $a \in D_0$ gibt. Ist Ω eine Untergruppe von $\Sigma(Y)$, für die $D := \Omega D_0$ zulässig ist, dann ist $V(D)/\Omega^*$ endlich.* Die Voraussetzung über D_0 ist z. B. erfüllt, wenn D_0 eine endliche Teilmenge von Y ist.

Zum Beweis sei $v \in V(D)$ gegeben. Nach Voraussetzung gibt es $\Phi \in \Omega$ derart, daß $\Phi M(v) = M(\Phi^{*-1}v)$ und D_0 einen Punkt gemeinsam haben. $V(D)/\Omega^*$ ist daher sicher endlich, wenn wir zeigen, daß die Menge der $v \in V(D)$ mit $M(v) \cap D_0 \neq \theta$ endlich ist. Für diese v gibt es aber $a \in D_0$ mit $1 = \mu(v) = \sigma(a, v) \geqq \sigma(d, v) \geqq \varrho(d)\,|v|$ und nach Lemma 5 gibt es nur endlich viele solche v.

4. Wir werden anschließend aus den vollkommenen Pyramiden $P(M(v))$, $v \in V(D)/\Omega^*$, einen Fundamentalbereich von Ω aufbauen. Dazu sind einige Vorbemerkungen erforderlich. Zuerst zeigen wir: *Ist D zulässig und $\Omega D = D$, dann ist Ω in Y diskontinuierlich.* Wäre das nicht der Fall, dann gäbe es eine Folge $\Phi_k \in \Omega$ von verschiedenen linearen Transformationen und $a \in Y$ derart, daß $\Phi_k a$ gegen ein $b \in Y$ konvergiert. Wir wählen eine kompakte Umgebung U von b in Y und können noch $\Phi_k a \in U$ für alle k annehmen. Nach Satz 2d liegt a in einer vollkommenen Pyramide $P(M(v))$ und daher ist $\Phi_k P(M(v)) \cap \cap U \neq \theta$. Nach Lemma 7 kommen unter den $\Phi_k^{*-1}v$ nur endlich viele verschiedene Punkte vor, d. h. $\Phi_k^{*-1}v = v_0 \in Y$ für unendlich viele k. Das liefert $\Phi_k M(v) = M(v_0)$. Wegen $\dim M(v) = \dim M(v_0) = n$ stimmen unendlich viele von diesen Φ_k überein und man hat einen Widerspruch.

5. Bezeichne Ω_v^* die Gruppe der $\Phi \in \Omega$ mit $\Phi^* v = v$. Da Ω diskontinuierlich ist, ist Ω_v^* endlich und man hat für $\Phi \in \Omega_v^*$

$$\Phi M(v) = M(v), \qquad \Phi P(M(v)) = P(M(v)).$$

Ω_v^* kann als Gruppe von Abbildungen von $P(M(v))$ auf sich aufgefaßt werden. Wir zeigen, *daß für vollkommenes v ein Fundamentalbereich von Ω_v^* in $P(M(v))$ als endliche Vereinigung von regulären Pyramiden* (§ 4.2) *gewählt werden kann.* Wir wenden dazu Lemma 6 auf die n-dimensionale Pyramide $P(M(v))$ an: $P(M(v))$ ist Vereinigung endlich vieler regulärer Pyramiden $P(M)$, $M \subset S(D)$. Da jede Abbildung $x \to \Phi x$, $\Phi \in \Omega_v^*$, die Vektoren von $M(v)$ permutiert, werden bei dieser Abbildung die Mengen M untereinander permutiert. Die Menge der M zerfällt in Transitivitätsbereiche von Ω_v^*. Unsere Behauptung ist evident, falls wir zeigen können, daß für eine n-dimensionale reguläre Pyramide $P(M)$ aus $\Phi M = M$ folgt, daß Φ die Identität ist. Dazu sei $M = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_m \geqq 0$. Die Abbildung $x \to \Phi x$ permutiert die a_k, es gibt eine Permutation $\pi(k)$ der Zahlen $k = 1, \ldots, m$, mit $\Phi a_k = a_{\pi(k)}$. Da Φ ein Automorphismus von Y ist, folgt für $k < l$

$$a_{\pi(k)} = \Phi a_k \geqq \Phi a_l = a_{\pi(l)},$$

d. h. $\pi(k) \leqq \pi(l)$. Das bedeutet aber $\pi(k) = k$ für alle k, und wegen $\dim M = n$ ist Φ die Identität.

Einen fest ausgewählten Fundamentalbereich von $P(M(v))$ bezüglich Ω_v^*, der eine endliche Vereinigung von regulären Pyramiden ist, bezeichnen wir mit

$$P(M(v))/\Omega_v^* .$$

6. Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zur Konstruktion eines Fundamentalbereiches von Ω und definieren

$$F(D, \Omega) := \bigcup_{v \in V(D)/\Omega^*} P(M(v))/\Omega_v^* .$$

Satz 3. *Ist D zulässig und Ω eine Untergruppe von $\Sigma(Y)$ mit $\Omega D = D$, dann ist $F(D, \Omega) \cap Y$ ein Fundamentalbereich von Ω in Y.*

Beweis: Wegen Lemma 7 ist (F. 1) sicher richtig. Zum Nachweis von (F. 2) gibt es zu $y \in Y$ nach Satz 2d ein $v \in V(D)$ mit $y \in P(M(v))$. Man bestimmt nun $\Phi \in \Omega$, so daß $\bar{v} := \Phi^* v$ in $V(D)/\Omega^*$ liegt und hat $\Phi^{-1} y \in \Phi^{-1} P(M(v)) = P(M(\bar{v}))$. Jetzt kann noch $\Psi \in \Omega_{\bar{v}}^*$ so gewählt werden, daß $\Psi\Phi^{-1} y$ in $P(M(\bar{v}))/\Omega_{\bar{v}}^* \cap Y \subset F(D, \Omega) \cap Y$ enthalten ist. Zum Beweis von (F. 3) können wir annehmen, daß es eine nicht leere offene Menge A gibt, deren abgeschlossene Hülle $\bar{A}$ in Y kompakt ist, und für die $A \subset F(D, \Omega)$ und $\Phi A \subset F(D, \Omega)$ gilt. Nach Lemma 7 gibt es endlich viele $v_k^{(1)}$, $v_l^{(2)}$ aus $V(D)$ mit

$$A \subset \bigcup_k P(M(v_k^{(1)})) , \quad \Phi A \subset \bigcup_l P(M(v_l^{(2)})) ,$$

d. h.

$$A \subset \{\bigcup_k P(M(v_k^{(1)}))\} \cap \{\bigcup_l P(M(\Phi^* v_l^{(2)}))\} \subset \bigcup_{k,l} \{P(M(v_k^{(1)})) \cap P(M(\Phi^* v_l^{(2)}))\} .$$

Da A offen ist, hat wenigstens ein Durchschnitt $P(M(v_k^{(1)})) \cap P(M(\Phi^* v_l^{(2)}))$ innere Punkte. Nach Satz 2a stimmen diese beiden Pyramiden überein und es ist $v_k^{(1)} = \Phi^* v_l^{(2)}$. Da die Punkte von $V(D)/\Omega^*$ nach Ω^* inäquivalent sind, folgt $v_k^{(1)} = v_l^{(2)} =: v$ und $\Phi \in \Omega_v^*$. Nach eventueller Verkleinerung von A darf jetzt $A \subset P(M(v))/\Omega_v^*$ und $\Phi A \subset P(M(v))/\Omega_v^*$ angenommen werden. Da $P(M(v))/\Omega_v^*$ ein Fundamentalbereich von $P(M(v))$ bezüglich Ω_v^* war, ist Φ die Identität und (F. 3) ist richtig. (F. 4) ergibt sich aus Lemma 7 und der Satz ist daher vollständig bewiesen.

7. Den für später wichtigsten Fall, daß es nur endlich viele Klassen nach Ω^* inäquivalenter vollkommener v mit $\mu(v) = 1$ gibt, formulieren wir gesondert als

Satz 4. *Ist D zulässig und Ω Untergruppe von $\Sigma(Y)$ mit $\Omega D = D$ und ist $V(D)/\Omega^*$ endlich, dann hat Ω endlich viele Erzeugende und $F := F(D, \Omega) \cap Y$ ist ein Fundamentalbereich von Ω mit den folgenden Eigenschaften:*

a) *F ist in der Vereinigung endlich vieler vollkommener Pyramiden enthalten.*

b) *$\bar{F}$ ist endliche Vereinigung von regulären Pyramiden $P(M)$, die zugehörigen regulären Mengen M sind in $S(D)$ enthalten.*

c) *F hat endlich viele Nachbarn.*

Beweis: Nach Satz 3 ist F ein Fundamentalbereich von Ω, der nach Konstruktion in der Vereinigung der endlich vielen Pyramiden $P(M(v))$, $v \in V(D)/\Omega^*$, enthalten ist. Zusammen mit Lemma 6 zieht dies die Behauptung b) nach sich. Da nach Satz 2b jede vollkommene Pyramide nur endlich viele vollkommene Pyramiden als Nachbarn hat, gilt dies wegen

Lemma 6 auch für die regulären Pyramiden und daher auch für F. In 1 hatten wir gesehen, daß die Erzeugbarkeit von Ω durch endlich viele lineare Transformationen aus Ω auf Grund eines allgemeinen Satzes aus Teil c) folgt. In der vorliegenden speziellen Situation kann dies natürlich direkt bewiesen werden.

8. Bei unseren späteren Anwendungen werden wir den Nachweis der Endlichkeit von $V(D)/\Omega^*$ mehrfach auf eine Hilfsbetrachtung stützen, die wir schon an dieser Stelle durchführen können. Zur Vereinfachung der Formulierung definieren wir für jede endliche Teilmenge M von D den Punkt a_M durch

$$a_M := \sum_{a\in M} a\,.$$

a_M ist von Null verschieden und in $\overline{Y}$ enthalten. Wir beweisen: *Gibt es eine endliche Teilmenge A von D und zu jedem $y \in V(D)$ ein $\Phi \in \Omega$ derart, daß für $M := M(\Phi^* y) \cap A$ der Punkt a_M in Y liegt, dann ist $V(D)/\Omega^*$ endlich.* Zum Beweis betrachten wir alle Teilmengen N von A, für die a_N zu Y gehört. Da es nur endlich viele solche Mengen N gibt, existiert ein $d \in Y$ mit $a_N \geqq d$ für alle diese Mengen N. Sei nun ein vollkommenes $y \in Y$ mit $\mu(y) = 1$ gegeben. Man wähle ein $\Phi \in \Omega$, so daß für $M := M(\Phi^* y) \cap A$ der Punkt a_M zu Y gehört, und hat nach Konstruktion von d stets $a_M \geqq d$. Für $y_1 := \Phi^* y$ und $a \in M$ ist $\sigma(y_1, a) = \mu(y_1) = \mu(y) = 1$ und Lemma 1f gibt

$$\sum_{a\in M} 1 = \sum_{a\in M} \sigma(y_1, a) = \sigma(y_1, a_M) \geqq \sigma(y_1, d) \geqq \varrho(d)\,|y_1|\,.$$

Da die linke Seite durch die Anzahl der Elemente von A beschränkt ist, gibt es nach Lemma 5 nur endlich viele solche Punkte y_1. Zu jedem $y \in V(D)$ existiert also $\Phi \in \Omega$, so daß $\Phi^* y$ in einer endlichen Menge enthalten ist, und das war behauptet.

§ 6. Ein einfaches Beispiel

1. Wir hatten bisher von D nur angenommen, daß es in $\overline{Y} - \{0\}$ enthalten ist. Gehören Randpunkte von Y zu D, so reichen die vollkommenen Pyramiden ersichtlich mindestens längs einer Halbgeraden an den Rand von Y heran. Wesentlich einfacher werden dagegen die Verhältnisse, wenn wir $D \subset Y$ annehmen. Die vollkommenen Pyramiden haben dann nur den Nullpunkt mit dem Rand von Y gemeinsam. Darüber hinaus gilt das folgende bemerkenswerte Ergebnis: *Für $D \subset Y$ gibt es zu jedem vollkommenen $v \in Y$ ein $d = d(v) \in Y$ mit $y \geqq \mu(y) \cdot d$ für alle $y \in P(M(v))$.*

Zum Beweis gibt es wegen $M(v) \subset Y$ sicher $d_0 \in Y$ mit $a \geqq d_0$ für alle $a \in M(v)$. Für $y \in P(M(v))$ ist dann

$$y = \sum_{a\in M(v)} \lambda(a)\, a \geqq \sum_{a\in M(v)} \lambda(a)\, d_0 =: \lambda \cdot d_0\,.$$

Man wählt festes $b \in D$ und bekommt

$$\mu(y) \leqq \sigma(b, y) = \sum_{a\in M(v)} \lambda(a)\, \sigma(a, b) \leqq \gamma_7 \cdot \lambda\,.$$

Beide Ungleichungen zusammen ergeben die Behauptung.

2. Betrachten wir jetzt spezielle in Y enthaltene Mengen D: Man wähle eine Untergruppe Ω von $\Sigma(Y)$, ein $a \in Y$ und definiere D durch

$$D := \{\Phi a; \Phi \in \Omega\}.$$

D ist auch für diskontinuierliche Gruppe Ω im allgemeinen in X nicht diskret und — falls es diskret ist — nicht zulässig. Umgekehrt hatten wir aber in § 5.4 gesehen, daß für diskretes D die Gruppe Ω sicher diskontinuierlich ist.

Satz 5. *Sei Ω eine Untergruppe von $\Sigma(Y)$, a ein Punkt von Y und $D := \{\Phi a; \Phi \in \Omega\}$. Ist D zulässig, so*

a) *ist $V(D)/\Omega^*$ endlich,*

b) *gibt es einen Fundamentalbereich F von Ω und $d \in Y$ mit $y \geqq \mu(y) \cdot d$ für alle $y \in F$,*

c) *ist der Durchschnitt von F mit der Menge der $y \in Y$, $\omega(y) \leqq \xi$, beschränkt.*

Wegen Teil a) gelten außerdem alle Aussagen von Satz 4 und für F kann der Fundamentalbereich $F(D, \Omega) \cap Y$ genommen werden. $\omega(y)$ bezeichnet eine Norm von Y nach § 1.4.

Beweis: Teil a) war bereits in § 5.3 bewiesen. $F = F(D, \Omega) \cap Y$ liegt in der Vereinigung von endlich vielen vollkommenen Pyramiden $P(M(v_l))$. Nach 1 gibt es für jedes l ein $d_l \in Y$ mit $y \geqq \mu(y)\, d_l$, $y \in P(M(v_l))$. Bestimmt man $d \in Y$, so daß $d_l \geqq d$ für alle l gilt, dann hat man Teil b). Wäre Teil c) nicht richtig, so gibt es Folge $y_k \in F$, für die $|y_k|$ über alle Grenzen wächst. Man darf wegen a) annehmen, daß alle y_k in einer vollkommenen Pyramide $P(M(v))$ enthalten sind:

$$y_k = \sum_{a \in M(v)} \lambda_k(a)\, a, \quad \lambda_k(a) \geqq 0.$$

Für wenigstens ein a strebt dann $\lambda_k(a)$ gegen Unendlich und es ist für dieses a und hinreichend große k notwendig $y_k \geqq a$. Eigenschaft (N. 4) einer Norm gibt nun einen Widerspruch.

3. Die vorstehenden Überlegungen wenden wir auf ein einfaches Beispiel an: Als Positivitätsbereich Y nehmen wir den trivialen Bereich nach PB, § 11a. Y besteht aus den n-reihigen Spaltenvektoren mit positiven Komponenten und ist ein Positivitätsbereich im R^n bezüglich der Bilinearform

$$\sigma(a, b) := \sum_{k=1}^{n} \alpha^{(k)} \beta^{(k)}.$$

Zur Abkürzung haben wir dabei für Vektoren $a, b, x, y, \ldots \in R^n$ mit $\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}, \xi^{(k)}, \eta^{(k)}$ ihre Komponenten bezeichnet. Für zwei Punkte $a, b \in R^n$ erklären wir ein Produkt $ab \in R^n$ durch $(ab)^{(k)} := \alpha^{(k)} \beta^{(k)}$. Jedem $a \in Y$ wird durch $x \to \Phi(a)x := ax$ eine lineare Transformation $\Phi(a)$ von X zugeordnet, die offenbar ein Automorphismus von Y ist. $\Sigma(Y)$ wird durch die $\Phi(a)$, $a \in Y$, und Permutationen der Komponenten erzeugt. Jedes $\Phi \in \Sigma(Y)$ kann in der Gestalt $\Phi = \Pi \cdot \Phi(a)$ mit $a \in Y$ und einer Permutation Π geschrieben werden. Setzen wir

$$\omega(y) = \eta^{(1)} \cdot \ldots \cdot \eta^{(n)}, \; \chi(\Phi) := \omega(a) \quad \text{falls} \quad \Phi = \Pi \cdot \Phi(a),$$

dann ist χ ein Charakter von $\Sigma(Y)$ und ω eine Norm von Y bezüglich χ.

K sei ein total-reeller algebraischer Zahlkörper vom Grade n über dem Körper P der rationalen Zahlen und $\alpha = \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ die zu $\alpha \in K$ konjugierten Zahlen in den entsprechenden konjugierten Körpern. Jedem $\alpha \in K$ kann ein Vektor $w(\alpha) \in R^n$ zugeordnet werden durch die Festsetzung, daß $w(\alpha)$ die Komponenten $\alpha^{(k)}$ hat. Für $\Phi(w(\alpha))$ schreiben wir auch $\Phi(\alpha)$. $\omega(w(\alpha))$ stimmt mit der Körpernorm von α und $\sigma(w(\alpha), w(\beta))$ mit der Körperspur von $\alpha\beta$ überein.

4. Sei jetzt $\mathfrak{E}$ eine Gruppe von total-positiven Einheiten von K, die in der Gruppe aller Einheiten einen endlichen Index hat. Vermöge

$$\Omega := \{\Phi(\varepsilon); \varepsilon \in \mathfrak{E}\}, \quad D := \{w(\varepsilon); \varepsilon \in \mathfrak{E}\}$$

wird eine Untergruppe Ω von $\Sigma(Y)$ und eine Teilmenge D von Y erklärt. *Wir zeigen, daß das so eingeführte D zulässig ist.* b sei ein Randpunkt von Y, d. h. wenigstens eine Komponente $\beta^{(k)}$ verschwindet. Da der Index von $\mathfrak{E}$ in der Gruppe aller Einheiten endlich ist, gibt es $\varepsilon \in \mathfrak{E}$, dessen Konjugierten $\varepsilon^{(l)}$, $l \neq k$, dem Betrage nach kleiner als 1 sind. Für $m \to \infty$ strebt $\sigma(w(\varepsilon^m), b)$ gegen Null. Da $w(\varepsilon^m)$ zu D gehört, ist dies nach § 3.2 die Behauptung.

Satz 5 darf nun angewendet werden und gibt zusammen mit Satz 4 einen Fundamentalbereich von Ω in Y mit den dort formulierten Eigenschaften.

5. Man kann zeigen, daß die (bezüglich D) vollkommenen Punkte von Körperzahlen herrühren, genauer: zu jedem vollkommenen v mit $\mu(v) = 1$ gibt es eine natürliche Zahl γ und α aus dem Inversen $\mathfrak{d}^{-1}$ der Differente $\mathfrak{d}$ von K, so daß $v = \frac{1}{\gamma} w(\alpha)$[2]). Die (bezüglich D) vollkommenen Punkte von Y können damit rein algebraisch in K ausgezeichnet werden: Sie entsprechen eineindeutig den total-positiven Zahlen $\alpha \in K$, für die es n über P linear unabhängige Einheiten $\eta_k \in \mathfrak{E}$ gibt mit

$$\mathrm{Spur}(\eta_k\alpha) = \inf\{\mathrm{Spur}(\varepsilon\alpha); \varepsilon \in \mathfrak{E}\}.$$

Die algebraische Bedeutung dieser „vollkommenen" Zahlen $\alpha \in K$ oder besser der Hauptideale (α) ist meines Wissens bisher nicht bekannt.

Für den einfachsten Fall, daß $K = P(\sqrt{d})$, $d > 0$, ein reell-quadratischer Zahlkörper ist, kann man die vollkommenen Punkte angeben. Wir teilen auch dieses Ergebnis ohne Beweis mit: Sei $\varepsilon_0 > 1$ die Grundeinheit von K und $\varepsilon = \varepsilon_0$ oder $\varepsilon = \varepsilon_0^2$ je nachdem ob ε_0 die Körpernorm $+1$ oder -1 hat. Als $\mathfrak{E}$ nehmen wir die durch ε erzeugte Gruppe. Die Punkte

$$\lambda \cdot w\left(\frac{\varepsilon^k}{1+\varepsilon}\right), \quad \lambda > 0, k = 0, \pm 1, \ldots$$

geben dann alle vollkommenen Punkte.

§ 7. Gitter und vollkommene Punkte

1. Bei einem Teil der später zu machenden Anwendungen gilt über die bisher benutzten Eigenschaften hinaus, daß D in einem Gitter G von X enthalten ist. In diesem Paragraphen wollen wir darlegen, wie sich diese zusätzliche Eigenschaft auf die allgemeine Situation auswirkt.

[2]) Siehe § 7.2.

Eine Teilmenge G des n-dimensionalen Vektorraumes X heißt ein *Gitter in* X, wenn mit a und b auch $a - b$ zu G gehört, $\dim G = n$ gilt und G in X diskret ist. Zu jedem Gitter G in X gibt es bekanntlich eine Basis $u_1, \ldots, u_n$ von X derart, daß man die Punkte a von G und nur diese in der Gestalt

$$a = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k, \quad \lambda_k \text{ ganz-rational},$$

schreiben kann. Sind n linear unabhängige Vektoren $u_1, \ldots, u_n$ gegeben, dann bilden die Vektoren a, die sich in der angegebenen Weise darstellen lassen, ein Gitter in X. Wir nennen es das von den $u_1, \ldots, u_n$ aufgespannte oder erzeugte Gitter. Mit λG möge das Gitter der Punkte λa, $a \in G$, bezeichnet werden. Ist G_0 ein Teilgitter von G, d. h. ein Gitter, welches in G enthalten ist, dann gibt es eine natürliche Zahl γ mit $\gamma G \subset G_0$.

Mit G^* wollen wir das (bezüglich der Bilinearform σ) *komplementäre* (oder polare) Gitter bezeichnen, d. h. die Menge der $b \in X$, für die $\sigma(a, b)$ für alle $a \in G$ ganz-rational ausfällt. Offenbar ist $G_2^* \subset G_1^*$ für zwei Gitter $G_1 \subset G_2$ und $(\lambda G)^* = \frac{1}{\lambda} G^*$.

Die Gruppe der linearen Transformationen Φ von X, die das Gitter G auf sich abbilden, werde mit $\Sigma(G)$ bezeichnet, ferner $\Sigma(Y; G) := \Sigma(Y) \cap \Sigma(G)$ gesetzt. Da $\Sigma(Y; G)$ eine diskrete Untergruppe der Gruppe der Isometrien von Y ist, zeigt ein allgemeiner Satz (vgl. [4]), daß $\Sigma(Y; G)$ in Y diskontinuierlich ist.

2. Wir schließen jetzt an die Überlegungen der §§ 1—4 an und denken uns wieder eine Teilmenge D von $\overline{Y} - \{0\}$ gegeben, von der wir voraussetzen, daß sie in einem Gitter G enthalten ist. D ist dann von selbst diskret in X. Vorläufig wird nicht vorausgesetzt, daß D zulässig ist.

Zu jedem vollkommenen $v \in Y$ gibt es eine natürliche Zahl γ, so daß $v_1 := \frac{\gamma}{\mu(v)} v$ im komplementären Gitter G^* enthalten ist. Zum Beweis wählen wir $a_1, \ldots, a_n$ linear unabhängig aus $M(v)$, bezeichnen mit G_0 das von diesen a_k erzeugte Teilgitter von G und wählen nach 1 eine natürliche Zahl γ mit $\gamma G \subset G_0$. Für alle $a \in G$ ist

$$\gamma a = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k, \quad \lambda_k \text{ ganz-rational},$$

und man hat

$$\sigma(v_1, a) = \frac{1}{\mu(v)} \sigma(v, \gamma a) = \frac{1}{\mu(v)} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sigma(v, a_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k .$$

Die rechte Seite ist ganz-rational und daher liegt v_1 in G^*.

3. Wir betrachten jetzt diejenigen Punkte des Gitters G, die gleichzeitig in einer vollkommenen Pyramide enthalten sind:

Lemma 8. *Ist D in einem Gitter G enthalten, so gibt es zu jedem vollkommenen $v \in Y$ ein $d = d(v) \in Y$ mit $a \geqq d$ für alle a aus $P(M(v)) \cap Y \cap G$.*

Beweis: Nach § 4.1 ist $P(M(v))$ endliche Vereinigung von Pyramiden $P(M)$, bei denen die Mengen M aus n linear unabhängigen Vektoren bestehen.

Es genügt daher, wenn gezeigt wird, daß es zu jedem solchen M ein $d_M \in Y$ gibt mit $a \geqq d_M$ für alle $a \in P(M) \cap Y \cap G$. Denn dann gibt es auch $d \in Y$ mit $d_M \geqq d$ für alle vorkommenden Mengen M.

Bezeichne G_0 das durch die Vektoren $a_1, \ldots, a_n$ von M erzeugte Teilgitter von G und sei die natürliche Zahl γ nach 1 so gewählt, daß $\gamma G \subset G_0$ gilt. Für $a \in G$ hat man

$$\gamma a = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\,, \quad \lambda_k \text{ ganz-rational}\,,$$

und für $a \in P(M) \cap Y$ sind die λ_k nicht negativ und $a \neq 0$. Man hat daher

$$a \geqq \frac{1}{\gamma} \sum_{\substack{k=1\\ \lambda_k \neq 0}}^{n} a_k =: d_a\,.$$

$d_a \neq 0$ liegt in $\overline{Y}$. Würde d_a nicht zu Y gehören, dann gibt es $0 \neq b \in \operatorname{Rd} Y$ mit $\sigma(b, d_a) = 0$, d. h. $\sigma(b, a_k) = 0$ für diejenigen k mit $\lambda_k \neq 0$. Dann wäre aber auch $\sigma(b, a) = 0$ im Widerspruch zu $a \in Y$. d_a hängt noch von a ab, alle vorkommenden Punkte d_a haben aber die Form

$$\frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k\,, \quad \varepsilon_k = 0 \quad \text{oder} \quad 1\,,$$

und es gibt zu M nur endlich viele solche d_a, d. h. man kann $d_M \in Y$ finden mit $d_a \geqq d_M$ für alle a. Damit ist Lemma 8 bewiesen.

Dieses Lemma zeigt, daß für alle in $P(M(v)) \cap Y$ gelegenen Gitterpunkte $a \in G$ und alle $y \in \overline{Y}$ eine Abschätzung $\sigma(a, y) \geqq \sigma(d, y) \geqq \varrho(d)\,|y|$ statt hat. Eine duale Aussage macht

Lemma 9. *Für eine in einem Gitter G enthaltene Menge D gibt es zu jedem vollkommenen v ein $d = d(v) \in Y$ mit $\sigma(b, y) \geqq \sigma(d, y)$ für alle $y \in P(M(v))$ und alle $b \in G^* \cap Y$.*

Beweis: Sei

$$y = \sum_{a \in M(v)} \lambda(a) a\,, \quad \lambda(a) \geqq 0\,,$$

dann ist für $b \in Y \cap G^*$

$$\sigma(b, y) \geqq \sum_{a \in M(v)} \lambda(a)\,,$$

denn es ist $\sigma(b, a) \geqq 1$, da wegen $D \subset G$ und $b \in G^*$ die Zahl $\sigma(b, a)$ ganz-rational und wegen $D \subset \overline{Y} - \{0\}$, $b \in Y$ sogar positiv ist. Man bestimmt $d \in Y$ mit $1 \geqq \sigma(d, a)$ für alle $a \in M(v)$ und hat

$$\sigma(b, y) \geqq \sum_{a \in M(v)} \lambda(a)\, \sigma(d, a) = \sigma(d, y)\,.$$

4. Abgesehen von Satz 5 verwenden wir jetzt zum ersten Male eine Norm $\omega(y)$ von Y (bezüglich eines Charakters χ) nach § 1.4. Wir hatten gesehen, daß $\omega(y) = 0$ für $y \in \operatorname{Rd} Y$ gesetzt werden kann. Obgleich die Menge der $y \in Y$ mit $\omega(y) \leqq \xi$ im allgemeinen nicht beschränkt ist, gilt

Lemma 10. *Es sei D in einem Gitter G enthalten. Für jedes vollkommene v ist die Anzahl der $a \in P(M(v)) \cap Y \cap G$ mit $\omega(a) \leqq \xi$ endlich und die Menge der Zahlen $\omega(a)$ für $a \in P(M(v)) \cap G$ diskret.*

Beweis: Sei v vollkommen. Nach Lemma 8 gibt es $d \in Y$ mit $a \geqq d$ für alle $a \in P(M(v)) \cap Y \cap G$. Nach Eigenschaft (N. 4) einer Norm ist die Menge dieser a mit $\omega(a) \leqq \xi$ beschränkt, ihre Anzahl daher endlich.

Zeigen wir nun, daß 0 kein Häufungspunkt von $\omega(a)$, $a \in P(M(v)) \cap G$ ist. Anderenfalls gäbe es eine Folge $a_k \in P(M(v)) \cap G$ mit $\omega(a_k) \to 0$, $\omega(a_k) > 0$. Die a_k liegen in Y und der bereits bewiesene Teil garantiert, daß unter den a_k nur endlich viele verschiedene Punkte vorkommen. Es gibt somit $\gamma_8 > 0$ derart, daß aus $a \in P(M(v)) \cap G$ entweder $\omega(a) = 0$ oder $\omega(a) \geqq \gamma_8$ folgt. Wäre nun für eine Folge $a_k \in P(M(v)) \cap G$ die Folge $\omega(a_k)$ gegen α konvergent, so darf man $\alpha \neq 0$ annehmen und hat $\omega(a_k) \leqq \alpha + 1$ für hinreichend große k. Die erste Aussage des Lemmas zieht wieder $\omega(a_k) = \alpha$ für hinreichend große k nach sich.

5. Die bisherigen Ergebnisse verwenden wir zum Beweis eines abschließenden Satzes. $F := F(D, \Omega) \cap Y$ bezeichne den Fundamentalbereich von Ω nach Satz 3 und Satz 4. Eine wesentlich weitergehende Aussage als in Satz 4 hat man in

Satz 6. *Es sei G ein Gitter in X, $D \subset \overline{Y} \cap G - \{0\}$ zulässig und Ω eine Untergruppe von $\Sigma(Y; G)$ mit $\Omega D = D$. Ist $V(D)/\Omega^*$ endlich, so gilt*

a) *Es gibt ein $d \in Y$ mit $a \geqq d$ für alle $a \in F \cap G$.*

b) *Es gibt ein $d \in Y$ mit $\sigma(a, y) \geqq \sigma(d, y)$ für alle $a \in Y \cap G^*$ und $y \in F$.*

c) *Die Anzahl der $a \in F \cap G$ mit $\omega(a) \leqq \xi$ ist endlich.*

Korollar. *Gilt $\chi(\Phi) = 1$ für alle $\Phi \in \Omega$, dann ist die Anzahl der nach Ω inäquivalenten $a \in Y \cap G$ mit $\omega(a) \leqq \xi$ endlich.*

Denn dann geht die Menge der $y \in Y$ mit $\omega(y) \leqq \xi$ bei den Abbildungen $y \to \Phi y$, $\Phi \in \Omega$, in sich über und ein Vertretersystem der nach Ω inäquivalenten $a \in Y \cap G$ findet man in F. Das Korollar folgt daher aus Teil c) des Satzes.

Man kann zeigen, daß unter den anderen Voraussetzungen des Satzes die Endlichkeit von $V(D)/\Omega^*$ mit Teil a) (für irgendeinen Bereich F, der nur der Forderung (F. 2) genügen muß) gleichbedeutend ist. Aber auch die Aussage des Korollars zieht die Endlichkeit von $V(D)/\Omega^*$ nach sich, sofern man die zugelassenen Positivitätsbereiche geringfügig einschränkt und eine zusätzliche Voraussetzung an D stellt. Fragestellungen dieser Art sind zwar von prinzipiellem Interesse, wir wollen hier jedoch nicht weiter darauf eingehen.

Der *Beweis von Satz* 6 gestaltet sich nach unseren Vorbereitungen recht einfach. Zuerst darf Satz 4 angewendet werden, F ist also in der Vereinigung von endlich vielen vollkommenen Pyramiden enthalten. Für jede dieser Pyramiden waren in den Lemmata 8—10 die Aussagen a) bis c) nachgewiesen. Nach eventueller Abänderung von $d \in Y$ erhält man daher alle Aussagen des Satzes.

6. Im § 5.1 hatten wir gesehen, daß einige wichtige Aussagen über Gruppen gefolgert werden können, wenn die Gruppe einen Fundamentalbereich mit

endlich vielen Nachbarn besitzt. In Satz 4 haben wir dafür eine hinreichende Bedingung angegeben. Es soll nun eine weitere Konsequenz abgeleitet werden. Nehmen wir an, daß folgende Situation vorliegt: G sei ein Gitter in X, Ω eine Untergruppe von $\Sigma(Y, G)$, zu der es einen Fundamentalbereich F mit endlich vielen Nachbarn gibt. *Es existiert dann ein Normalteiler $\hat{\Omega}$ von Ω mit endlichem Index in Ω ohne Fixpunkte.* Ein Punkt $x \in Y$ heißt dabei ein *Fixpunkt* von Ω, wenn es ein von der Identität verschiedenes $\Phi \in \Omega$ mit $\Phi x = x$ gibt.

Zum Beweis bezeichnen wir mit Ω_F die nach Voraussetzung endliche Menge der $\Phi \in \Omega$ mit $\Phi F \cap F \neq \emptyset$. Ist x ein Fixpunkt von Ω, dann gibt es $\Phi \in \Omega$ mit $\Phi x = x$ und Φ ist nicht die Identität. Man kann $\Psi \in \Omega$ so wählen, daß Ψx in F liegt und hat dann $\Psi \Phi \Psi^{-1} \in \Omega_F$.

Für natürliche Zahl ν definiere man nun die Gruppen

$$\Omega_\nu := \{\Phi; \Phi \in \Omega, \Phi a - a \in \nu G\}\text{ [3]}.$$

Man prüft nach, daß alle Ω_ν Normalteiler von endlichem Index in Ω sind. Wir zeigen, daß eine der Gruppen Ω_ν schon fixpunktfrei ist. Anderenfalls hätte jede Gruppe Ω_ν wenigstens einen Fixpunkt x_ν, d. h. es gibt von der Identität verschiedene $\Phi_\nu \in \Omega_\nu$ mit $\Phi_\nu x_\nu = x_\nu$. x_ν ist auch Fixpunkt von Ω, und nach obigen Überlegungen gibt es $\Psi_\nu \in \Omega$ mit $\Psi_\nu \Phi_\nu \Psi_\nu^{-1} \in \Omega_F$. Da Ω_F endlich ist, gilt $\Psi_\nu \Phi_\nu \Psi_\nu^{-1} = \Lambda \in \Omega_F$ für unendlich viele ν, d. h. Λ liegt in unendlich vielen Gruppen Ω_ν. Für diese ist dann $\frac{1}{\nu}(\Lambda a - a) \in G$ für $a \in G$. Da G diskret ist, folgt $\Lambda a = a$ und da dies für alle $a \in G$ gilt, ist Λ die Identität im Widerspruch dazu, daß alle Φ_ν von der Identität verschieden sind.

§ 8. Reelle positiv definite quadratische Formen

1. Im nächsten Paragraphen werden wir die bisherigen Überlegungen auf quadratische Formen über beliebigen algebraischen Zahlkörpern anwenden. Obwohl der dort betrachtete Fall die positiv definiten quadratischen Formen über den ganz-rationalen Zahlen enthält, erscheint es doch zweckmäßig, die reellen quadratischen Formen als historisch und sachlich wichtigstes Beispiel an dieser Stelle explizit zu behandeln. Die Methode tritt in diesem Falle frei von Komplikationen klarer hervor. Um jedoch den Umfang der Untersuchungen in Grenzen zu halten, wird an einigen Stellen auf die Beweise im nächsten Paragraphen verwiesen werden.

Das Objekt unserer Untersuchung ist der Positivitätsbereich $Y_R^{(m)}$ der reellen symmetrischen positiv definiten m-reihigen Matrizen $\mathfrak{Y}$. Der zugrunde liegende Vektorraum X der Dimension

$$n := \frac{m(m+1)}{2}$$

über R besteht aus allen reellen symmetrischen m-reihigen Matrizen $\mathfrak{Y}$ mit der Bilinearform

$$\sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) := \operatorname{Spur}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}).$$

[3]) Das sind die Hauptkongruenzuntergruppen von Ω im üblichen Sinne.

Die Punkte von X, d. h. die symmetrischen Matrizen von m Zeilen bezeichnen wir jetzt mit großen Frakturbuchstaben und setzen z. B. $\sigma(a, b) = \sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, $\omega(y) = \omega(\mathfrak{Y})$ usw. Nach PB, § 11b, ist (in geänderter Bezeichnung) die Teilmenge $Y_R^{(m)}$ von X, die aus den positiv definiten Matrizen besteht, ein Positivitätsbereich in X.

Bezeichne $GL(m, R)$ die Gruppe der m-reihigen umkehrbaren reellen Matrizen. Für $\mathfrak{R} \in GL(m, R)$ wird durch

$$\mathfrak{Y} \to \Phi(\mathfrak{R})\,\mathfrak{Y} := \mathfrak{R}'\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{R}$$

eine lineare Transformation $\Phi(\mathfrak{R})$ von X erklärt. $\Phi(\mathfrak{R})$ ist ein Automorphismus von $Y_R^{(m)}$ und es gilt

$$\Phi(\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2) = \Phi(\mathfrak{R}_2)\,\Phi(\mathfrak{R}_1)\,, \quad \Phi^*(\mathfrak{R}) = \Phi(\mathfrak{R}')\,.$$

Nach Ch. Hertneck [1] stimmt $\Sigma(Y_R^{(m)})$ mit der Gruppe der $\Phi(\mathfrak{R})$, $\mathfrak{R} \in GL(m, R)$, überein. Als Charakter χ von $\Sigma(Y_R^{(m)})$ bzw. Norm ω von $Y_R^{(m)}$ wählen wir (im Gegensatz zu PB)

$$\omega(\mathfrak{Y}) := |\mathfrak{Y}|\,, \quad \chi(\Phi) := |\mathfrak{R}|^2 \quad \text{falls} \quad \Phi = \Phi(\mathfrak{R})\,.$$

2. Mit D kürzen wir in diesem Paragraphen die Menge der Matrizen $\mathfrak{g}\mathfrak{g}'$ ab, wo $\mathfrak{g}$ alle von Null verschiedenen Vektoren aus dem Einheitsgitter des R^m durchläuft. Nennt man eine Matrix (oder einen Vektor) *ganz-rational*, wenn alle Komponenten ganz-rational sind, dann besteht D also aus allen Matrizen $\mathfrak{g}\mathfrak{g}'$ mit ganz-rationalen $\mathfrak{g} \neq 0$. D ist offenbar in $\overline{Y}_R^{(m)} - \{0\}$ enthalten und in X diskret. In der alten Bezeichnung ist $\mu(\mathfrak{Y})$ das Infimum der Zahlen $\mathfrak{g}'\mathfrak{Y}\mathfrak{g}$ für ganz-rationale $\mathfrak{g} \neq 0$. Bezeichne noch $\hat{M}(\mathfrak{Y})$ die Menge der ganz-rationalen $\mathfrak{g}$ mit $\mu(\mathfrak{Y}) = \mathfrak{g}'\mathfrak{Y}\mathfrak{g}$, d. h. die Menge derjenigen $\mathfrak{g}$, für die $\mathfrak{g}\mathfrak{g}'$ zu $M(\mathfrak{Y})$ gehört. Es ist seit Hermite wohlbekannt (aber wir werden es in Lemma 11 erneut beweisen), daß eine Abschätzung

$$\frac{\mu^m(\mathfrak{Y})}{|\mathfrak{Y}|} \leq \frac{2^{2m}}{\varrho_m^2}\,, \quad \mathfrak{Y} \in Y_R^{(m)},$$

gültig ist[4]). Da $|\mathfrak{Y}|$ gegen Null geht, wenn $\mathfrak{Y}$ gegen einen Randpunkt von $Y_R^{(m)}$ konvergiert, gilt dies auch für $\mu(\mathfrak{Y})$ und daher ist D zulässig im Sinne § 3.2.

Nach G. Voronoï [10] ist die Anzahl der Elemente von $\hat{M}(\mathfrak{Y})$ für $\mathfrak{Y} \in Y_R^{(m)}$ beschränkt. In einem allgemeineren Zusammenhang werden wir dies in Lemma 12 beweisen und zeigen, daß die Anzahl der Elemente von $\hat{M}(\mathfrak{Y})$ durch $2(2^m - 1)$ beschränkt ist.

3. In der Definition der vollkommenen $\mathfrak{Y}$ besteht ein Unterschied zu den Arbeiten von G. Voronoï: Nach unserer Definition heißt eine Matrix $\mathfrak{Y} > 0$ *vollkommen*, falls es $n = \dfrac{m(m+1)}{2}$ Vektoren $\mathfrak{g}_k$ aus $\hat{M}(\mathfrak{Y})$ gibt, für die die Matrizen $\mathfrak{g}_k\mathfrak{g}_k'$ linear unabhängig sind. G. Voronoï hingegen nennt eine Matrix bzw. die zugehörige quadratische Form *parfaite* (= vollkommen), falls es m linear unabhängige Vektoren in $\hat{M}(\mathfrak{Y})$ gibt. Wir wollen zeigen, daß *jede vollkommene Matrix auch parfaite im Sinne von* Voronoï *ist*, d. h. es gilt: *Für*

[4]) ϱ_m bezeichnet das Volumen der m-dimensionalen Einheitskugel.

vollkommenes $\mathfrak{Y}$ *ist* $\dim \hat{M}(\mathfrak{Y}) = m$. Wäre das nämlich falsch, so gibt es $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_{m-1} \in \hat{M}(\mathfrak{Y})$ derart, daß sich jedes $\mathfrak{g} \in \hat{M}(\mathfrak{Y})$ als Linearkombination der $\mathfrak{g}_k$ darstellen läßt: $\mathfrak{g} = \lambda_1(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{g}_1 + \cdots + \lambda_{m-1}(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{g}_{m-1}$. Wir bestimmen eine reelle symmetrische Matrix $\mathfrak{T} \neq 0$ mit $\mathfrak{g}_k' \mathfrak{T} \mathfrak{g}_l = 0$ für $1 \leq k \leq l \leq m-1$ und erhalten

$$\sigma(\mathfrak{g}\mathfrak{g}', \mathfrak{T}) = \mathfrak{g}' \mathfrak{T} \mathfrak{g} = \sum_{k,l} \lambda_k(\mathfrak{g}) \lambda_l(\mathfrak{g}) \mathfrak{g}_k' \mathfrak{T} \mathfrak{g}_l = 0 .$$

Da aber $\mathfrak{Y}$ vollkommen vorausgesetzt war, gibt es unter den Matrizen $\mathfrak{g}\mathfrak{g}'$ sicher n linear unabhängige und das würde $\mathfrak{T} = 0$ nach sich ziehen.

4. Wir zeigen weiter, daß für je m Vektoren $\mathfrak{g}_k \in \hat{M}(\mathfrak{Y})$ stets

$$\|(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_m)\| \leq \frac{2^m}{\varrho_m}$$

gilt[4]). Man darf hier annehmen, daß die $\mathfrak{g}_k$ linear unabhängig sind und setzt dann $\mathfrak{B} := (\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_m)$. Die Diagonalelemente der Matrix $\mathfrak{B}' \mathfrak{Y} \mathfrak{B}$ haben die Form $\mathfrak{g}_k' \mathfrak{Y} \mathfrak{g}_k = \mu(\mathfrak{Y})$ und nach dem Hadamardschen Determinantensatz erhält man $|\mathfrak{B}' \mathfrak{Y} \mathfrak{B}| \leq \mu^m(\mathfrak{Y})$. Das ist zusammen mit der in 2 formulierten Ungleichung die Behauptung.

5. Nun wird eine Untergruppe Ω von $\Sigma(Y_R^{(m)})$ erklärt. Eine Matrix $\mathfrak{U}$ nennen wir *unimodular,* wenn $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^{-1}$ ganz-rational sind, und bezeichnen mit Ω die Gruppe der $\Phi(\mathfrak{U})$ für unimodulares $\mathfrak{U}$. Offenbar ist

$$\Omega D = D \quad \text{und} \quad \Omega^* = \Omega .$$

Sei weiter G die Menge der ganz-rationalen Matrizen aus X. G ist ein Gitter in X und man hat

$$D \subset G \quad \text{und} \quad \Omega \subset \Sigma(Y_R^{(m)}; G) .$$

Das komplementäre Gitter G^* besteht aus allen halbganzen Matrizen von X. Wie üblich soll hierbei eine symmetrische Matrix $\mathfrak{T} = (\tau_{kl})$ *halbganz* genannt werden, wenn τ_{kk} und $2\tau_{kl}$ ganz-rational sind.

Zur Anwendung der allgemeinen Theorie fehlt noch der Nachweis, daß es nur endlich viele nach Ω^* inäquivalente vollkommene $\mathfrak{Y} > 0$ mit $\mu(\mathfrak{Y}) = 1$ gibt. Dies wird eine Konsequenz des folgenden arithmetischen Hilfssatzes sein: *Es gibt eine endliche Menge* $\bar{A}$ *von ganz-rationalen Vektoren des* R^m, *so daß zu jedem vollkommenen* $\mathfrak{Y} > 0$ *ein unimodulares* $\mathfrak{U}$ *existiert mit* $\dim \hat{M}(\mathfrak{Y}) \cap$ $\cap\, \mathfrak{U}' \bar{A} = m$.

Zum Beweis wählen wir für vollkommenes $\mathfrak{Y} > 0$ nach 3 linear unabhängige Vektoren $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_m$ aus $\hat{M}(\mathfrak{Y})$ und bestimmen eine unimodulare Matrix $\mathfrak{U}$ mit

$$\mathfrak{a}_k := \mathfrak{U}'^{-1} \mathfrak{g}_k = \begin{pmatrix} \alpha_k^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha_k^{(k)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \alpha_k^{(\varrho)} < \alpha_k^{(k)}, \quad 1 \leq \varrho < k .$$

Setzen wir $\mathfrak{Y}_1 := \mathfrak{U}\mathfrak{Y}\mathfrak{U}'$, so liegen die $\mathfrak{a}_k$ in $\tilde{M}(\mathfrak{Y}_1)$ und sind linear unabhängig. Nach 4 folgt

$$\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(2)}\dots\alpha_m^{(m)} \leqq \frac{2^m}{\varrho_m},$$

d. h. alle $\alpha_k^{(k)}$ und somit auch die $\alpha_k^{(\varrho)}$ sind durch $\frac{2^m}{\varrho_m}$ beschränkt. Bezeichnet $\tilde{A}$ die Menge der ganz-rationalen Vektoren, deren Komponenten durch $\frac{2^m}{\varrho_m}$ beschränkt sind, dann enthält $\tilde{M}(\mathfrak{Y}_1) \cap \tilde{A}$ m linear unabhängige Vektoren. Wegen $\tilde{M}(\mathfrak{Y}_1) = \mathfrak{U}'^{-1}\tilde{M}(\mathfrak{Y})$ ist das die Behauptung.

6. Jetzt können wir nachweisen, daß *die Anzahl der nach Ω^* inäquivalenten vollkommenen $\mathfrak{Y} > 0$ mit $\mu(\mathfrak{Y}) = 1$ endlich ist.* Wir wählen die endliche Menge $\tilde{A}$ nach 5 und bezeichnen mit A die Menge der Matrizen $\mathfrak{g}\mathfrak{g}'$ für $\mathfrak{g} \in \tilde{A}$. Zu vollkommener Matrix $\mathfrak{Y} > 0$ möge $\mathfrak{U}$ nach 5 bestimmt sein. Für $\mathfrak{g}\mathfrak{g}' \in M(\mathfrak{U}\mathfrak{Y}\mathfrak{U}') \cap A$ ist wegen

$$M(\mathfrak{U}\mathfrak{Y}\mathfrak{U}') = \mathfrak{U}'^{-1}M(\mathfrak{Y})\mathfrak{U}^{-1}, \quad \tilde{M}(\mathfrak{U}\mathfrak{Y}\mathfrak{U}') = \mathfrak{U}'^{-1}\tilde{M}(\mathfrak{Y})$$

der Vektor $\mathfrak{U}'\mathfrak{g}$ in $\tilde{M}(\mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{U}'\tilde{A}$ enthalten, d. h. es gibt m Matrizen $\mathfrak{g}_k\mathfrak{g}_k' \in M(\mathfrak{U}\mathfrak{Y}\mathfrak{U}') \cap A$, für die die Vektoren $\mathfrak{g}_k$ linear unabhängig sind. Die Matrix

$$\mathfrak{A} := \sum_{k=1}^{m} \mathfrak{g}_k\mathfrak{g}_k'$$

ist positiv definit, denn für $0 \neq \mathfrak{x} \in R^m$ gilt

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \sum_{k=1}^{m} (\mathfrak{x}'\mathfrak{g}_k)^2 > 0\,.$$

Zu jedem vollkommenen $\mathfrak{Y} > 0$ gibt es daher $\Phi \in \Omega$, so daß $M(\Phi^*\mathfrak{Y}) \cap A$ m Matrizen enthält, deren Summe in $Y_k^{(m)}$ liegt. Damit sind die Voraussetzungen des im § 5.8 formulierten Kriteriums erfüllt, $V(D)/\Omega^*$ ist daher endlich.

7. Nach diesen Vorbereitungen sind alle in den §§ 1—5 und § 7 verwendeten Voraussetzungen erfüllt; speziell gelten die Sätze 4 und 6. Die wichtigsten jener Ergebnisse formulieren wir explizit:

Satz 7. *Bezüglich der Gruppe der Abbildungen $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{U}'\mathfrak{Y}\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}$ unimodular, existiert ein Fundamentalbereich F in der Menge der $\mathfrak{Y} > 0$,*

a) *der in der Vereinigung von endlich vielen vollkommenen Pyramiden enthalten ist,*

b) *dessen (in X) abgeschlossene Hülle aus endlich vielen regulären Pyramiden besteht,*

c) *der endlich viele Nachbarn hat und*

d) *für den die Anzahl der ganz-rationalen $\mathfrak{T}$ aus F mit beschränkter Determinante endlich ist.*

Hier waren die Aussagen a) bis c) in Satz 4 und d) in Satz 6 gezeigt. Teil d) liefert speziell, daß *die Anzahl der nach Ω^* inäquivalenten ganz-rationalen $\mathfrak{T} > 0$ mit beschränkter Determinante endlich ist.* Die bisher nicht formulierten Aussagen von Satz 6 besagen noch, daß es zwei positive Konstanten γ_9 und γ_{10}

so gibt, daß $\mathfrak{T} \geqq \gamma_9 \mathfrak{E}$ *für alle ganz-rationalen* $\mathfrak{T}$ *aus* F *und* $\mathrm{Spur}(\mathfrak{T}\mathfrak{Y}) \geqq \gamma_{10}$ $\mathrm{Spur}(\mathfrak{Y})$ *für alle galbganzen* $\mathfrak{T} > 0$ *und* $\mathfrak{Y}$ *aus* F erfüllt ist[5]).

Eine Auswertung der in 4 bewiesenen Ungleichung gibt für $m = 2$ eine Übersicht über alle vollkommenen Matrizen. Wir teilen das Ergebnis ohne Beweis mit: Im Falle $m = 2$ haben die vollkommenen $\mathfrak{Y} > 0$ die Form

$$\mathfrak{Y} = \lambda \mathfrak{U}' \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \mathfrak{U},$$

mit positiven λ und unimodularen $\mathfrak{U}$.

§ 9. Positiv definite quadratische Formen über algebraischen Zahlkörpern

1. Die Tragweite der in der vorliegenden Note verwendeten Methode wollen wir nun an einer weiteren Klasse von Beispielen darlegen. Wie im § 8 sei $Y_R^{(m)}$ der Positivitätsbereich der m-reihigen reellen symmetrischen positiv definiten Matrizen zur Bilinearform $\sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathrm{Spur}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ und Norm $\omega(\mathfrak{Y}) = |\mathfrak{Y}|$. Jede Matrix $\mathfrak{R}$ aus $GL(m, R)$ induzierte vermöge $\mathfrak{Y} \to \Phi(\mathfrak{R})\mathfrak{Y} := \mathfrak{R}'\mathfrak{Y}\mathfrak{R}$ einen Automorphismus von $Y_R^{(m)}$ und jeder Automorphismus kann auf diese Weise dargestellt werden. Den Vektorraum der m-reihigen symmetrischen reellen Matrizen kürzen wir jetzt mit $X_R^{(m)}$ ab.

Analog betrachten wir außerdem den Positivitätsbereich $Y_C^{(m)}$ der m-reihigen komplexen hermiteschen positiv definiten Matrizen (vgl. PB, § 11c). Der zugrunde liegende Vektorraum $X_C^{(m)}$ der Dimension $n = m^2$ über R besteht aus den m-reihigen komplexen hermiteschen Matrizen $\mathfrak{Y}$ mit der Bilinearform $\sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) := \mathrm{Spur}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$. Für $\mathfrak{Y} \in X_C^{(m)}$ sei $\omega(\mathfrak{Y}) := |\mathfrak{Y}|$. $GL(m, C)$ bedeute die Gruppe der m-reihigen komplexen umkehrbaren Matrizen. Wieder wird durch

$$\mathfrak{Y} \to \Phi(\mathfrak{R})\mathfrak{Y} := \bar{\mathfrak{R}}'\mathfrak{Y}\mathfrak{R}, \quad \mathfrak{R} \in GL(m, C),$$

eine lineare Transformation von $X_C^{(m)}$ erklärt und es ist

$$\Phi(\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2) = \Phi(\mathfrak{R}_2)\,\Phi(\mathfrak{R}_1), \quad \Phi^*(\mathfrak{R}) = \Phi(\bar{\mathfrak{R}}').$$

Π bezeichne die lineare Transformation $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{Y}'$ von $X_C^{(m)}$.

Die Menge $Y_C^{(m)}$ der hermitesch positiv definiten $\mathfrak{Y} \in X_C^{(m)}$ ist dann ein Positivitätsbereich von $X_C^{(m)}$. Die Automorphismen-Gruppe $\Sigma(Y_C^{(m)})$ wird nach [1] von den linearen Transformationen $\Phi(\mathfrak{R})$, $\mathfrak{R} \in GL(m, C)$ und Π erzeugt. Jeder Automorphismus Φ kann in der Gestalt $\Phi = \Phi(\mathfrak{R})\,\Pi^\varepsilon$, $\varepsilon = 0, 1$, $\mathfrak{R} \in GL(m, C)$, dargestellt werden. Der positive Charakter χ von $\Sigma(Y_C^{(m)})$ wird durch

$$\chi(\Phi) := \|\mathfrak{R}\|^2 \quad \text{falls} \quad \Phi = \Phi(\mathfrak{R})\,\Pi^\varepsilon$$

fixiert. $\omega(\mathfrak{Y})$ ist offenbar eine Norm von $Y_C^{(m)}$ (bezüglich χ).

2. Zwei nicht-negative ganz-rationale Zahlen r_1 und r_2 denken wir uns fest gegeben und führen zur Vereinfachung der Schreibweise den Begriff einer *allgemeinen Matrix* ein. Eine solche ist definiert, wenn eine geordnete Menge von

$$q := r_1 + 2r_2$$

[5]) $\mathfrak{E}$ bedeutet stets die Einheitsmatrix.

Matrizen $\mathfrak{A}^{[\nu]}$, $1 \leqq \nu \leqq q$, gleicher Zeilen- und gleicher Spaltenzahl mit folgenden Eigenschaften gegeben ist:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A}^{[\nu]} & \text{reell} & \text{für} \quad 1 \leqq \nu \leqq r_1\,, \\ \mathfrak{A}^{[\nu]} & \text{komplex} & \text{für} \quad r_1 < \nu \leqq r_1 + r_2\,, \\ \mathfrak{A}^{[\nu]} = \overline{\mathfrak{A}^{[\nu - r_2]}} & & \text{für} \quad r_1 + r_2 < \nu \leqq r_1 + 2r_2 = q\,. \end{array}$$

Von diesen q Matrizen können also r_1 reelle und r_2 komplexe beliebig vorgegeben werden. Wir nennen die $\mathfrak{A}^{[\nu]}$ die *Konjugierten* von $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}^{[1]}$. Mit $\mathfrak{A}$ ist $\overline{\mathfrak{A}}$ $(\overline{\mathfrak{A}}^{[\nu]} := \overline{\mathfrak{A}^{[\nu]}})$ und $\mathfrak{A}'$ $(\mathfrak{A}'^{[\nu]} := \mathfrak{A}^{[\nu]\prime})$ eine allgemeine Matrix. Entsprechend werden Produkt und Linearkombination mit reellen Koeffizienten zweier allgemeiner Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erklärt:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^{[\nu]} := \mathfrak{A}^{[\nu]}\mathfrak{B}^{[\nu]}\,, \quad (\alpha\mathfrak{A} + \beta\mathfrak{B})^{[\nu]} := \alpha\mathfrak{A}^{[\nu]} + \beta\mathfrak{B}^{[\nu]}\,.$$

Dies hat natürlich nur einen Sinn, wenn im ersten Falle die Spaltenzahl von $\mathfrak{A}$ gleich der Zeilenzahl von $\mathfrak{B}$ und im zweiten Falle $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gleiche Zeilen- und gleiche Spaltenzahl haben. Eine allgemeine Matrix $\mathfrak{Y}$ heißt *hermitesch*, falls ihre reellen Konjugierten symmetrisch und ihre komplexen Konjugierten hermitesch sind. Die in diesem Sinne hermiteschen m-reihigen Matrizen bilden einen Vektorraum X der Dimension

$$n := r_1 \frac{m(m+1)}{2} + r_2 m^2$$

über R und X ist isomorph der direkten Summe

$$\underbrace{X_R^{(m)} \oplus \cdots \oplus X_R^{(m)}}_{r_1} \oplus \underbrace{X_C^{(m)} \oplus \cdots \oplus X_C^{(m)}}_{r_2}\,.$$

Für allgemeine quadratische Matrix $\mathfrak{A}$ sei

$$\omega(\mathfrak{A}) := \prod_{\nu=1}^{q} |\mathfrak{A}^{[\nu]}|\,.$$

Das so definierte $\omega(\mathfrak{A})$ ist reell und man hat $\omega(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \omega(\mathfrak{A})\,\omega(\mathfrak{B})$. Mit $GL(m)$ kürzen wir die Gruppe der m-reihigen allgemeinen Matrizen $\mathfrak{A}$ mit $\omega(\mathfrak{A}) \neq 0$ ab.

3. In dem Vektorraum X erklären wir eine symmetrische Bilinearform $\sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ für allgemeine hermitesche Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch

$$\sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) := \sum_{\nu=1}^{r_1} \operatorname{Spur}(\mathfrak{A}^{[\nu]}\mathfrak{B}^{[\nu]}) + 2 \sum_{\nu=r_1+1}^{r_1+r_2} \operatorname{Spur}(\mathfrak{A}^{[\nu]}\mathfrak{B}^{[\nu]})\,.$$

Eine allgemeine Matrix $\mathfrak{Y}$ aus X nennen wir *positiv definit* $(\mathfrak{Y} > 0)$ bzw. *positiv semidefinit* $(\mathfrak{Y} \geqq 0)$, falls alle Konjugierten $\mathfrak{Y}^{[\nu]}$ von $\mathfrak{Y}$ (reell oder hermitesch) positiv definit bzw. positiv semidefinit sind. Die Menge Y der allgemeinen positiv definiten Matrizen $\mathfrak{Y}$ ist ein Positivitätsbereich in X und stimmt mit dem direkten Produkt (vgl. PB, § 11)

$$\underbrace{Y_R^{(m)} \times \cdots \times Y_R^{(m)}}_{r_1} \times \underbrace{Y_C^{(m)} \times \cdots \times Y_C^{(m)}}_{r_2}$$

überein. Jedes $\mathfrak{R} \in GL(m)$ induziert eine lineare Transformation $\Phi(\mathfrak{R})$ von X vermöge

$$(\Phi(\mathfrak{R})\,\mathfrak{Y})^{[\nu]} := \overline{\mathfrak{R}^{[\nu]}}'\,\mathfrak{Y}^{[\nu]}\,\mathfrak{R}^{[\nu]}, \quad 1 \leq \nu \leq q\,.$$

Nach der Definition des Produktes in 2 können wir dafür auch $\Phi(\mathfrak{R})\,\mathfrak{Y} = \overline{\mathfrak{R}}'\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{R}$ schreiben. Man hat

$$\Phi(\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2) = \Phi(\mathfrak{R}_2)\,\Phi(\mathfrak{R}_1)\,, \quad \Phi^*(\mathfrak{R}) = \Phi(\overline{\mathfrak{R}}')\,.$$

Mit $\tilde{\Sigma}$ kürzen wir noch die (endliche) Gruppe ab, die durch die folgenden linearen Transformationen von X erzeugt wird: 1. Permutation der reellen Konjugierten unter sich, 2. Permutation der komplexen Konjugierten unter sich und 3. Übergang zur transponierten Matrix in einer der komplexen Konjugierten. Nach [1] kann $\Sigma(Y)$ durch $\Phi(\mathfrak{R})$, $\mathfrak{R} \in GL(m)$, und $\tilde{\Sigma}$ erzeugt werden und jedes $\Phi \in \Sigma(Y)$ läßt sich in der Form

$$\Phi = \Phi(\mathfrak{R}_1)\,\Psi_1 = \Psi_2\,\Phi(\mathfrak{R}_2),\ \Psi_j \in \tilde{\Sigma}, \mathfrak{R}_j \in GL(m), j = 1, 2\,,$$

darstellen. Auf $\Sigma(Y)$ wird der positive Charakter χ durch

$$\chi(\Phi) := \omega^2(\mathfrak{R}) \quad \text{falls} \quad \Phi = \Phi(\mathfrak{R})\,\Psi$$

erklärt. Man überzeugt sich leicht davon, daß $\omega(\mathfrak{Y})$ *für* $\mathfrak{Y} \in Y$ *eine Norm* (bezüglich χ) *im Sinne von* § 1.4 *ist.*

4. K sei ein algebraischer Zahlkörper vom Grade q über dem Körper P der rationalen Zahlen. Für eine komplexe Matrix $\mathfrak{A}$ bedeute „$\mathfrak{A} \in K$" (oder $\mathfrak{A}$ *über* K) bzw. „$\mathfrak{A}$ ganz", daß alle Elemente von $\mathfrak{A}$ in K liegen bzw. ganze Zahlen von K sind. K möge r_1 reelle und $2r_2$ komplexe konjugierte Körper $K^{[1]}, \ldots, K^{[q]}$ haben. Wir wählen die Numerierung in der folgenden Weise

$$\begin{aligned} &K = K^{[1]}, K^{[2]}, \ldots, K^{[r_1]} \ \text{reell} \\ &K^{[r_1+1]}, \ldots, K^{[r_1+r_2]} \ \text{komplex} \\ &K^{[r_1+r_2+1]} = \overline{K}^{[r_1+1]}, \ldots, K^{[r_1+2r_2]} = \overline{K}^{[r_1+r_2]}\,. \end{aligned}$$

Für $\mathfrak{A} \in K$ bezeichne $\mathfrak{A}^{[\nu]}$ diejenigen Matrizen, deren Elemente die entsprechenden Konjugierten der Elemente von $\mathfrak{A}$ sind. Jedes $\mathfrak{A} \in K$ kann daher als allgemeine Matrix im Sinne von 2 aufgefaßt werden. Die Menge der ganzen m-reihigen Vektoren aus K werde mit $G_K^{(m)}$ bezeichnet.

Für allgemeinen Vektor $\mathfrak{y}$ bzw. für allgemeine quadratische Matrix $\mathfrak{R}$ setze man

$$\tilde{\mathfrak{y}} := \begin{pmatrix} \mathfrak{y}^{[1]} \\ \vdots \\ \mathfrak{y}^{[q]} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathfrak{R}} := \begin{pmatrix} \mathfrak{R}^{[1]} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathfrak{R}^{[q]} \end{pmatrix}.$$

Im Falle $m > 1$ widersprechen sich diese Bezeichnungen nicht, bei $m = 1$ sind die Formeln sinngemäß zu lesen und daher auch keine Mißverständnisse zu befürchten. Es ist z. B. $\widetilde{\mathfrak{R}\mathfrak{y}} = \tilde{\mathfrak{R}}\tilde{\mathfrak{y}}$.

Sei $\eta_1, \ldots, \eta_q$ eine Ganzheitsbasis von K, Δ_K die Diskriminante von K und

$$\mathfrak{B} := \begin{pmatrix} \eta_1^{(1)}\mathfrak{E}^{(m)} & \cdots & \eta_q^{(1)}\mathfrak{E}^{(m)} \\ \vdots & & \vdots \\ \eta_1^{(q)}\mathfrak{E}^{(m)} & & \eta_q^{(q)}\mathfrak{E}^{(m)} \end{pmatrix}, \quad \|\mathfrak{B}\| = \Delta_K^{\frac{m}{2}}.$$

Offenbar gibt es eine symmetrische Permutationsmatrix $\mathfrak{P}$ mit $\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{P}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{P}\overline{\tilde{\mathfrak{R}}} = \tilde{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{P}$ für jede allgemeine Matrix $\mathfrak{R}$ von m Zeilen und Spalten. Für jede allgemeine hermitesche Matrix $\mathfrak{Y}$ ist daher $\overline{\mathfrak{B}}'\tilde{\mathfrak{Y}}\mathfrak{B}$ reell und positiv definit, falls $\mathfrak{Y}$ positiv definit ist.

Den Vektor $\mathfrak{B}\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x} \in R^{mq}$, unterteilen wir in q Vektoren von m Elementen:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} \mathfrak{y}^{[1]} \\ \vdots \\ \mathfrak{y}^{[q]} \end{pmatrix}.$$

Nach Definition von $\mathfrak{B}$ können die $\mathfrak{y}^{[\nu]}$ als Konjugierte eines allgemeinen Vektors $\mathfrak{y}$ aufgefaßt werden und es ist dann $\mathfrak{B}\mathfrak{x} = \tilde{\mathfrak{y}}$. Für ganz-rationales $\mathfrak{a} \in R^{mq}$ hat der vermöge $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{B}\mathfrak{a}$ definierte allgemeine Vektor $\mathfrak{g}$ ganze Elemente aus K und umgekehrt hat man für jedes $\mathfrak{g} \in G_K^{(m)}$ eine Darstellung $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{B}\mathfrak{a}$ mit ganz-rationalem $\mathfrak{a}$.

Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir eine einfache Darstellung von $\sigma(\mathfrak{Y}, \mathfrak{g}\bar{\mathfrak{g}}')$ für $\mathfrak{Y} \in X$ und allgemeinen Vektor $\mathfrak{y}$:

$$\sigma(\mathfrak{Y}, \mathfrak{y}\bar{\mathfrak{y}}') = \sum_{\nu=1}^{q} \overline{\mathfrak{y}^{[\nu]}}'\,\mathfrak{Y}\mathfrak{y}^{[\nu]} = \overline{\tilde{\mathfrak{y}}}'\,\tilde{\mathfrak{Y}}\tilde{\mathfrak{y}} = \mathfrak{x}'\,\overline{\mathfrak{B}}'\,\tilde{\mathfrak{Y}}\mathfrak{B}\mathfrak{x}\,.$$

wenn wieder $\tilde{\mathfrak{y}} = \mathfrak{B}\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{x} \in R^{mq}$ gesetzt ist.

5. Wir können nun den Anschluß an die allgemeine Theorie herstellen. Es bezeichne $D_K^{(m)}$ die Menge der allgemeinen Matrizen der Gestalt $\mathfrak{g}\bar{\mathfrak{g}}'$ für $\mathfrak{g} \neq 0$ aus $G_K^{(m)}$. Alle Konjugierten von $\mathfrak{g}\bar{\mathfrak{g}}'$ sind positiv semidefinit, $D_K^{(m)}$ ist daher in $\overline{Y} - \{0\}$ enthalten. Da es zu jedem $\mathfrak{g}$ aus $G_K^{(m)}$ ein ganz-rationales $\mathfrak{a} \in R^{mq}$ gibt mit $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{B}\mathfrak{a}$, zeigt

$$\sigma(\mathfrak{Y}, \mathfrak{g}\bar{\mathfrak{g}}') = \mathfrak{a}'\,\overline{\mathfrak{B}}'\,\tilde{\mathfrak{Y}}\mathfrak{B}\mathfrak{a}\,,$$

daß $D_K^{(m)}$ im Vektorraum X diskret liegt.

In der Bezeichnung der §§ 1—5 ist für $\mathfrak{Y} \in Y$

$$\mu(\mathfrak{Y}) = \inf\{\bar{\tilde{\mathfrak{g}}}'\,\tilde{\mathfrak{Y}}\tilde{\mathfrak{g}};\ 0 \neq \mathfrak{g} \in G_K^{(m)}\}$$

und $M(\mathfrak{Y})$ besteht aus allen allgemeinen Matrizen $\mathfrak{g}\bar{\mathfrak{g}}'$ aus $D_K^{(m)}$ mit $\mu(\mathfrak{Y}) = \bar{\tilde{\mathfrak{g}}}'\,\tilde{\mathfrak{Y}}\tilde{\mathfrak{g}}$. $\mu(\mathfrak{Y})$ ist zugleich das Infimum der Zahlen $\mathfrak{a}'\,\overline{\mathfrak{B}}'\,\tilde{\mathfrak{Y}}\mathfrak{B}\mathfrak{a}$ für alle von Null verschiedenen ganz-rationalen Vektoren $\mathfrak{a}$ des R^{mq}. Unter $\tilde{M}(\mathfrak{Y})$ wollen wir noch die Teilmenge der Vektoren $\mathfrak{g}$ aus $G_K^{(m)}$ verstehen, für die $\mathfrak{g}\bar{\mathfrak{g}}'$ in $M(\mathfrak{Y})$ liegt, d. h. $\mu(\mathfrak{Y}) = \bar{\tilde{\mathfrak{g}}}'\,\tilde{\mathfrak{Y}}\tilde{\mathfrak{g}}$ gilt. Wesentlich für unsere weiteren Untersuchungen ist

Lemma 11. *Die Menge $D_K^{(m)}$ ist zulässig und es gilt für allgemeine Matrix $\mathfrak{Y} > 0$*

$$\frac{\mu^{mq}(\mathfrak{Y})}{\omega(\mathfrak{Y})} \leq \frac{2^{2mq}}{\varrho_{mq}^2}\,\Delta_K^{m}\,{}^{4)}.$$

Beweis: Offenbar strebt $\omega(\mathfrak{Y})$ gegen Null, falls $\mathfrak{Y} \in Y$ gegen einen Randpunkt von Y konvergiert. Nach der behaupteten Ungleichung gilt dann die gleiche Aussage für $\mu(\mathfrak{Y})$ und das bedeutet nach § 3.2, daß $D_K^{(m)}$ zulässig ist. Zum Beweis der Ungleichung enthält nach Definition von $\mu(\mathfrak{Y})$ der Bereich der $\mathfrak{x}$ des R^{mq} mit $\mathfrak{x}'\overline{\mathfrak{B}}'\tilde{\mathfrak{Y}}\mathfrak{B}\mathfrak{x} \leq \mu(\mathfrak{Y})$ außer Null keinen ganz-rationalen Vektor im Innern. Nach dem Minkowskischen Satz über die Gitterpunkte in konvexen Körpern mit Mittelpunkt ist das Volumen jenes Bereiches durch 2^{mq} beschränkt. Das fragliche Volumen ist

$$\varrho_{mq}\left|\frac{1}{\mu(\mathfrak{Y})}\overline{\mathfrak{B}}'\tilde{\mathfrak{Y}}\mathfrak{B}\right|^{-1/2} = \varrho_{mq}\left(\frac{\mu^{mq}(\mathfrak{Y})}{\|\mathfrak{B}\|^2|\tilde{\mathfrak{Y}}|}\right)^{1/2}$$

und $\|\mathfrak{B}\|^2 = \Delta_K^m$, $|\tilde{\mathfrak{Y}}| = \omega(\mathfrak{Y})$ ergibt die Behauptung.

6. Während wir in unseren allgemeinen Überlegungen der §§ 1—5 nur wenig über die Anzahl der Elemente von $M(y)$ aussagen konnten, gilt im vorliegenden Falle

Lemma 12. *Die Anzahl der Elemente von* $M(\mathfrak{Y})$ *(bzw.* $\hat{M}(\mathfrak{Y})$*) ist durch* $2^{mq}-1$ *(bzw.* $2(2^{mq}-1)$*) beschränkt.*

Beweis: Da mit $\mathfrak{g}$ auch $-\mathfrak{g}$ zu $\hat{M}(\mathfrak{Y})$ gehört, genügt es, wenn die Aussage über $\hat{M}(\mathfrak{Y})$ bewiesen wird. Nehmen wir dazu an, daß für $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{a} \neq 0$ aus $G_K^{(m)}$ die beiden Vektoren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g} + 2\mathfrak{a}$ in $\hat{M}(\mathfrak{Y})$ liegen:

$$\bar{\mathfrak{g}}'\tilde{\mathfrak{Y}}\tilde{\mathfrak{g}} = \mu(\mathfrak{Y}) = \overline{(\tilde{\mathfrak{g}} + 2\tilde{\mathfrak{a}})}'\tilde{\mathfrak{Y}}(\tilde{\mathfrak{g}} + 2\tilde{\mathfrak{a}}) = \bar{\mathfrak{g}}'\tilde{\mathfrak{Y}}\tilde{\mathfrak{g}} + 2(\bar{\mathfrak{g}}'\tilde{\mathfrak{Y}}\tilde{\mathfrak{a}} + \bar{\mathfrak{a}}'\tilde{\mathfrak{Y}}\tilde{\mathfrak{g}}) + 4\bar{\mathfrak{a}}'\tilde{\mathfrak{Y}}\tilde{\mathfrak{a}},$$

d. h. es ist $\bar{\mathfrak{g}}'\tilde{\mathfrak{Y}}\tilde{\mathfrak{a}} + \bar{\mathfrak{a}}'\tilde{\mathfrak{Y}}\tilde{\mathfrak{g}} + 2\bar{\mathfrak{a}}'\tilde{\mathfrak{Y}}\tilde{\mathfrak{a}} = 0$ und $\overline{(\tilde{\mathfrak{g}} + \tilde{\mathfrak{a}})}'\tilde{\mathfrak{Y}}(\tilde{\mathfrak{g}} + \tilde{\mathfrak{a}}) = \mu(\mathfrak{Y}) - \bar{\mathfrak{a}}'\tilde{\mathfrak{Y}}\tilde{\mathfrak{a}}$. Wäre $\mathfrak{g} + \mathfrak{a} \neq 0$, dann hätte man $\mu(\mathfrak{Y}) \leq \overline{(\tilde{\mathfrak{g}} + \tilde{\mathfrak{a}})}'\tilde{\mathfrak{Y}}(\tilde{\mathfrak{g}} + \tilde{\mathfrak{a}})$ und daher $\bar{\mathfrak{a}}'\tilde{\mathfrak{Y}}\tilde{\mathfrak{a}} \leq 0$. Da aber $\tilde{\mathfrak{Y}}$ positiv definit ist, würde $\tilde{\mathfrak{a}} = 0$ im Widerspruch zur Annahme folgen. Aus der Annahme, daß $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g} + 2\mathfrak{a}$ zu $\hat{M}(\mathfrak{Y})$ gehören, folgt also notwendig $\mathfrak{a} = -\mathfrak{g}$. Von jeder von Null verschiedenen Restklasse (mod 2) von Vektoren aus $G_K^{(m)}$ liegen daher höchstens zwei Vektoren in $\hat{M}(\mathfrak{Y})$. Das bedeutet aber, daß die Anzahl der Elemente von $\hat{M}(\mathfrak{Y})$ durch $2(2^{mq}-1)$ beschränkt ist.

7. Für eine Matrix $\mathfrak{G} \in K$ von m Zeilen und Spalten ist $\omega(\mathfrak{G})$ zugleich die Körpernorm von $|\mathfrak{G}|$. Wir zeigen nun, *daß für jede aus m Vektoren* $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_m \in \hat{M}(\mathfrak{Y})$ *gebildete Matrix* $\mathfrak{G} := (\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_m)$ *die folgende Ungleichung gültig ist:*

$$|\omega(\mathfrak{G})| \leq \frac{2^{mq}}{\varrho_{mq}}\Delta_K^{\frac{m}{2}}.$$

Zum Nachweis darf $\omega(\mathfrak{G}) \neq 0$ angenommen werden. Wir bilden die Matrix

$$\mathfrak{A} := \sum_{\nu=1}^{q}\overline{\mathfrak{G}^{[\nu]}}'\mathfrak{Y}^{[\nu]}\mathfrak{G}^{[\nu]}$$

In der Hauptdiagonale von $\mathfrak{A}$ steht überall $\mu(\mathfrak{Y})$, der Hadamardsche Determinantensatz liefert daher $\mu^{mq}(\mathfrak{Y}) \geq |\mathfrak{A}|^q$. Aus der für beliebige komplexe

hermitesch positiv definite Matrizen $\mathfrak{A}_k$ gültigen Ungleichung

$$\left|\sum_{k=1}^{q} \mathfrak{A}_k\right|^q \geq \prod_{k=1}^{q} |\mathfrak{A}_k|$$

folgt weiter $\mu^{m\,q}(\mathfrak{Y}) \geqq |\omega(\mathfrak{S})|^2\, \omega(\mathfrak{Y})$ und Lemma 11 gibt die Behauptung.

8. Die eben bewiesene Ungleichung ist trivial erfüllt, wenn es in $\hat{M}(\mathfrak{Y})$ nicht m linear unabhängige Vektoren gibt. *Für vollkommenes $\mathfrak{Y} > 0$ gibt es jedoch in $\hat{M}(\mathfrak{Y})$ sicher m über C linear unabhängige Vektoren.* Wäre das falsch, dann hat man Vektoren $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_{m-1}$ aus $\hat{M}(\mathfrak{Y})$, so daß sich jedes $\mathfrak{g}$ aus $\hat{M}(\mathfrak{Y})$ und seine Konjugierten in der Gestalt

$$\mathfrak{g}^{[\nu]} = \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k^{[\nu]}(\mathfrak{g})\, \mathfrak{g}_k^{[\nu]}, \quad \lambda_k^{[\nu]}(\mathfrak{g}) \in C\,,$$

schreiben lassen. Man bestimmt jetzt eine allgemeine Matrix $\mathfrak{T}$ mit von Null verschiedenen Konjugierten $\mathfrak{T}^{[\nu]}$ und $\overline{\mathfrak{g}_k^{[\nu]}}'\,\mathfrak{T}^{[\nu]}\mathfrak{g}_l^{[\nu]} = 0$ für $1 \leqq k \leqq l \leqq m-1$. Es ist dann $\overline{\mathfrak{g}^{[\nu]}}'\,\mathfrak{T}^{[\nu]}\mathfrak{g}^{[\nu]} = 0$ für alle $\mathfrak{g} \in \hat{M}(\mathfrak{Y})$. Da aber $\mathfrak{Y}$ vollkommen vorausgesetzt war, kommen unter den allgemeinen Matrizen $\mathfrak{g}\bar{\mathfrak{g}}'$ n linear unabhängige vor und man hat einen Widerspruch zu $\mathfrak{T}^{[\nu]} \neq 0$.

9. Eine Matrix $\mathfrak{U}$ heißt *über K unimodular*, wenn $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^{-1}$ ganz über K sind. Das ist äquivalent damit, daß $\mathfrak{U}$ ganz über K und $|\mathfrak{U}|$ eine Einheit von K ist. Wie im § 8.5 beruhen die weiteren Überlegungen auf einem arithmetischen Hilfssatz, der hier auf P. Humbert [2] zurückgeht. Der Vollständigkeit halber wiederholen wir ihn mit Beweis:

Lemma 13. *Zu jedem positiven ξ gibt es eine endliche Menge B von quadratischen m-reihigen über K ganzen Matrizen derart, daß zu jeder ganzen quadratischen m-reihigen und über K ganzen Matrix $\mathfrak{S}$ mit $1 \leqq |\omega(\mathfrak{S})| \leqq \xi$ eine über K unimodulare Matrix $\mathfrak{U}$ existiert, für die $\mathfrak{U}\mathfrak{S}$ in B liegt.*

Beweis: Zu ganzem $\alpha \neq 0$ aus K betrachte man die Menge der m-reihigen quadratischen über K ganzen Matrizen, deren Determinante sich von α nur um eine Einheit unterscheidet. $B(\alpha)$ bezeichne eine maximale Teilmenge von $(\mathrm{mod}\,\alpha)$ inkongruenten solchen Matrizen. Wir zeigen zuerst:

1. *Zu jedem über K ganzen $\mathfrak{S}$ mit $|\mathfrak{S}| = \alpha$ gibt es $\mathfrak{H} \in B(\alpha)$, für das $\mathfrak{H}\mathfrak{S}^{-1}$ über K unimodular ist.* Wir bestimmen dazu $\mathfrak{H}$ aus $B(\alpha)$ mit $\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{H}\ (\mathrm{mod}\,\alpha)$. Da $\alpha\mathfrak{S}^{-1}$ wieder über K ganz ist, ist auch $\mathfrak{U} := \mathfrak{H}\mathfrak{S}^{-1}$ ganz. Da sich aber die Determinanten von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{H}$ nur um eine Einheit von K unterscheiden, ist $|\mathfrak{U}|$ eine Einheit.

2. *Zu jedem ganzen $\alpha \in K$, dessen Körpernorm absolut genommen durch ξ beschränkt ist, gibt es eine Einheit ε von K, so daß $\varepsilon\alpha$ in einer endlichen Menge E liegt, die nur von ξ und K abhängt.* Zu α bildet man das Hauptideal $\mathfrak{a} = (\alpha)$. Hier ist die Norm des Ideal $\mathfrak{a}$ durch ξ beschränkt und da es nur endlich viele ganze Hauptideale (α_ν) mit dieser Eigenschaft gibt, folgt $\mathfrak{a} = (\alpha_\nu)$ für ein ν, d. h. $\alpha = \varepsilon\alpha_\nu$ mit einer Einheit ε von K.

Zum Beweis des Lemmas bilden wir jetzt die nur von ξ, m und K abhängige Menge B der Vereinigung der $B(\alpha)$ für $\alpha \in E$. Ist jetzt $\mathfrak{S}$ über K ganz und m-reihig mit $1 \leqq |\omega(\mathfrak{S})| \leqq \xi$ gegeben, dann ist $\alpha := \varepsilon|\mathfrak{S}|$ nach 2 für eine

geeignete Einheit ε von K in E enthalten, d. h. bei

$$\mathfrak{U}_1 := \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist $\mathfrak{U}_1$ über K unimodular und $|\mathfrak{U}_1\mathfrak{S}| = \alpha$. Wegen 1. gibt es dann $\mathfrak{H} \in B(\alpha)$, für welches $\mathfrak{U}_2 := \mathfrak{H}(\mathfrak{U}_1\mathfrak{S})^{-1}$ unimodular über K ist, d. h. $\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1\mathfrak{S}$ liegt in B.

10. Jede über K unimodulare m-reihige Matrix $\mathfrak{U}$ kann als allgemeine Matrix aufgefaßt werden und gibt nach 3 Anlaß zu einem Automorphismus $\Phi(\mathfrak{U})$ von Y. Unter Ω wollen wir die Gruppe der Automorphismen $\Phi(\mathfrak{U})$ für über K unimodulare Matrizen $\mathfrak{U}$ verstehen. Wegen $\Phi(\mathfrak{U})\mathfrak{g}\bar{\mathfrak{g}}' = (\bar{\mathfrak{U}}'\mathfrak{g})\,\overline{(\bar{\mathfrak{U}}'\mathfrak{g})}'$ ist

$$\Omega D_K^{(m)} = D_K^{(m)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}(\mathfrak{U}\mathfrak{Y}\bar{\mathfrak{U}}') = \bar{\mathfrak{U}}'^{-1}\mathfrak{M}(\mathfrak{Y})\,.$$

Den Humbertschen Hilfssatz verwenden wir nun zum Beweis der folgenden Aussage: *Es gibt eine endliche Teilmenge $\tilde{A}$ von $G_K^{(m)}$, so daß zu jedem vollkommenen $\mathfrak{Y} > 0$ ein über K unimodulares $\mathfrak{U}$ existiert, für welches die Menge $\mathfrak{M}(\mathfrak{Y}) \cap \bar{\mathfrak{U}}'\tilde{A}$ sicher m über C linear unabhängige Vektoren enthält.* Als Menge $\tilde{A}$ wählen wir die Menge der Vektoren aus $G_K^{(m)}$, die als Spaltenvektoren in den Matrizen $\mathfrak{S}$ von B nach Lemma 13 für

$$\xi := \frac{2^{ms}}{\varrho_{ms}}\,\Delta_K^{\frac{m}{2}}$$

auftreten. Für vollkommenes $\mathfrak{Y}$ bestimmen wir nach 8 linear unabhängige Vektoren $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_m \in \mathfrak{M}(\mathfrak{Y})$, setzen $\mathfrak{S} := (\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_m)$. Nach 7 ist $|\omega(\mathfrak{S})|$ durch ξ beschränkt und nach Lemma 13 gibt es über K unimodulares $\mathfrak{U}$ mit $\bar{\mathfrak{U}}'^{-1}\mathfrak{S} \in B$. $\mathfrak{M}(\mathfrak{Y}) \cap \bar{\mathfrak{U}}'\tilde{A}$ enthält dann aber m über C linear unabhängige Vektoren.

Nun sei A die Menge der allgemeinen Matrizen $\mathfrak{g}\bar{\mathfrak{g}}'$ für $\mathfrak{g} \in \tilde{A}$. A ist endliche Teilmenge von $D_K^{(m)}$ und die eben bewiesene Aussage bedeutet, daß es zu vollkommenen $\mathfrak{Y} > 0$ ein $\Phi \in \Omega$ gibt, so daß $M := M(\Phi^*\mathfrak{Y}) \cap A$ wenigstens m Matrizen $\mathfrak{g}\bar{\mathfrak{g}}'$ enthält, für die die Vektoren $\mathfrak{g}$ über C linear unabhängig sind. Die allgemeine Matrix

$$\mathfrak{A} := \sum_{\mathfrak{g}\bar{\mathfrak{g}}' \in M} \mathfrak{g}\bar{\mathfrak{g}}'$$

ist positiv definit. Wäre dies nämlich für eine Konjugierte $\mathfrak{A}^{[\nu]}$ nicht richtig, würde es komplexes $\mathfrak{x} \neq 0$ mit $\bar{\mathfrak{x}}'\mathfrak{A}^{[\nu]}\mathfrak{x} = 0$ geben. Nach Definition von $\mathfrak{A}^{[\nu]}$ folgt $\mathfrak{g}^{[\nu]'}\mathfrak{x} = 0$ für alle $\mathfrak{g}$. Da mit $\mathfrak{g}$ auch die Konjugierten $\mathfrak{g}^{[\nu]}$ über C linear unabhängig sind, hätte man $\mathfrak{x} = 0$. Nach § 5.8 folgt, daß $V(D_K^{(m)})/\Omega^*$ endlich ist.

11. Damit sind erneut alle in den §§ 1—5 verwendeten Voraussetzungen erfüllt. Die sich aus Satz 4 ergebende Aussage formulieren wir gesondert:

Satz 8. *Bezüglich der Gruppe der Abbildungen $\mathfrak{Y} \to \bar{\mathfrak{U}}'\mathfrak{Y}\mathfrak{U}$ für über K unimodulare Matrizen $\mathfrak{U}$ existiert ein Fundamentalbereich innerhalb der Menge der allgemeinen Matrizen $\mathfrak{Y} > 0$,*

a) *der in der Vereinigung von endlich vielen vollkommenen Pyramiden enthalten ist,*

b) *dessen (in X) abgeschlossene Hülle aus endlich vielen regulären Pyramiden besteht und*

c) *der endlich viele Nachbarn hat.*

Für beliebige Zahlkörper K ist $D_K^{(m)}$ im allgemeinen nicht in einem Gitter enthalten. Ist jedoch $r_1 = 0$ oder $r_2 = 0$, dann kann jede über K ganze und hermitesche Matrix als allgemeine hermitesche Matrix aufgefaßt werden. Die Menge G derjenigen allgemeinen Matrizen $\mathfrak{A}$, die auf diese Weise aus einer über K ganzen m-reihigen hermiteschen Matrix abgeleitet sind, ist dann ein Gitter in X. Wegen $D \subset G$ und $\Omega \subset \Sigma(G)$ sind für $r_1 r_2 = 0$ auch noch die Ergebnisse des § 7 richtig. Nennen wir noch zwei über K ganze hermitesche Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ *über K äquivalent*, wenn es über K unimodulare Matrix $\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{U}}'\mathfrak{B}\mathfrak{U}$ gibt. Das Korollar zu Satz 6 zeigt speziell, *daß es nur endlich viele über K ganze, hermitesche positiv definite und über K inäquivalente Matrizen $\mathfrak{A}$ gibt, für die die Körpernorm der Determinante von $\mathfrak{A}$ beschränkt ist.* Die Voraussetzungen sind hier z. B. erfüllt, wenn K total-reell oder gleich einem imaginär-quadratischen Zahlkörper ist.

§ 10. Quadratische Formen über den Quaternionen

1. Es bezeichne Q den Quaternionenschiefkörper über dem Körper der reellen Zahlen R. Jedes $\alpha \in Q$ kann in der Form

$$\alpha = \sum_{k=1}^{4} \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^{4} e_k \alpha_k\,, \quad \alpha_k \in R\,, \tag{10.1}$$

geschrieben werden und die Basiselemente (Grundeinheiten) $e_1 = 1$, e_2, e_3 und e_4 genügen dem Multiplikationsschema

$$\begin{aligned} e_1 e_k &= e_k e_1 = e_k \; (1 \leq k \leq 4)\,, \quad e_k^2 = -e_1 \; (2 \leq k \leq 4)\,, \\ e_2 e_3 &= -e_3 e_2 = e_4\,, \\ e_3 e_4 &= -e_4 e_3 = e_2\,, \\ e_4 e_2 &= -e_2 e_4 = e_3\,. \end{aligned}$$

In der Bezeichnung (10.1) setzen wir

$$\overline{\alpha} := \alpha_1 e_1 - \sum_{k=2}^{4} \alpha_k e_k,\; \mathrm{Re}\,\alpha := \frac{1}{2}(\alpha + \overline{\alpha}) = \alpha_1,\; |\alpha| := \sqrt{\alpha\overline{\alpha}}\,,$$

und erhalten

$$\mathrm{Re}(\alpha\beta) = \sum_{k=1}^{4} \alpha_k \beta_k,\; \mathrm{Re}(\alpha\beta) = \mathrm{Re}(\beta\alpha),\; \overline{\alpha\beta} = \overline{\beta}\,\overline{\alpha}\,. \tag{10.2}$$

Ferner ist $\alpha = 0$ mit $|\alpha| = 0$ gleichbedeutend und der Betrag $|\alpha|$ genügt der Dreiecksungleichung.

2. Betrachten wir jetzt Matrizen $\mathfrak{A} = (\alpha_{kl})$ über Q. Für eine solche Matrix $\mathfrak{A}$ bezeichne $\overline{\mathfrak{A}}$ die Matrix $(\overline{\alpha_{kl}})$. Man hat

$$\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}' = \overline{\mathfrak{B}}'\overline{\mathfrak{A}}'\,.$$

Eine quadratische Matrix $\mathfrak{A}$ über Q wollen wir *hermitesch* nennen, wenn $\overline{\mathfrak{A}}' = \mathfrak{A}$ gilt. Jede Matrix $\mathfrak{A}$ über Q hat eine Basisdarstellung

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 e_1 + \mathfrak{A}_2 e_2 + \mathfrak{A}_3 e_3 + \mathfrak{A}_4 e_4, \quad \mathfrak{A}_k \text{ reell},$$

und $\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann hermitesch, wenn $\mathfrak{A}_1$ symmetrisch und die $\mathfrak{A}_k$ $(2 \leqq k \leqq 4)$ schiefsymmetrisch sind. Mit X bezeichnen wir den Vektorraum über R, der aus allen m-reihigen hermiteschen Matrizen $\mathfrak{A}$ über Q besteht. Die Basisdarstellung zeigt, daß X die Dimension $n = 2m^2 - m$ über R hat. In X wird eine symmetrische und positiv definite Bilinearform

$$\sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) := \frac{1}{2} \operatorname{Spur}(\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\mathfrak{A})$$

erklärt. Ist $\mathfrak{A} = (\alpha_{kl})$, $\mathfrak{B} = (\beta_{kl})$, dann kann man wegen (10.2) dafür auch

$$\sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \sum_{k,l} \operatorname{Re}(\alpha_{kl}\beta_{lk}) \tag{10.3}$$

schreiben.

3. Für das Rechnen mit Matrizen über Q erweist sich ein Formalismus als zweckmäßig, der die nicht-kommutative Quaternionenmultiplikation auf eine Matrizenmultiplikation über den komplexen Zahlen reduziert. Jedem $\alpha \in Q$ ordnen wir in der Basisdarstellung (10.1) vermöge

$$[\alpha] := \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\alpha_2 & \alpha_3 + i\alpha_4 \\ -\alpha_3 + i\alpha_4 & \alpha_1 - i\alpha_2 \end{pmatrix}$$

eine zweireihige komplexe Matrix $[\alpha]$ zu. Die Abbildung $\alpha \to [\alpha]$ von Q in den Ring der zweireihigen komplexen Matrizen ist bekanntlich ein Körperisomorphismus und es gilt

$$[\bar{\alpha}] = \overline{[\alpha]}', \quad \operatorname{Re}\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{Spur}[\alpha], \quad |\alpha|^2 = \alpha\bar{\alpha} = |[\alpha]|.$$

Entsprechend ordne man jeder Matrix $\mathfrak{A} = (\alpha_{kl})$ über Q durch

$$[\mathfrak{A}] := ([\alpha_{kl}])$$

eine komplexe Matrix der doppelten Zeilen- und Spaltenzahl zu. Die Abbildung $\mathfrak{A} \to [\mathfrak{A}]$ ist linear und es gilt

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = [\mathfrak{A}][\mathfrak{B}], \quad [\overline{\mathfrak{A}}'] = \overline{[\mathfrak{A}]}'.$$

Da für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ aus X die Matrix $\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ wieder zu X gehört, sind die Diagonalelemente von $\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ reell und daher

$$\sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \frac{1}{2}\operatorname{Spur}(\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\mathfrak{A}) = \frac{1}{4}\operatorname{Spur}[\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\mathfrak{A}] = \frac{1}{2}\operatorname{Spur}([\mathfrak{A}][\mathfrak{B}]).$$

Bezeichne $\mathfrak{J}_m$ diejenige $2m$-reihige quadratische Matrix, die in der Hauptdiagonale m-mal das Kästchen

$$[e_3] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

stehen hat und sonst aus Nullen besteht. Man prüft sofort nach, daß sich eine komplexe Matrix $\mathfrak{B}$ von gerader Zeilen- und Spaltenzahl $2p$ bzw. $2q$ dann und nur dann in der Gestalt $\mathfrak{B} = [\mathfrak{A}]$ mit einem $\mathfrak{A}$ über Q schreiben läßt, wenn $\mathfrak{J}_p \mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{B}}\, \mathfrak{J}_q$ gilt.

Eine quadratische Matrix $\mathfrak{A}$ über Q soll *umkehrbar* genannt werden, falls es Matrix $\mathfrak{X}$ über Q mit $\mathfrak{A}\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ gibt. Wegen $[\mathfrak{A}]\,[\mathfrak{X}] = \mathfrak{E}$ ist $\|[\mathfrak{X}]\| \neq 0$. Aus $\mathfrak{X}\mathfrak{A}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ folgt $[\mathfrak{X}\mathfrak{A}]\,[\mathfrak{X}] = [\mathfrak{X}]$, d. h. $[\mathfrak{X}\mathfrak{A}] = \mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{X}\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$. Jetzt sieht man, daß $\mathfrak{X}$ durch $\mathfrak{A}$ eindeutig bestimmt ist, wir setzen $\mathfrak{A}^{-1} := \mathfrak{X}$. Offenbar sind mit $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ auch $\mathfrak{A}_1^{-1}$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ umkehrbar und es gilt $(\mathfrak{A}_1^{-1})^{-1} = \mathfrak{A}_1$, $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2)^{-1} = \mathfrak{A}_2^{-1}\mathfrak{A}_1^{-1}$. Wir zeigen noch, *daß* $\mathfrak{A}$ *genau dann umkehrbar ist, falls* $\|[\mathfrak{A}]\| \neq 0$ *gilt*. Für umkehrbares $\mathfrak{A}$ war $\|[\mathfrak{A}]\| \neq 0$ schon klar, sei also $\|[\mathfrak{A}]\| \neq 0$. Man hat dann $\mathfrak{J}_m[\mathfrak{A}]^{-1} = \overline{[\mathfrak{A}]^{-1}}\,\mathfrak{J}_m$, d. h. es gibt $\mathfrak{B}$ über Q mit $[\mathfrak{A}]^{-1} = [\mathfrak{B}]$. Jetzt folgt $\mathfrak{E} = [\mathfrak{A}]\,[\mathfrak{A}]^{-1} = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$, d. h. $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ und $[\mathfrak{A}]^{-1} = [\mathfrak{A}^{-1}]$.

Zusammengenommen sieht man, daß die Menge $GL(m, Q)$ der m-reihigen umkehrbaren Matrizen $\mathfrak{R}$ über Q eine multiplikative Gruppe ist.

4. Unter Q^m wollen wir die Menge der m-reihigen Spaltenvektoren mit Komponenten in Q verstehen; Q^m ist ein Vektorraum der Dimension $4m$ über R. Für $\mathfrak{A} \in X$ und $\mathfrak{x} \in Q^m$ ist offenbar $\bar{\mathfrak{x}}'\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ reell. Es ist daher sinnvoll, ein $\mathfrak{A} \in X$ *positiv definit* $(\mathfrak{A} > 0)$ bzw. *positiv semidefinit* $(\mathfrak{A} \geqq 0)$ zu nennen, falls $\bar{\mathfrak{x}}'\mathfrak{A}\mathfrak{x} > 0$ bzw. $\bar{\mathfrak{x}}'\mathfrak{A}\mathfrak{x} \geqq 0$ für alle von Null verschiedenen $\mathfrak{x} \in Q^m$ ausfällt.

Die Menge $Y_Q^{(m)}$ der positiv definiten $\mathfrak{Y}$ aus X ist ein Positivitätsbereich in X, dessen Rand genau aus den positiv semidefiniten Matrizen von X besteht. Der Nachweis der definierenden Axiome für $Y_Q^{(m)}$ gelingt einfach, wenn man beachtet, daß es zu jedem $\mathfrak{Y}$ aus X ein $\mathfrak{R}$ aus $GL(m, Q)$ gibt, für das $\bar{\mathfrak{R}}'\mathfrak{Y}\mathfrak{R}$ eine Diagonalmatrix mit Diagonalelementen 0 und ± 1 wird.

Wir zeigen nun, *daß* $Y_Q^{(m)}$ *genau aus denjenigen Matrizen* $\mathfrak{Y} \in X$ *besteht, für die* $[\mathfrak{Y}]$ *hermitesch positiv definit ist*. Wegen

$$\bar{\mathfrak{x}}'\mathfrak{Y}\mathfrak{x}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = [\bar{\mathfrak{x}}'\mathfrak{Y}\mathfrak{x}] = \overline{[\mathfrak{x}]}'\,[\mathfrak{Y}]\,[\mathfrak{x}] \tag{10.4}$$

ist $\mathfrak{Y} > 0$ falls $[\mathfrak{Y}] > 0$. Sei umgekehrt $\mathfrak{Y} > 0$ und $\mathfrak{z} \neq 0$ ein komplexer Vektor von $2m$ Komponenten. Für die Matrix $\mathfrak{W} := i(\mathfrak{z}, \mathfrak{J}_m\bar{\mathfrak{z}})$ rechnet man $\mathfrak{J}_m\mathfrak{W} = \mathfrak{W}\,\mathfrak{J}_1$ nach. Die Überlegungen von **3** zeigen, daß es ein $\mathfrak{x} \in Q^m$ mit $[\mathfrak{x}] = \mathfrak{W}$ gibt. Mit (10.4) wird

$$\bar{\mathfrak{x}}'\mathfrak{Y}\mathfrak{x}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \overline{[\mathfrak{x}]}'\,[\mathfrak{Y}]\,[\mathfrak{x}] = \bar{\mathfrak{W}}'[\mathfrak{Y}]\mathfrak{W} = \begin{pmatrix}\bar{\mathfrak{z}}'[\mathfrak{Y}]\mathfrak{z} & *\\ * & *\end{pmatrix}.$$

Da $\mathfrak{Y}$ positiv definit ist, folgt $\bar{\mathfrak{z}}'[\mathfrak{Y}]\mathfrak{z} > 0$, d. h. auch $[\mathfrak{Y}]$ ist positiv definit.

Wie in den anderen Beispielen induziert jedes $\mathfrak{R}$ aus $GL(m, Q)$ durch die Festsetzung $\Phi(\mathfrak{R})\,\mathfrak{Y} := \bar{\mathfrak{R}}'\mathfrak{Y}\mathfrak{R}$ einen Automorphismus $\Phi(\mathfrak{R})$ von $Y_Q^{(m)}$. Nach [1] hat für $m \geqq 3$ jeder Automorphismus von $Y_Q^{(m)}$ diese Gestalt. Im Falle $m = 2$ ist auch noch

$$\Pi\,\mathfrak{Y} := \mathfrak{Y}'$$

ein Automorphismus von $Y_Q^{(2)}$, und jeder Automorphismus kann in der Form $\Phi = \Phi(\mathfrak{R})\,\Pi^\varepsilon$ mit $\mathfrak{R} \in GL(2, Q)$ und $\varepsilon = 0, 1$ geschrieben werden. Die Definitionen

$$\chi(\Phi) := \|[\mathfrak{R}]\|^2 \quad \text{für} \quad \Phi = \Phi(\mathfrak{R}) \;(\text{bzw. } \Phi(\mathfrak{R})\,\Pi^\varepsilon \text{ für } m = 2)$$

$$\omega(\mathfrak{Y}) := \|[\mathfrak{Y}]\| \quad \text{für} \quad \mathfrak{Y} \in X,$$

geben wieder einen positiven Charakter χ von $\Sigma(Y_Q^{(m)})$ und eine Norm ω (bezüglich χ).

5. Es gibt unendlich viele Quaternionenkörper über dem Körper der rationalen Zahlen. Jeder von diesen besitzt endlich viele nichtisomorphe Hauptordnungen, deren jede zu einer Theorie der hermiteschen Formen mit diskontinuierlicher Gruppe Anlaß gibt. Als ein besonders einfaches Beispiel soll der von HURWITZ behandelte Quaternionenschiefkörper betrachtet werden. Der allgemeine Fall bringt nach dem Beweis einer Verallgemeinerung von Lemma 13 keine neuen Schwierigkeiten. Mit K bezeichnen wir den Quaternionenschiefkörper über dem Körper der rationalen Zahlen, der aus den $\alpha \in Q$ mit rationalen Komponenten α_k besteht. Sei zur Abkürzung

$$\varrho := \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4), \quad |\varrho| = 1 .$$

Wegen

$$\begin{gathered}\varrho^2 = -\varrho + e_2 + e_3 + e_4 = -\bar{\varrho}, e_1 = 2\varrho - e_2 - e_3 - e_4, \\ \varrho e_2 = e_2 + e_3 - \varrho, \quad e_2\varrho = e_2 + e_4 - \varrho, \\ \varrho e_3 = e_3 + e_4 - \varrho, \quad e_3\varrho = e_2 + e_3 - \varrho, \\ \varrho e_4 = e_2 + e_4 - \varrho, \quad e_4\varrho = e_3 + e_4 - \varrho,\end{gathered}$$

ist die Menge $\mathfrak{o}$ der Quaternionen

$$\alpha = g_1\varrho + g_2e_2 + g_3e_3 + g_4e_4, \quad g_k \text{ ganz-rational}, \tag{10.5}$$

ein Unterring von K mit Einselement e_1. Mit α gehört auch $\bar{\alpha}$ zu $\mathfrak{o}$. Bekanntlich ist $\mathfrak{o}$ *die einzige maximale Ordnung* von K, die die Grundeinheiten e_1, e_2, e_3 und e_4 enthält. Die Elemente von $\mathfrak{o}$ nennen wir *ganze* Quaternionen. $\mathfrak{o}$ ist ein *euklidischer Ring, d. h. zu* α, $\beta \neq 0$ *aus* $\mathfrak{o}$ *gibt es* $\gamma \in \mathfrak{o}$ *mit* $|\alpha - \gamma\beta| < |\beta|$. Hieraus folgt, daß in $\mathfrak{o}$ jedes Linksideal (bzw. Rechtsideal) ein Linkshauptideal (bzw. Rechtshauptideal) ist. Ist $\alpha \in \mathfrak{o}$ in der Basisdarstellung (10.5) gegeben, so wird

$$|\alpha|^2 = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + g_4^2 + g_1(g_2 + g_3 + g_4)$$

und daher ist $|\alpha|^2$ ganz-rational. Die Einheiten ε von $\mathfrak{o}$ sind diejenigen ganzen Quaternionen ε mit $|\varepsilon|^2 = 1$.

6. Eine Matrix $\mathfrak{A}$ über Q wollen wir *ganz über* K nennen, wenn die Elemente von $\mathfrak{A}$ ganze Quaternionen sind; eine Matrix $\mathfrak{U}$ über Q heißt *unimodular*, wenn $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^{-1}$ ganz über K sind. Bezeichne $U(m, K)$ die von den folgenden m-reihigen unimodularen Matrizen erzeugte Gruppe:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \alpha \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & & \vdots & 1 & \vdots & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_m \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathfrak{o}, \varepsilon_k \text{ Einheit von } \mathfrak{o} .$$

Für jedes $\mathfrak{U} \in U(m, K)$ gilt offenbar $|[\mathfrak{U}]| = +1$. Da $\mathfrak{o}$ ein euklidischer Ring ist,

zeigt man wie im Fall der ganz-rationalen Zahlen, daß *zu jeder über K ganzen quadratischen m-reihigen Matrix $\mathfrak{A}$ ein $\mathfrak{U}$ aus $U(m, K)$ existiert mit*

$$\mathfrak{U}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ 0 & \alpha_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha_{m-1,m} \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_m \end{pmatrix} \tag{10.6}$$

und

$$|\alpha_{lk}| < |\alpha_k| \quad \text{für} \quad 1 \leq l < k \quad \text{falls} \quad \alpha_k \neq 0\,,$$
$$\alpha_{lk} = 0 \quad \text{falls} \quad \alpha_k = 0\,.$$

Diese Darstellung ergibt $\|[\mathfrak{U}]\,[\mathfrak{A}]\| = \|[\alpha_1]\| \ldots \|[\alpha_m]\| = |\alpha_1|^2 \ldots |\alpha_m|^2$. Dies hat zwei Konsequenzen: Wir wenden das vorstehende Ergebnis auf eine beliebige unimodulare Matrix $\mathfrak{B}$ an. Da das Produkt zweier unimodularer Matrizen wieder unimodular ist, gilt dies auch für die Dreiecksmatrix in (10.6). Die α_k sind notwendig Einheiten von $\mathfrak{o}$ und daher $|\alpha_k|^2 = 1$, d. h. $\|[\mathfrak{B}]\| = 1$. *Für jede unimodulare Matrix $\mathfrak{B}$ ist daher $\|[\mathfrak{B}]\| = 1$ und $U(m, K)$ stimmt mit der Gruppe aller m-reihigen unimodularen Matrizen überein.* Außerdem sieht man, daß *eine ganze Matrix $\mathfrak{B}$ genau dann unimodular ist, wenn $\|[\mathfrak{B}]\| = 1$ gilt.* Ist $\mathfrak{A}$ eine beliebige über K ganze Matrix, dann sind die α_k in (10.6) ganz *und daher ist für eine über K ganze quadratische Matrix die Determinante $\|[\mathfrak{A}]\|$ eine nicht-negative ganz-rationale Zahl.*

7. Mit $D_K^{(m)}$ wollen wir die Menge der Matrizen $\mathfrak{g}\bar{\mathfrak{g}}'$ für über K ganze und von Null verschiedene Vektoren $\mathfrak{g}$ bezeichnen. $D_K^{(m)}$ ist wieder in $\overline{Y}_Q^{(m)} - \{0\}$ enthalten und in X diskret. In der Bezeichnung der §§ 1—5 ist $\mu(\mathfrak{Y})$ das Minimum von $\sigma(\mathfrak{Y}, \mathfrak{g}\bar{\mathfrak{g}}')$ für ganze Vektoren $\mathfrak{g} \neq 0$. Wegen (10.3) ist $\sigma(\mathfrak{Y}, \mathfrak{g}\bar{\mathfrak{g}}') = \bar{\mathfrak{g}}'\mathfrak{Y}\mathfrak{g}$ und daher $\mu(\mathfrak{Y})$ das Minimum von $\bar{\mathfrak{g}}'\mathfrak{Y}\mathfrak{g}$ für ganzes $\mathfrak{g} \neq 0$. Analog zu Lemma 11 beweist man

Lemma 14. *Die Menge $D_K^{(m)}$ ist zulässig und es gilt*

$$\frac{\mu^{2m}(\mathfrak{Y})}{\omega(\mathfrak{Y})} \leq \frac{2^{2m}}{\varrho_{4m}}\,^{4)}\,.$$

$\hat{M}(\mathfrak{Y})$ sei die Menge der über K ganzen $\mathfrak{g}$ mit $\mu(\mathfrak{Y}) = \bar{\mathfrak{g}}'\mathfrak{Y}\mathfrak{g}$ und Ω die Gruppe der $\Phi(\mathfrak{U})$ für $\mathfrak{U} \in U(m, K)$. Bezeichnet noch $G_K^{(m)}$ das Gitter der über K ganzen $\mathfrak{A}$ aus X, dann ist

$$\Omega D_K^{(m)} = D_K^{(m)},\ D_K^{(m)} \subset G_K^{(m)},\ \Omega \subset \Sigma(Y_Q^{(m)};\, G_K^{(m)}),\ \Omega^* = \Omega\,,$$

und für $\mathfrak{U} \in U(m, K)$

$$M(\mathfrak{U}\mathfrak{Y}\bar{\mathfrak{U}}') = \bar{\mathfrak{U}}'^{-1} M(\mathfrak{Y})\,\mathfrak{U}^{-1}, \quad \hat{M}(\mathfrak{U}\mathfrak{Y}\bar{\mathfrak{U}}') = \bar{\mathfrak{U}}'^{-1}\hat{M}(\mathfrak{Y})\,. \tag{10.7}$$

Völlig analog zum Beweis von Lemma 12 zeigt man auch hier, *daß die Anzahl der Elemente von $M(\mathfrak{Y})$ bzw. $\hat{M}(\mathfrak{Y})$ durch $2^{4m} - 1$ bzw. $2(2^{4m} - 1)$ beschränkt ist.*

8. Betrachten wir nun die Mengen $\hat{M}(\mathfrak{Y})$: *Für* (bezüglich $D_K^{(m)}$) *vollkommenes $\mathfrak{Y} > 0$ gibt es in $\hat{M}(\mathfrak{Y})$ sicher m über Q (rechts-)linear unabhängige Vektoren.* Wäre das nicht richtig, dann gibt es $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_{m-1}$ aus $\hat{M}(\mathfrak{Y})$, so daß für jedes $\mathfrak{g} \in \hat{M}(\mathfrak{Y})$ eine Darstellung

$$\mathfrak{g} = \sum_{k=1}^{m-1} \mathfrak{g}_k \lambda_k(\mathfrak{g}), \quad \lambda_k(\mathfrak{g}) \in Q\,,$$

gilt. Nun bestimmen wir wieder $\mathfrak{T} \neq 0$ über Q mit $\bar{\mathfrak{g}}_k' \mathfrak{T} \mathfrak{g}_l = 0$ für $1 \leqq k \leqq \leqq l \leqq m-1$ und erhalten $\bar{\mathfrak{g}}' \mathfrak{T} \mathfrak{g} = 0$ für alle $\mathfrak{g} \in \hat{\mathfrak{M}}(\mathfrak{Y})$. Wegen $\sigma(\mathfrak{T}, \mathfrak{g}\bar{\mathfrak{g}}') = \bar{\mathfrak{g}}' \mathfrak{T} \mathfrak{g}$ steht das aber im Widerspruch dazu, daß unter den $\mathfrak{g}\bar{\mathfrak{g}}'$ sicher n über R linear unabhängige Matrizen vorkommen.

Für Vektoren $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_m$ aus $\hat{\mathfrak{M}}(\mathfrak{Y})$ bilden wir die Matrix $\mathfrak{G} := (\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_m)$ und beweisen

$$\|[\mathfrak{G}]\| \leqq \sqrt{\frac{2^{3m}}{\varrho_{4m}}} =: \xi .$$

Man darf zum Beweis $|[\mathfrak{G}]| \neq 0$ annehmen. In der Matrix $\bar{\mathfrak{G}}' \mathfrak{Y} \mathfrak{G}$ stimmen alle Diagonalelemente mit $\mu(\mathfrak{Y})$ überein. Wendet man den Hadamardschen Determinantensatz auf $\overline{[\mathfrak{G}]}' [\mathfrak{Y}] [\mathfrak{G}]$ an, so folgt $|\overline{[\mathfrak{G}]}' [\mathfrak{Y}] [\mathfrak{G}]| \leqq \mu^{2m}(\mathfrak{Y})$ und Lemma 14 gibt die Behauptung.

9. Nun können wir den Nachweis erbringen, daß $V(D_K^{(m)})/\Omega^*$ endlich ist. Der Beweis verläuft analog zu der Schlußweise in § 8. Bezeichne A die endliche Menge der Matrizen $\mathfrak{g}\bar{\mathfrak{g}}'$ für diejenigen ganzen m-reihigen Vektoren $\mathfrak{g}$, deren Komponenten durch ξ dem Betrage nach beschränkt sind. Zu jedem vollkommenen $\mathfrak{Y} > 0$ wählen wir $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_m$ aus $\hat{\mathfrak{M}}(\mathfrak{Y})$ nach 8 über Q linear unabhängig und setzen $\mathfrak{G} := (\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_m)$. Die m-reihige Matrix $\mathfrak{G}$ über Q ist umkehrbar. Es wird nun eine unimodulare Matrix $\mathfrak{U}$ so gewählt, daß $\bar{\mathfrak{U}}'^{-1}\mathfrak{G}$ die Gestalt (10.6) hat. Die Spaltenvektoren $\bar{\mathfrak{U}}'^{-1}\mathfrak{g}_k$ von $\bar{\mathfrak{U}}'^{-1}\mathfrak{G}$ gehören nach (10.7) zu $\hat{\mathfrak{M}}(\mathfrak{U}\mathfrak{Y}\bar{\mathfrak{U}}')$ und 8 liefert $\|[\bar{\mathfrak{U}}'^{-1}\mathfrak{G}]\| \leqq \xi$. Die spezielle Form der Matrix $\bar{\mathfrak{U}}'^{-1}\mathfrak{G}$ in (10.6) zeigt, daß alle Komponenten von $\bar{\mathfrak{U}}'^{-1}\mathfrak{g}_k$ dem Betrage nach durch ξ beschränkt sind, d. h. $(\mathfrak{U}'^{-1}\mathfrak{g}_k)\,(\overline{\mathfrak{U}'^{-1}\mathfrak{g}_k})'$ gehört zu A. Zusammen folgt: *Zu jedem vollkommenen* $\mathfrak{Y} > 0$ *gibt es* $\Phi \in \Omega$ *derart, daß* $M(\Phi^* \mathfrak{Y}) \cap A$ *sicher* m *Matrizen* $\mathfrak{g}\bar{\mathfrak{g}}'$ *enthält, für die die Vektoren* $\mathfrak{g}$ *über* Q *linear unabhängig sind.* Den Beweis der Endlichkeit von $V(D_K^{(m)})/\Omega^*$ werden wir wieder auf das Kriterium in § 5.8 stützen. Die dort verwendeten Voraussetzungen sind erfüllt, wenn wir folgende Aussage zeigen können: *Sind* $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_m$ *über* Q *linear unabhängig, dann gehört*

$$\mathfrak{A} := \sum_{k=1}^{m} \mathfrak{g}_k \bar{\mathfrak{g}}_k'$$

zu $Y_Q^{(m)}$. Hier ist $\mathfrak{A} \geqq 0$. Wäre $\mathfrak{A}$ nicht positiv definit, dann gibt es von Null verschiedenen Vektor $\mathfrak{x}$ über Q mit

$$0 = \bar{\mathfrak{x}}' \mathfrak{A} \mathfrak{x} = \sum_{k=1}^{m} |\bar{\mathfrak{x}}' \mathfrak{g}_k|^2,$$

d. h. $\bar{\mathfrak{x}}' \mathfrak{g}_k = 0$ für $1 \leqq k \leqq m$. Da die $\mathfrak{g}_k$ über Q linear unabhängig vorausgesetzt waren, folgt $\mathfrak{x} = 0$ im Widerspruch zur Wahl von $\mathfrak{x}$.

Die in § 5.8 geforderten Voraussetzungen sind damit erfüllt; $V(D_K^{(m)})/\Omega^*$ *ist endlich.*

10. Wieder haben wir alle in den §§ 1—5 und § 7 benötigten Voraussetzungen nachgewiesen; die in den Sätzen 4 und 6 ausgesprochenen Aussagen gelten daher auch im vorliegenden Falle. In Sonderheit hat man

Satz 9. *Bezüglich der Gruppe der Abbildungen* $\mathfrak{Y} \to \bar{\mathfrak{U}}' \mathfrak{Y} \mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}$ *unimodular, existiert ein Fundamentalbereich* F *innerhalb der hermiteschen positiv definiten Matrizen* $\mathfrak{Y}$ *über* Q,

a) *der in der Vereinigung von endlich vielen vollkommenen Pyramiden enthalten ist,*

b) *dessen abgeschlossene Hülle aus endlich vielen regulären Pyramiden besteht,*

c) *der endlich viele Nachbarn hat und*

d) *für den die Anzahl der inäquivalenten über K ganzen Matrizen $\mathfrak{A} > 0$, für die $|[\mathfrak{A}]|$ beschränkt ist, endlich ist.*

In Teil d) haben wir zwei hermitesche Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ *äquivalent* genannt, wenn es $\mathfrak{U} \in U(m, K)$ mit $\mathfrak{A} = \bar{\mathfrak{U}}'\mathfrak{B}\mathfrak{U}$ gibt.

§ 11. Minkowskische Pyramiden

1. Bei den Anwendungen der Reduktionstheorie quadratischer Formen werden häufig gewisse Ungleichungen für die Matrizen aus einem geeigneten Fundamentalbereich verwendet. Wir geben für diese Ungleichungen einen neuen Beweis, der auf der Tatsache beruht, daß ein Fundamentalbereich aus endlich vielen regulären Pyramiden zusammengesetzt werden kann. Die in den §§ 8—10 erläuterten Beispiele können dabei gemeinsam behandelt werden:

Es bezeichne Λ entweder den Körper R der reellen, den Körper C der komplexen Zahlen oder den Quaternionenkörper Q über den reellen Zahlen. R liegt stets im Zentrum von Λ und in Λ ist eine Involution $\alpha \to \bar{\alpha}$ und ein Betrag $|\alpha|$ erklärt. Matrizen $\mathfrak{A}$ über Λ werden *hermitesch* genannt, wenn $\bar{\mathfrak{A}}' = \mathfrak{A}$ gilt. Bezeichne weiter Λ^m den Vektorraum über R der m-reihigen Vektoren über Λ und Λ_m den Vektorraum über R der m-reihigen hermiteschen Matrizen über Λ. Man hat

$$n_m := \dim_R \Lambda_m = \begin{cases} \frac{m(m+1)}{2}, & \text{für } \Lambda = R, \\ m^2, & \text{für } \Lambda = C, \\ 2m^2 - m, & \text{für } \Lambda = Q. \end{cases}$$

ε werde gleich 1, 2 oder 4 gesetzt, je nachdem Λ gleich R, C oder Q ist. Die Dimension von Λ^m über R ist dann $\varepsilon \cdot m$.

Für $\mathfrak{A} \in \Lambda_m$ und $\mathfrak{x} \in \Lambda^m$ ist $\bar{\mathfrak{x}}'\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ reell und für $\mathfrak{A}$ ist *positiv definit* ($\mathfrak{A} > 0$) und *positiv semidefinit* ($\mathfrak{A} \geq 0$) erklärt. Die Menge $Y_\Lambda^{(m)}$ der positiv definiten $\mathfrak{A}$ aus Λ_m ist ein Positivitätsbereich in Λ_m zur Bilinearform $\sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}(\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\mathfrak{A})$. $GL(m, \Lambda)$ steht für die Gruppe der m-reihigen umkehrbaren Matrizen $\mathfrak{A}$ über Λ. In allen drei Fällen ist für quadratische Matrix $\mathfrak{A}$ über Λ eine „Determinante" $\omega(\mathfrak{A})$ erklärt, und zwar durch

$$\omega(\mathfrak{A}) = \begin{cases} |\mathfrak{A}|, & \text{für } \Lambda = R \text{ oder } C \\ |[\mathfrak{A}]|, & \text{für } \Lambda = Q. \end{cases}$$

2. Wir erinnern an den in § 4.2 definierten Begriff einer regulären Pyramide. Eine n_m-dimensionale Pyramide $P = P(M)$ in $\overline{Y}_\Lambda^{(m)}$ hatten wir *regulär* genannt, falls die die Pyramide aufspannende Menge M regulär ist, d. h. aus Matrizen $\mathfrak{A}_k$ von Λ_m $(1 \leq k \leq N)$ besteht und $\mathfrak{A}_1 > 0$, $\mathfrak{A}_1 \geq \mathfrak{A}_2 \geq \cdots \geq \mathfrak{A}_N \geq 0$ erfüllt

ist. *Zu jeder regulären Pyramide $P(M)$ gibt es $\mathfrak{R}$ aus $GL(m, \Lambda)$ mit*

$$\bar{\mathfrak{R}}'\mathfrak{A}_k\mathfrak{R} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathfrak{B}_k\end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B}_k > 0 \quad (1 \leq k \leq N).$$

Die Anzahl der Nullspalten hängt natürlich von k ab, für $k = 1$ kommen die Nullen nicht vor. Den Beweis dieser Behauptung führen wir durch Induktion nach m. Für $m = 1$ ist nichts zu beweisen. Nehmen wir an, daß die Behauptung für alle Zahlen kleiner als m bewiesen sei. Die natürliche Zahl l bestimmen wir so, daß $\omega(\mathfrak{A}_k) \neq 0$ für $1 \leq k < l$ und $\omega(A_l) = 0$ gilt. Wir wählen nun $\mathfrak{R}_1 \in GL(m, \Lambda)$ mit

$$\bar{\mathfrak{R}}_1'\,\mathfrak{A}_l\mathfrak{R}_1 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathfrak{C}_l\end{pmatrix}, \quad \mathfrak{C}_l > 0 .$$

Da die $\mathfrak{A}_k$ fallend geordnet sind, ist auch

$$\bar{\mathfrak{R}}_1'\mathfrak{A}_k\mathfrak{R}_1 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathfrak{C}_k\end{pmatrix} (l \leq k \leq N), \quad \mathfrak{C}_l \geq \cdots \geq \mathfrak{C}_N \geq 0,$$

wobei die $\mathfrak{C}_k$ alle die gleiche Zeilenzahl r wie $\mathfrak{C}_l$ haben. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es $\mathfrak{R}_2 \in GL(r, \Lambda)$ mit

$$\bar{\mathfrak{R}}_2'\,\mathfrak{C}_k\mathfrak{R}_2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathfrak{B}_k\end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B}_k > 0 \quad (l \leq k \leq N),$$

und

$$\mathfrak{R} := \mathfrak{R}_1\begin{pmatrix}\mathfrak{E} & 0\\ 0 & \mathfrak{R}_2\end{pmatrix}$$

leistet das in der Behauptung Verlangte. *Ist $\Lambda = R$ (bzw. $\Lambda = Q$) und sind die Elemente von $\mathfrak{A}_k$ ganz-rationale Zahlen (bzw. ganze Quaternionen), dann kann $\mathfrak{R}$ offenbar unimodular gewählt werden.*

3. Für eine Matrix $\mathfrak{Y} = (\eta_{kl}) \in \Lambda_m$ bezeichne $\hat{\mathfrak{Y}}$ die Diagonalmatrix der Diagonalelemente $\eta_k := \eta_{kk}$. Eine Pyramide P in $Y_\Lambda^{(m)}$ wollen wir eine *minkowskische Pyramide* nennen, wenn es positive Konstanten $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ so gibt, daß für alle $\mathfrak{Y} \in P$ gilt

(MP. 1) $$0 \leq \eta_k \leq \varrho_1\eta_{k+1} \quad \text{für} \quad 1 \leq k < m,$$

(MP. 2) $$|\eta_{kl}| \leq \varrho_2\eta_k \quad \text{für} \quad 1 \leq k, l \leq m,$$

(MP. 3) $$\varrho_3\hat{\mathfrak{Y}} \geq \mathfrak{Y} \geq \frac{1}{\varrho_3}\hat{\mathfrak{Y}}.$$

Einen Zusammenhang zwischen regulären und minkowskischen Pyramiden gibt

Lemma 15. *Zu jeder regulären Pyramide P gibt es ein $\mathfrak{R} \in GL(m, \Lambda)$, für welches $\bar{\mathfrak{R}}'P\mathfrak{R}$ eine minkowskische Pyramide ist.*

Beweis: Wir gehen von einer Pyramide $P = P(M)$ mit regulärem M aus und bestimmen die Matrix $\mathfrak{R}$ nach 2. Wir zeigen, daß $\bar{\mathfrak{R}}'P\mathfrak{R}$ eine minkowskische Pyramide ist. Jedes $\mathfrak{Y}$ aus $\bar{\mathfrak{R}}'P\mathfrak{R}$ kann in der Gestalt

(11.1) $$\mathfrak{Y} = \sum_{k=1}^{N}\lambda_k\mathfrak{A}_k, \quad \lambda_k \geq 0, \quad \mathfrak{A}_r = (\alpha_{kl}^{(r)}) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathfrak{B}_r\end{pmatrix}$$

mit positiv definiten $\mathfrak{B}_r$ geschrieben werden. Die Matrizen $\mathfrak{A}_r$ sind fallend geordnet. Die spezielle Gestalt von $\mathfrak{A}_r$ zeigt, daß aus $\alpha_{k+1}^{(r)} = 0$ stets $\alpha_k^{(r)} = 0$ folgt, d. h. es gibt $\varrho_1 > 0$ mit $\alpha_k^{(r)} \leq \varrho_1 \alpha_{k+1}^{(r)}$ für alle r und k. Trägt man dies in (11.1) ein, so folgt (MP. 1). Entsprechend kann $\varrho_2 > 0$ mit $|\alpha_{kl}^{(r)}| \leq \varrho_2 \alpha_k^{(r)}$ bestimmt werden, denn aus $\alpha_k^{(r)} = 0$ folgt $\alpha_{kl}^{(r)} = 0$. Das ergibt (MP. 2). Zum Nachweis von (MP. 3) sei β_r die Zeilenzahl von $\mathfrak{B}_r$. Es gibt $\varrho_3 > 0$ mit

$$\sqrt{\varrho_3}\, \mathfrak{E}^{(\beta_r)} \geq \mathfrak{B}_r \geq \frac{1}{\sqrt{\varrho_3}} \mathfrak{E}^{(\beta_r)}$$

für alle r und mit (11.1) hat man

$$\sqrt{\varrho_3}\, \mathfrak{D} \geq \mathfrak{Y} \geq \frac{1}{\sqrt{\varrho_3}} \mathfrak{D}\,, \quad \text{für} \quad \mathfrak{D} := \sum_{r=1}^{N} \lambda_r \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{E}^{(\beta_r)} \end{pmatrix}.$$

Die Diagonalelemente von $\mathfrak{D}$ hängen natürlich von $\mathfrak{Y}$ ab, aber es ist

$$\sqrt{\varrho_3}\, \mathfrak{D} \geq \hat{\mathfrak{Y}} \geq \frac{1}{\sqrt{\varrho_3}} \mathfrak{D} \quad \text{oder} \quad \varrho_3 \hat{\mathfrak{Y}} \geq \sqrt{\varrho_3}\, \mathfrak{D} \geq \mathfrak{Y} \geq \frac{1}{\sqrt{\varrho_3}} \mathfrak{D} \geq \frac{1}{\varrho_3} \hat{\mathfrak{Y}}$$

und das ist (MP. 3).

4. Die vorstehenden Überlegungen verwenden wir nun zum Nachweis dafür, daß das euklidische Volumen einer Pyramide in $\overline{Y}_\Lambda^{(m)}$ bis zur Fläche $\omega(\mathfrak{Y}) = 1$ endlich ist. Da jedes $\mathfrak{Y}$ aus Λ_m als Punkt im euklidischen R^{n_m} aufgefaßt werden kann, ist das euklidische Volumen einer meßbaren Teilmenge von Λ_m definiert.

Lemma 16. *Für jede Pyramide $P = P(M)$ in $\overline{Y}_\Lambda^{(m)}$ ist das euklidische Volumen der Punktmenge $\{\mathfrak{Y};\, \mathfrak{Y} \in P,\, \omega(\mathfrak{Y}) \leq 1\}$ endlich.*

Beweis: Man darf annehmen, daß $P(M)$ die maximale Dimension n_m hat. Nach Lemma 6 ist $P(M)$ Vereinigung endlich vieler n_m-dimensionaler regulärer Pyramiden, von denen jede nach Lemma 15 Bild einer minkowskischen Pyramide bei einer Abbildung $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{R}' \mathfrak{Y} \mathfrak{R}$ ist. Es genügt daher, wenn gezeigt wird, daß für eine minkowskische Pyramide P die Menge

$$P^* := \{\mathfrak{Y};\, \mathfrak{Y} \in P,\, \omega(\mathfrak{Y}) \leq 1\}$$

ein endliches euklidisches Volumen hat. Für $\mathfrak{Y} \in P^*$ ist nach (MP. 3) $\hat{\mathfrak{Y}} \leq \varrho_3 \mathfrak{Y}$ und die Monotonie von $\omega(\mathfrak{Y})$ liefert $\omega(\hat{\mathfrak{Y}}) \leq \omega(\varrho_3 \mathfrak{Y}) \leq \gamma_{11}$. $\omega(\hat{\mathfrak{Y}})$ ist im Falle $\Lambda = R$ oder C gleich $\eta_1 \cdots \eta_m$ und für $\Lambda = Q$ gleich $\eta_1^2 \cdots \eta_m^2$. In allen drei Fällen gilt daher $\eta_1 \cdots \eta_m \leq \gamma_{12}$. Für $\mathfrak{Y}$ sind außerdem die Ungleichungen (MP. 1) und (MP. 2) gültig. Führt man bei Beachtung von (MP. 2) die Integration über die ε reellen Komponenten von η_{kl} $(k < l)$ aus, so folgt für das fragliche Volumen V von P^*

$$V \leq \gamma_{13} \int\limits_{\substack{\eta_1 \cdots \eta_m \leq \gamma_{12} \\ 0 \leq \eta_k \leq \varrho_1 \eta_{k+1}}} \eta_1^{\varepsilon(m-1)} \cdot \eta_2^{\varepsilon(m-2)} \cdot \ldots \cdot \eta_{m-1}^{\varepsilon}\, d\eta_1\, d\eta_2 \cdots d\eta_m\,.$$

Die Substitution $\eta_k = \varrho_1^{-k+1} \eta_1 \xi_k$ $(2 \leq k \leq m)$ und Ausführung der Integration über η_1 ergibt

$$V \leq \gamma_{14} \int\limits_{1 \leq \xi_2 \leq \cdots \leq \xi_m} \xi_2^{\alpha_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \xi_m^{\alpha_m - 1}\, d\xi_2 \cdots d\xi_m$$

mit $\alpha_k := \varepsilon\left(\frac{m+1}{2} - k\right)$. Man prüft leicht nach, daß dieses Integral konvergiert.

Im Hinblick auf Lemma 16 könnte man vermuten, daß das Volumen einer Pyramide bis zur Fläche $\omega(\mathfrak{Y}) = 1$ in jedem (homogenen) Positivitätsbereich endlich ist. Daß dies nicht der Fall ist, zeigt das Beispiel eines direkten Produktes $Y = Y_1 \times Y_2$ von zwei Positivitätsbereichen Y_1 und Y_2 mit den Normen ω_1 und ω_2, wenn man als Norm von Y das Produkt $\omega := \omega_1 \cdot \omega_2$ nimmt.

§ 12. Anwendung auf die quadratischen Formen

Die Ergebnisse über die minkowskischen Pyramiden im § 11 wenden wir nun auf die in den §§ 8—10 gegebenen Beispiele an.

a) Reelle positiv definite quadratische Formen

In der Bezeichnung von § 8 gibt es nach Satz 7b einen Fundamentalbereich F in $Y_R^{(m)}$ bezüglich der Gruppe der Abbildungen $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{U}'\mathfrak{Y}\mathfrak{U}$ mit unimodularen $\mathfrak{U}$, der in der Vereinigung von endlich vielen regulären Pyramiden $P(M_k)$ enthalten ist. Nach Lemma 15 existiert zu jedem k eine umkehrbare Matrix $\mathfrak{R}_k$, so daß $P_k := \mathfrak{R}_k' P(M_k) \mathfrak{R}_k$ eine minkowskische Pyramide ist. Die Konstruktion der Pyramiden $P(M_k)$ nach Lemma 6 zeigt, daß die Mengen M_k aus ganzen positiv semidefiniten Matrizen bestehen. Nach § 11.2 können daher die Matrizen $\mathfrak{R}_k$ unimodular gewählt werden. Man überzeugt sich nun leicht davon, daß der Durchschnitt von $Y_R^{(m)}$ mit der Vereinigung der Pyramiden P_k wieder ein Fundamentalbereich $\hat{F}$ von Ω ist. Zusammen hat man

Satz 10. *Es gibt einen Fundamentalbereich $\hat{F}$ im Bereiche der $\mathfrak{Y} > 0$ bezüglich der Gruppe der Abbildungen $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{U}'\mathfrak{Y}\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}$ unimodular, mit folgenden Eigenschaften:*

a) *$\hat{F}$ ist in einer endlichen Vereinigung von Pyramiden $P(M)$ enthalten. Die die Pyramiden $P(M)$ aufspannenden Mengen M bestehen jeweils aus endlich vielen ganzen Matrizen $\mathfrak{A}_k$, $1 \leqq k \leqq N$, mit*

$$\mathfrak{A}_1 > 0, \mathfrak{A}_1 \geqq \mathfrak{A}_2 \geqq \cdots \geqq \mathfrak{A}_N \geqq 0, \mathfrak{A}_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{B}_k \end{pmatrix}, \mathfrak{B}_k > 0 .$$

b) *Es gibt positive $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ derart, daß für jedes $\mathfrak{Y} = (\eta_{kl}) \in \hat{F}$ gilt*

$$0 \leqq \eta_k \leqq \varrho_1 \eta_{k+1} \ (1 \leqq k < m), \ |\eta_{kl}| \leqq \varrho_2 \eta_k \ (1 \leqq k, l \leqq m), \ \varrho_3 \hat{\mathfrak{Y}} \geqq \mathfrak{Y} \geqq \frac{1}{\varrho_3} \hat{\mathfrak{Y}}.$$

Der zweite Teil dieses Satzes — die „Minkowski-Siegelschen Ungleichungen" — ist die wesentliche Aussage der sogenannten Minkowskischen Reduktionstheorie. Der direkte Beweis der Ungleichungen (vgl. etwa C. L. SIEGEL [7] und [9], Lemma 12) macht keinen Gebrauch von den vollkommenen Matrizen und gibt die ersten beiden Ungleichungen mit $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = \frac{1}{2}$. Die letzte Ungleichung von Teil b) liefert zusammen mit dem Hadamardschen Determinantensatz

$$|\mathfrak{Y}| \leqq \eta_1 \cdots \eta_m \leqq \varrho_3^m |\mathfrak{Y}|$$

für alle $\mathfrak{Y} \in \hat{F}$. Lemma 16 ergibt ein Ergebnis von MINKOWSKI [5].

Satz 11. *Das euklidische Volumen der Menge der $\mathfrak{Y} \in F$ mit $|\mathfrak{Y}| \leq 1$ ist endlich.*

Bisher mußte man auf Grund der Herleitung der Minkowski-Siegelschen Ungleichungen annehmen, daß diese eine Folge der speziellen arithmetischen Eigenschaften der unimodularen Gruppe sind. Der hier eingeschlagene Weg zeigt im Gegensatz dazu, daß diese Ungleichungen in gewisser Weise jeder Pyramide zukommen. Die einzige arithmetische Aussage ist in der Endlichkeit von $V(D)/\Omega^*$ manifestiert. Eine entsprechende Situation liegt bei den anderen Beispielen vor.

b) Positiv definite quadratische Formen über algebraischen Zahlkörpern

Wir schließen an die Bezeichnung von § 9 an und verallgemeinern den Begriff der minkowskischen Pyramide auf den Bereich Y der allgemeinen positiv definiten Matrizen $\mathfrak{Y}$. Eine Pyramide P in $\overline{Y}$ nennen wir eine *minkowskische Pyramide*, wenn es positive Konstanten $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ derart gibt, daß für alle allgemeinen Matrizen $\mathfrak{Y} \in P$ mit $\mathfrak{Y}^{[\nu]} = (\eta_{kl}^{[\nu]})$ gilt

(MP. 1) $$0 \leq \eta_k^{[\nu]} \leq \varrho_1 \eta_{k+1}^{[\nu]}, \; 1 \leq k < m, \; 1 \leq \nu \leq q\,,$$

(MP. 2) $$|\eta_{kl}^{[\nu]}| \leq \varrho_2 \eta_k^{[\nu]}, \; 1 \leq k, l \leq m, \; 1 \leq \nu \leq q\,,$$

(MP. 3) $$\varrho_3 \hat{\mathfrak{Y}}^{[\nu]} \geq \mathfrak{Y}^{[\mu]} \geq \frac{1}{\varrho_3} \mathfrak{Y}^{[\nu]}, \; 1 \leq \nu, \mu \leq q\,.$$

Bei festem ν bedeutet (MP. 1—3) offenbar, daß die Konjugierte $\mathfrak{Y}^{[\nu]}$ von $\mathfrak{Y}$ in einer minkowskischen Pyramide im alten Sinne enthalten ist. (MP. 3) gibt darüber hinaus aber eine Kopplung der verschiedenen Konjugierten, zweifache Anwendung liefert speziell

(12.1) $$\varrho_3^2 \mathfrak{Y}^{[\nu]} \geq \mathfrak{Y}^{[\mu]}, \; 1 \leq \nu, \mu \leq q\,.$$

Satz 12. *Ist K ein algebraischer Zahlkörper, dann existiert bezüglich der Gruppe der Abbildungen $\mathfrak{Y} \to \overline{\mathfrak{U}}' \mathfrak{Y} \mathfrak{U}$ mit über K unimodularen $\mathfrak{U}$ ein Fundamentalbereich F der allgemeinen Matrizen $\mathfrak{Y} > 0$, der in der Vereinigung von endlich vielen Bildern $\overline{\mathfrak{R}}_k P_k \mathfrak{R}_k$, $\mathfrak{R}_k \in GL(m)$, von minkowskischen Pyramiden P_k enthalten ist.*

Beweis: Wegen Satz 8b genügt es, wenn wir zeigen, daß jede in jenem Satz vorkommende reguläre Pyramide $P(M)$ im Bild einer minkowskischen Pyramide enthalten ist. Nach Definition einer regulären Pyramide besteht $P(M)$ aus allen allgemeinen Matrizen $\mathfrak{Y}$ mit

$$\mathfrak{Y}^{[\nu]} = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \mathfrak{A}_k^{[\nu]}\,, \quad \mathfrak{A}_k^{[\nu]} \in M\,, \quad \lambda_k \geq 0\,,$$

und es ist

(12.2) $$\mathfrak{A}_1^{[\nu]} > 0, \mathfrak{A}_1^{[\nu]} \geq \mathfrak{A}_2^{[\nu]} \geq \cdots \geq \mathfrak{A}_N^{[\nu]} \geq 0\,.$$

Nach Konstruktion der regulären Pyramiden nach Lemma 6 sind die Matrizen $\mathfrak{A}_k^{[\nu]}$ bei festem k Summen von Matrizen $\mathfrak{g}^{[\nu]}\overline{\mathfrak{g}^{[\nu]}}'$, $\mathfrak{g} \in G_K^{(m)}$, der Rang von $\mathfrak{A}_k^{[\nu]}$ hängt daher nur von k aber nicht von ν ab. Bei festem ν wenden wir das Er-

gebnis von § 11.2 an und erhalten Matrizen $\mathfrak{R}^{[\nu]} \in GL(m, R)$ $(1 \leqq \nu \leqq r_1)$ und $\mathfrak{R}^{[\nu]} \in GL(m, C)$ $(r_1 < \nu \leqq r_1 + 2r_2)$ mit $\bar{\mathfrak{R}}^{[\nu]} = \mathfrak{R}^{[\nu - r_2]}$ $(r_1 + r_2 < \nu \leqq r_1 + 2r_2)$ und

$$\overline{\mathfrak{R}^{[\nu]}}' \mathfrak{A}_\varkappa^{[\nu]} \mathfrak{R}^{[\nu]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{B}_\varkappa^{[\nu]} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B}_\varkappa^{[\nu]} > 0 .$$

Die $\mathfrak{R}^{[\nu]}$ faßt man zu einer allgemeinen Matrix $\mathfrak{R}$ zusammen. Wir zeigen, daß $\bar{\mathfrak{R}}' P(M) \mathfrak{R}$ eine minkowskische Pyramide ist. Zuerst dürfen wir uns auf $\mathfrak{R}^{[\nu]} = \mathfrak{E}$, d. h. $\mathfrak{R} = \mathfrak{E}$ beschränken und

$$\mathfrak{A}_\varkappa^{[\nu]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{B}_\varkappa^{[\nu]} \end{pmatrix} = (\alpha_{kl;\varkappa}^{[\nu]}), \quad \mathfrak{B}_\varkappa^{[\nu]} > 0 ,$$

annehmen. Oben hatten wir gesehen, daß der Rang von $\mathfrak{A}_\varkappa^{[\nu]}$, d. h. die Zeilenzahl $m_\varkappa$ von $\mathfrak{B}_\varkappa^{[\nu]}$ nicht von ν abhängt. In Hinblick auf (12.2) bestimmen wir positive Konstante $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ mit

$$0 \leqq \alpha_{k;\varkappa}^{[\nu]} \leqq \varrho_1 \alpha_{k+1;\varkappa}^{[\nu]} \tag{12.3}$$

$$|\alpha_{kl;\varkappa}^{[\nu]}| \leqq \varrho_2 \alpha_{k;\varkappa}^{[\nu]} \tag{12.4}$$

$$\sqrt{\varrho_3}\, \mathfrak{E}^{(m_\varkappa)} \geqq \mathfrak{B}_\varkappa^{[\nu]} \geqq \frac{1}{\sqrt{\varrho_3}} \mathfrak{E}^{(m_\varkappa)} \tag{12.5}$$

für alle $\nu, \varkappa, k, l$. Betrachtet man jetzt die $\mathfrak{Y}$ aus $P(M)$ mit $\mathfrak{Y}^{[\nu]} = (\eta_{kl}^{[\nu]})$, d. h.

$$\eta_{kl}^{[\nu]} = \sum_{\varkappa=1}^{N} \lambda_\varkappa \alpha_{kl;\varkappa}^{[\nu]}, \quad \lambda_\varkappa \geqq 0 ,$$

so geben (12.3) und (12.4) sofort (MP. 1) und (MP. 2). Für (MP. 3) ist nach (12.5)

$$\sqrt{\varrho_3}\, \mathfrak{D} \geqq \mathfrak{Y}^{[\nu]} \geqq \frac{1}{\sqrt{\varrho_3}} \mathfrak{D}, \quad \text{für} \quad \mathfrak{D} := \sum_{\varkappa=1}^{N} \lambda_\varkappa \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{E}^{(m_\varkappa)} \end{pmatrix}.$$

Jetzt folgt $\sqrt{\varrho_3} \cdot \mathfrak{D} \geqq \hat{\mathfrak{Y}}^{[\nu]} \geqq \frac{1}{\sqrt{\varrho_3}} \mathfrak{D}$ und daher für $1 \leqq \nu, \mu \leqq q$

$$\varrho_3 \hat{\mathfrak{Y}}^{[\nu]} \geqq \sqrt{\varrho_3}\, \mathfrak{D} \geqq \mathfrak{Y}^{[\mu]} \geqq \frac{1}{\sqrt{\varrho_3}} \mathfrak{D} \geqq \frac{1}{\varrho_3} \hat{\mathfrak{Y}}^{[\nu]},$$

und das ist (MP. 3).

Wie in § 9.2 sei

$$\omega(\mathfrak{Y}) := \prod_{\nu=1}^{q} |\mathfrak{Y}^{[\nu]}|$$

die Norm von Y (bezüglich χ). Für über K unimodulares $\mathfrak{U}$ ist offenbar $\omega(\bar{\mathfrak{U}}' \mathfrak{Y} \mathfrak{U}) = \omega(\mathfrak{Y})$. Wenden wir uns abschließend dem Nachweis zu, daß das euklidische Volumen des Fundamentalbereiches F bis zur Normfläche $\omega(\mathfrak{Y}) = 1$ endlich ist. Wegen Satz 12 genügt es, wenn das Volumen der Menge $\{\mathfrak{Y};\ \mathfrak{Y} \in P,\ \omega(\mathfrak{Y}) \leqq 1\}$ für eine minkowskische Pyramide P als endlich erkannt wird. Für diese $\mathfrak{Y}$ gilt wegen (12.1) und der Monotonie der Determinante $|\mathfrak{Y}^{[\nu]}|$

$$|\mathfrak{Y}^{[\nu]}| \leqq \varrho_3^{\frac{2(q-1)m}{q}} \quad (1 \leqq \nu \leqq q) .$$

Das fragliche Volumen ist daher endlich, falls das Volumen der allgemeinen $\mathfrak{Y} > 0$ mit (MP. 1—3) und $|\mathfrak{Y}^{[\nu]}| \leq 1$ $(1 \leq \nu \leq q)$ endlich ist. Da die Konjugierten $\mathfrak{Y}^{[\nu]}$ von $\mathfrak{Y}$ in einer minkowskischen Pyramide im Sinne von § 11.3 enthalten sind, war die Endlichkeit dieses Volumens in Lemma 16 bewiesen und man hat in der Bezeichnung von Satz 12:

Satz 13. *Das euklidische Volumen der $\mathfrak{Y}$ aus F mit $\omega(\mathfrak{Y}) \leq 1$ ist endlich.*

c) Quadratische Formen über den Quaternionen

Bei diesem letzten Beispiel können wir uns etwas kürzer fassen, da die Überlegungen analog dem Fall a) verlaufen. Nach Satz 9 gibt es einen Fundamentalbereich F im Bereich der hermiteschen positiv definiten m-reihigen Matrizen über Q bezüglich der Gruppe der Abbildungen $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{U}'\mathfrak{Y}\mathfrak{U}$ mit unimodularen $\mathfrak{U}$, der in der Vereinigung von endlich vielen regulären Pyramiden P_k enthalten ist. Nach einer Bemerkung in § 11.2 können die Matrizen $\mathfrak{R}_k$ aus $GL(m, Q)$, für die $\mathfrak{R}_k' P_k \mathfrak{R}_k$ eine minkowskische Pyramide (vgl. § 11.3) ist, unimodular gewählt werden. Die Vereinigung $\hat{F}$ der $\mathfrak{R}_k' P_k \mathfrak{R}_k$ ist wieder ein Fundamentalbereich und es gilt daher

Satz 14. *Es gibt einen Fundamentalbereich $\hat{F}$ der über Q hermiteschen positiv definiten Matrizen $\mathfrak{Y}$ bezüglich der Gruppe der Abbildungen $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{U}'\mathfrak{Y}\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}$ unimodular, und positive Konstanten $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ mit*

$$0 \leq \eta_k \leq \varrho_1 \eta_{k+1} \quad (1 \leq k < m),$$
$$|\eta_{kl}| \leq \varrho_2 \eta_k \quad (1 \leq k, l \leq m),$$
$$\varrho_3 \hat{\mathfrak{Y}} \geq \mathfrak{Y} \geq \frac{1}{\varrho_3} \hat{\mathfrak{Y}}$$

für alle $\mathfrak{Y} = (\eta_{kl})$ aus $\hat{F}$.

Die letzte Ungleichung liefert wieder

$$\|[\mathfrak{Y}]\| \leq \eta_1^2 \cdot \eta_2^2 \cdots \eta_m^2 \leq \varrho_3^{2m} \|[\mathfrak{Y}]\|$$

für $\mathfrak{Y}$ aus $\hat{F}$. Lemma 16 ergibt noch

Satz 15. *Das euklidische Volumen der Menge der $\mathfrak{Y} \in \hat{F}$ mit $\|[\mathfrak{Y}]\| \leq 1$ ist endlich.*

Literatur

[1] Hertneck, Ch.: Positivitätsbereiche und Jordanstrukturen. Diss. Münster/Westf. (1959), erscheint in den Math. Ann.

[2] Humbert, P.: Théorie de la réduction des formes quadratiques définies positives dans un corps algébrique K fini. Comment. Math. Helv. **12**, 263—306 (1940).

[3] Koecher, M.: Positivitätsbereiche im R^n. Am. J. Math. **79**, 575—596 (1957).

[4] Koecher, M., u. R. Roelcke: Diskontinuierliche und diskrete Gruppen von Isometrien metrischer Räume. Math. Z. **71**, 258—267 (1959).

[5] Minkowski, H.: Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz. Ges. Abh. Bd. 2, 53—100.

[6] Roelcke, W.: Über Fundamentalbereiche diskontinuierlicher Gruppen. Math. Nachr. **20**, 329—355 (1959).

[7] Siegel, C. L.: Einheiten quadratischer Formen. Abh. math. Sem. Hansische Univ. **13**, 209—239 (1940).

[8] SIEGEL, C. L.: Discontinuous groups. Ann. Math. **44**, 674—689 (1943).
[9] SIEGEL, C. L.: On the theory of indefinite quadratic forms. Ann. Math. **45**, 577—622 (1944).
[10] VORONOÏ, G.: Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites. J. reine angew. Math. **133**, 97—178 (1908).
[11] VORONOÏ, G.: Récherches sur les parallélloètres primitifs I, II. J. reine angew. Math. **134**, 198—287 (1908); **136**, 67—181 (1909).
[12] v. D. WAERDEN, B. L.: Die Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen. Acta Math. **96**, 265—309 (1956).
[13] WEYL, H.: The theory of reduction for arithmetical equivalence. Trans. Am. Math. Soc. **48**, 126—164 (1940); **51**, 203—231 (1942).
Weitere Literatur siehe B. L. v. D. WAERDEN [12].

(Eingegangen am 25. April 1960)

WAGNER, K.
Math. Annalen 141, 433—451 (1960)

Bemerkungen zu Hadwigers Vermutung

Von

K. WAGNER in Köln

Einleitung

Es sei $G = E \cup K$ ein Graph[1]). P sei eine Teilmenge von E. Wir nennen die Vereinigungsmenge aus P und denjenigen Kanten von G, deren Endpunkte beide in P liegen, den von P *aufgespannten Untergraphen* von G. Die Anzahl der Komponenten dieses Untergraphen[2]) bezeichnen wir mit $\sigma(P)$. $\sigma(P) = 1$ ist also gleichbedeutend damit, daß der von P aufgespannte Untergraph von G zusammenhängend ist.

Def. 1. *Man habe zwei Graphen $G = E \cup K$ und $G' = E' \cup K'$. Wir sagen dann und nur dann, G ist homomorph zu G', in Zeichen:*

$$G \approx G',$$

wenn es eine eindeutige Abbildung φ aus[3]) E auf E' gibt mit den folgenden Eigenschaften:

1. $|p', q'| = 1 \Rightarrow |\varphi^{-1}(p'), \varphi^{-1}(q')| = 1$ *(für jedes $p', q' \in E'$)*,
2. $\sigma(\varphi^{-1}(p')) = 1$ *(für jedes $p' \in E'$).*

Wir nennen einen Graphen ein *Simplex* $S(n)$, wenn er aus n Ecken besteht und $|p, q| \leq 1$ für je zwei Ecken p, q des Graphen gilt. Können die Ecken eines Graphen G mit n Farben ($1 \leq n < \infty$) derart gefärbt werden, daß je zwei Ecken p, q von G mit $|p, q| = 1$ stets verschieden gefärbt sind, und gibt es keine solche Färbung der Ecken von G mit weniger als n Farben, so heißt n die *chromatische Zahl* von G. Wir bezeichnen sie mit $\Phi(G)$. Dann lautet die Ver-

---

[1]) Es ist oft praktisch, in G folgende Metrik einzuführen: Sind P, Q zwei nicht leere Teilmengen von E (E = Eckenmenge, K = Kantenmenge von G), so verstehen wir unter dem *Abstande* $|P, Q|$ von P und Q folgende Zahl: 1. Gilt $P \cap Q \neq \Theta$, so sei $|P, Q| = 0$, 2. Gilt $P \cap Q = \Theta$ und existiert ein aus n, dagegen kein aus weniger als n Kanten von G bestehender Kantenzug, der eine Ecke von P mit einer Ecke von Q verbindet, so sei $|P, Q| = n$, 3. Gilt $P \cap Q = \Theta$ und gibt es keinen Kantenzug in G, der eine Ecke von P mit einer Ecke von Q verbindet, so sei $|P, Q| = \infty$. Nennen wir $p, q \in E$ äquivalent dann und nur dann, wenn $|p, q|$ endlich ist, so heißen die von den Äquivalenzklassen von E aufgespannten Untergraphen (s. o.) von G die *Komponenten* von G. Ein Graph $G' = E' \cup K'$ heißt ein *Teilgraph* von $G = E \cup K$ (oder auch umgekehrt: G ein *Obergraph* von G'), wenn $E' \subseteq E$ und $K' \subseteq K$ gilt. Insbesondere nennen wir einen Teilgraphen G' von G einen *Untergraphen* von G, wenn jede Kante von G, die zwei Ecken von E' verbindet, zu K' gehört.

[2]) Im folgenden wird diese Anzahl stets endlich sein, da wir uns auf endliche Graphen beschränken werden.

[3]) Das heißt, von einer Teilmenge von E.

mutung von H. Hadwiger: Für jede natürliche Zahl n gilt

$$(H_n) \qquad \Phi(G) = n \Rightarrow G \approx S(n)\,.$$ [4]

Ist in Def. 1 insbesondere $G' = S(n)$, so gilt der Pfeil der Eigenschaft 1 auch in der entgegengesetzten Richtung (von rechts nach links). Dieses gilt aber z. B. nicht für die Graphen G, G' der Abb. 1 mit $\varphi(p_i) = p'_i$ $(1 \leq i \leq 3)$, $\varphi(p_4) = p'_2$. Gilt $G \approx G'$, so können wir uns für jedes $p' \in E'$ den von $\varphi^{-1}(p')$ aufgespannten Untergraphen von G, da dieser nach Def. 1 zusammenhängend ist, jeweils auf eine Ecke desselben zusammengezogen denken. Der hierbei aus G resultierende Graph ist nach Def. 1 einem Obergraphen von G' isomorph.

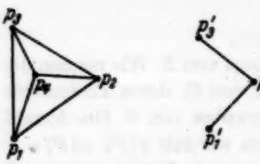

Fig. 1

Fassen wir isomorphe Graphen als gleiche Graphen auf, so bedeutet $G \approx G'$ also, daß sich G auf (wenigstens) einen Obergraphen von G' zusammenziehen lassen soll. Ist G' zusammenhängend, so ist $G \approx G'$ gleichbedeutend damit, daß sich (wenigstens) eine Komponente von G auf einen Obergraphen von G' zusammenziehen läßt, dessen Eckenmenge gleich E' (Eckenmenge von G') ist. Speziell bedeutet $G \approx S(n)$ also, daß es eine Komponente von G gibt, die sich auf $S(n)$ zusammenziehen läßt.

Im folgenden wollen wir Homomorphieklassen von Graphen untersuchen. Wir werden allgemein zeigen, daß eine Homomorphieklasse stets eine bestimmte Basis besitzt (vgl. Satz 3 und 6). Die Aufgabe, eine Basis explizit zu bestimmen, wird für gewisse Homomorphieklassen gelöst (Satz 4, 5 und 7). Hierbei ergibt sich gleichzeitig ein neuer Beweis von (H_n) für $n \leq 4$. Ferner folgt mittels der für $n = 5$ bestimmten Basis der überraschende Satz, daß (H_5) mit dem Vierfarbensatz äquivalent ist (Satz 1). Mittels einer weiteren Basis erhalten wir im Satz 2 eine gewisse Teilaussage von (H_6). Schließlich ergibt sich anhand der Basis (Satz 7) einer anderen Homomorphieklasse folgende Abschwächung von (H_5):

$$\Phi(G) = 5 \Rightarrow G \approx S(5) - k\,,$$

worin k eine Kante von $S(5)$ bedeutet.

§ 1. Homomorphieklassen von Graphen

Aus Def. 1 folgt leicht:

(1.1) *Gilt $G \approx G'$, $G \subseteq \overline{G}$ und $G'' \subseteq G'$, so ist auch $\overline{G} \approx G''$.*

Die Homomorphie von Graphen ist mit folgender Einschränkung transitiv:

(1.2) *Ist G' zusammenhängend, so gilt:* $G \approx G'$ & $G' \approx G'' \Rightarrow G \approx G''$

Denn φ bzw. ψ seien die $G \approx G'$ bzw. $G' \approx G''$ zugrunde liegenden eindeutigen Abbildungen aus E auf E' bzw. aus E' auf E''. Da G' zusammenhängend ist, können wir voraussetzen, daß ψ eine Abbildung *von* E' auf E''

[4] Vgl. [1], [2] und [5]. Gilt $G \approx G'$ und ist G' endlich, so existiert ein zu G' homomorpher, endlicher Untergraph von G. Da anderseits auch zu jedem unendlichen Graphen G mit einer (endlichen) chromatischen Zahl $\Phi(G) = n$ ein endlicher Untergraph G' von G mit $\Phi(G') = \Phi(G)$ existiert (vgl. [4], S. 43 oben), können wir uns im folgenden auf die Untersuchung endlicher Graphen beschränken.

ist. Dann ergibt die zusammengesetzte Abbildung $\psi \cdot \varphi$ eine Homomorphie von G zu G''.

Da jeder Graph G mit $\Phi(G) \geq n$ einen (zusammenhängenden) Untergraphen $\overline{G}$ mit $\Phi(\overline{G}) = n$ enthält, so ist (H_n) nach (1.1) äquivalent mit:

$$\Phi(G) \geq n \Rightarrow G \approx S(n)\,.$$

Daher ist weiter (H_n) äquivalent mit:

$$G \not\approx S(n) \Rightarrow \Phi(G) \leq n - 1\,.$$

Wir wollen nun noch eine weitere mit (H_n) äquivalente Formulierung ableiten, die feinere Unterscheidungen zu machen erlaubt als das obige (H_n).

Def. 2. *Wir nennen einen (endlichen) Graphen $G = E \cup K$ simplexartig dann und nur dann, wenn es eine Zerlegung $E_1, \ldots, E_l$ von E* $\Big($*das soll heißen, mit* $E_\lambda \neq \Theta$, $\lambda = 1, \ldots, l$; $1 \leq \lambda < \mu \leq l \Rightarrow E_\lambda \cap E_\mu = \Theta$; $\bigcup\limits_{\lambda=1}^{l} E_\lambda = E$; $l = 1 \Rightarrow |E| = 1$[5]$\Big)$ *derart gibt, daß $|p, q| = 1 \Longleftrightarrow p, q$ aus verschiedenen $E_\lambda, E_\mu (\lambda \neq \mu)$.*

Ist G simplexartig und $E_1, \ldots, E_l$ nach Def. 2 eine Zerlegung der Eckenmenge von G, so bezeichnen wir G ausführlicher mit:

$$G = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)\,,$$

worin $\alpha_\lambda = |E_\lambda|$ für $\lambda = 1, \ldots, l$ bedeuten. Zum Beispiel ist der simplexartige Graph der Abb. 2 ein (3,3).

Fig. 2

Def. 3. *Man habe einen simplexartigen Graphen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$. Wir verstehen dann unter $\mathfrak{H}^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ die Gesamtheit derjenigen Graphen G, die nicht homomorph zu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ sind, kurz:*

$$\mathfrak{H}^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) = \{G \cdot|.\, G \not\approx (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)\}\,.$$

Wir nennen $\mathfrak{H}^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ die *Homomorphieklasse*[6]) zu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$. Wir bezeichnen die Klasse $\mathfrak{H}^*(1, \ldots, 1)$ (d. h. mit $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$) kurz mit $\mathfrak{H}^*(n)$. Zum Beispiel ist $\mathfrak{H}^*(3)$ die Klasse sämtlicher Bäume, d. h. derjenigen G, deren Komponenten sich auf kein Dreieck zusammenziehen lassen. $\mathfrak{H}^*(3,3)$ dagegen besteht aus sämtlichen G, die sich auf keinen Obergraphen von (3,3) zusammenziehen lassen. (H_n) ist dann äquivalent mit der folgenden Aussage:

$$(H_n^*) \qquad G \in \mathfrak{H}^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)\ \&\ \sum_{\lambda=1}^{l} \alpha_\lambda = n \Rightarrow \Phi(G) \leq n - 1\,.$$

Denn (H_n) folgt aus (H_n^*), wenn wir $\alpha_1 = \cdots = \alpha_l = 1$ setzen. Umgekehrt folgt (H_n^*) aus (H_n) nach (1.1) wegen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \subseteq S(n)$.

---

[5]) Wir bezeichnen die Anzahl der Elemente einer (endlichen) Menge M mit $|M|$. $\alpha(G)$ bedeute immer die Anzahl der Ecken von G (also $\alpha(G) = |E|$). Wir betrachten generell nur Kanten mit verschiedenen Endpunkten. Schlingen (d. h. Kanten mit zwei zusammenfallenden Endpunkten) sollen bei uns also nicht vorkommen.

[6]) Streng genommen, müßten wir sie die *komplementäre* Homomorphieklasse zu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ nennen, da wir ja diejenigen G zusammengefaßt haben, die *nicht* homomorph zu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ sind. Wir könnten auch die Klasse $\mathfrak{H}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ sämtlicher $G \approx (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ betrachten (vgl. auch [1], S. 134).

Für jedes (feste) $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ mit $\sum_{\lambda=1}^{l} \alpha_\lambda = n$ ist die für dieses $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ gemachte Aussage von (H_n^*) eine bestimmte Teilaussage von (H_n^*) und daher wegen der Äquivalenz von (H_n) mit (H_n^*) auch von (H_n). Die für $(1, \ldots, 1) = S(n)$ gemachte Teilaussage von (H_n^*) fällt mit (H_n) zusammen. Diese Teilaussage von (H_n^*) ist somit die umfassendste der für alle einzelnen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ zu machenden Teilaussagen von (H_n^*). Ferner sehen wir wegen $S(n-1) \in \in \mathfrak{H}^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ und $\Phi(S(n-1)) = n-1$, daß für keine dieser Teilaussagen von (H_n^*) die rechts stehende Ungleichung von (H_n^*) verbessert werden kann. Aus (1.1) und (1.2) folgt:

$$(1.3)\quad \begin{aligned} &(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \subseteq (\alpha_1', \ldots, \alpha_m') \Rightarrow \mathfrak{H}^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \subseteq \mathfrak{H}^*(\alpha_1', \ldots, \alpha_m') \\ &(\alpha_1', \ldots, \alpha_m') \approx (\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \Rightarrow \mathfrak{H}^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \subseteq \mathfrak{H}^*(\alpha_1', \ldots, \alpha_m') . \end{aligned}$$

Verstehen wir unter $\mathfrak{S}(n)$ die (im Sinne von $\subseteq$) teilweise geordnete Menge sämtlicher simplexartigen Graphen mit der konstanten Eckenanzahl n, so folgt aus dem ersten Teile von (1.3), daß (H_n^*), falls es für ein $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in \mathfrak{S}(n)$ bewiesen ist, dann auch für jeden Vorgänger von diesem $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ in $\mathfrak{S}(n)$ gilt. Da $S(n)$ das Maximum von $\mathfrak{S}(n)$ ist, folgt hieraus nochmals, daß die Teilaussage von (H_n^*) für $(1, \ldots, 1) = S(n)$ die umfassendste sämtlicher Teilaussagen von (H_n^*) ist. Unmittelbar unterhalb dieser Maximalaussage liegt die für das $(1, \ldots, 1, 2) \in \mathfrak{S}(n)$ formulierte Teilaussage von (H_n^*).

(H_n) und daher (H_n^*) ist für jedes $n \leq 4$ bewiesen[7]). Ferner kann verhältnismäßig leicht gezeigt werden, daß der Vierfarbensatz aus (H_5) folgt[8]). Es gilt auch die Umkehrung hierzu und daher:

Satz 1. *(H_5) ist äquivalent mit dem Vierfarbensatz.*

Denn die in [9] betrachtete Gesamtheit der K^* besteht aus sämtlichen zusammenhängenden Graphen der Klasse $\mathfrak{H}^*(5)$. Da jedes K^*, falls der Vierfarbensatz richtig ist, mit höchstens vier Farben gefärbt werden kann, dann also $G \in \mathfrak{H}^*(5) \Rightarrow \Phi(G) \leq 4$ gilt, folgt (H_5^*) und somit (H_5) aus dem Vierfarbensatz. Der Satz 1 deckt sich übrigens mit dem in der Fußnote 14 von [9], S. 573, formulierten Satz.

Zum Beweis von Satz 2 benötigen wir den Hilfssatz:

(1.4) *Stoßen an jeder Ecke von $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ je höchstens drei Kanten an, so ist $G \in \mathfrak{H}^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ äquivalent mit der Aussage: G enthält keine Unterteilung*[9]) *von $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ als Teilgraph.*

Denn, enthält G eine Unterteilung von $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ als Teilgraph, so ist dieser Teilgraph und nach (1.1) auch G zu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ homomorph. Ist umgekehrt G homomorph zu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$, so läßt sich leicht mittels der von den $\varphi^{-1}(p')$ $(p' \in (\alpha_1, \ldots, \alpha_l))$ aufgespannten Untergraphen von G, da diese Untergraphen wegen $\sigma(\varphi^{-1}(p')) = 1$ zusammenhängend sind und an jeder Ecke von

[7]) Vgl. [3], S. 87 Mitte.

[8]) Vgl. [1], S. 136 oben oder auch [9], S. 573, Fußnote 14.

[9]) Werden gewisse Kanten eines Graphen G je mittels endlich vieler (neuer) daraufliegenden Ecken zerlegt, so heißt der aus G resultierende Graph eine *Unterteilung* von G. Auch G selbst heißt eine Unterteilung von G.

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ höchstens drei Kanten anstoßen sollen, eine Unterteilung von $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ in G finden.

Es gilt folgende Teilaussage von (H_6):

Satz 2. $$G \in \mathfrak{H}^*(3,3) \Rightarrow \Phi(G) \leq 5 .$$

Denn die in [8] betrachtete Gesamtheit der $\bar{K}$ deckt sich nach (1.4) mit der Gesamtheit der zusammenhängenden Graphen von $\mathfrak{H}^*(3,3)$. Wir brauchen daher nach Satz II von [8], S. 281, nur zu zeigen, daß jedes Basiselement der $\bar{K}_v$ mit höchstens fünf Farben färbbar ist. Für das Basiselement $S(5)$ ist dies klar und für die übrigen Basiselemente (= ebene Dreieckgraphen) folgt dies aus dem Fünffarbensatz[10]) für ebene Graphen.

Die simplexartigen Graphen sind nicht nur für die Homomorphieklassen, sondern auch für die chromatischen Zahlen interessant. Denn, gilt $\Phi(G) = l \geq 2$, so können wir diejenige Zerlegung $E_1, \ldots, E_l$ der Eckenmenge von G betrachten, worin $E_\lambda (\lambda = 1, \ldots, l)$ die Menge der mit der λ-ten Farbe gefärbten Ecken von G bedeutet. Setzen wir $\alpha_\lambda = |E_\lambda|$ für $\lambda = 1, \ldots, l$, so folgt: $G \subseteq (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ und $\Phi(G) = \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$. Wir sehen also, daß es zu jedem (endlichen) Graphen G $(\Phi(G) \geq 2)$ einen simplexartigen Obergraphen von G mit der gleichen chromatischen Zahl wie $\Phi(G)$ gibt.

§ 2. Die Basis einer Homomorphieklasse

Es sei A ein (endlicher) Graph. Wir verstehen unter $\mathfrak{H}^*(A)$ die Menge sämtlicher (endlichen) Graphen $G \not> A$. Mit anderen Worten ist $\mathfrak{H}^*(A)$ die Klasse derjenigen Graphen, die sich auf keinen Obergraphen von A zusammenziehen lassen. Zunächst gilt:

(2.1) *Zu jedem $G \in \mathfrak{H}^*(A)$ gibt es einen Graphen $\hat{G} \in \mathfrak{H}^*(A)$, $\hat{G} = E \cup \hat{K}$ $(G = E \cup K)$, $\hat{K} \supseteq K$, mit der folgenden Eigenschaft: Werden zwei verschiedene Ecken von $\hat{G}$, die durch keine Kaute von $\hat{G}$ verbunden sein sollen, durch eine (neue) Kante k verbunden, so folgt stets:*

$$\hat{G} \cup k \notin \mathfrak{H}^*(A) .$$

Denn, gibt es zwei Ecken $p, q \in G$ mit $|p, q| > 1$ und $G \cup k \in \mathfrak{H}^*(A)$, worin k eine (neue) Kante mit den Endpunkten p, q bedeute, so können wir anstelle von G den Graphen $G \cup k$ betrachten. Mittels Iteration ergibt sich schließlich, da G endlich ist, ein $\hat{G} \supseteq G$ mit der genannten Eigenschaft.

Wir nennen jeden Graphen $\hat{G} \in \mathfrak{H}^*(A)$ mit der in (2.1) genannten Eigenschaft einen *maximalen* Graphen von $\mathfrak{H}^*(A)$. Wir bezeichnen die Gesamtheit der maximalen Graphen von $\mathfrak{H}^*(A)$ mit $\hat{\mathfrak{H}}^*(A)$. Denken wir uns $\mathfrak{H}^*(A)$ mittels $\subseteq$ teilweise geordnet, so ist ein $G \in \mathfrak{H}^*(A)$ maximal dann und nur dann, wenn es in dieser geordneten Menge keinen Nachfolger von G mit der gleichen Eckenmenge wie die von G gibt. Nachfolger von G, die mehr Ecken als G haben, gibt es in $\mathfrak{H}^*(A)$ immer. Aus (1.1) und (2.1) folgt:

---

[10]) Vgl. etwa [10], S. 11 oder auch [6], S. 29, Fußnote 8.

(2.2) *Wird $\hat{\mathfrak{H}}^*(A)$ mit sämtlichen Teilgraphen seiner $G \in \hat{\mathfrak{H}}^*(A)$ zusammengefaßt, so ergibt sich $\mathfrak{H}^*(A)$.*

Im folgenden interessieren wir uns nun für die Homomorphieklassen $\mathfrak{H}^*(n)$, insbesondere für $\hat{\mathfrak{H}}^*(n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Es gilt:

(2.3) $$\mathfrak{H}^*(1) \subset \mathfrak{H}^*(2) \subset \cdots \subset \mathfrak{H}^*(n) \subset \mathfrak{H}^*(n+1) \subset \cdots.$$

Denn „$\subseteq$" gilt hierbei wegen (1.1). Wegen $S(n) \notin \mathfrak{H}^*(n)$ und $S(n) \in \mathfrak{H}^*(n+1)$ folgt weiter $\mathfrak{H}^*(n) \subset \mathfrak{H}^*(n+1)$. $\mathfrak{H}^*(1)$ besteht aus dem Nullgraphen. $\mathfrak{H}^*(2)$ besteht aus sämtlichen Graphen, die keine Kante enthalten. $\mathfrak{H}^*(3)$ besteht aus sämtlichen Bäumen. Hat G die Eckenanzahl n, so gilt offenbar $G \not\approx S(n+1)$, d. h. $G \in \mathfrak{H}^*(n+1)$. Jeder Graph G liegt also schließlich einmal in den Klassen von (2.3).

Def. 4. *Wir nennen die kleinste Zahl n mit $G \in H^*(n+1)$ den Homomorphiegrad von G. Wir bezeichnen ihn mit $h(G)$.*

In Worten bedeutet $h(G) = n$ folgendes: Wenigstens eine Komponente von G läßt sich auf $S(n)$, aber keine Komponente von G läßt sich auf $S(n+1)$ zusammenziehen; kurz:

$$h(G) = n \Longleftrightarrow G \approx S(n) \;\&\; G \not\approx S(n+1).$$

Nach (1.1) folgt: $G' \subseteq G \Rightarrow h(G') \leq h(G)$. Ferner folgt:

(2.4) $$h(G) < n \Longleftrightarrow G \in \mathfrak{H}^*(n).$$

Weiter gilt:

(2.5) *Sind G' und G'' Untergraphen von G mit $G' \cup G'' = G$ und $G' \cap G'' = S$ (S = Simplex), so folgt: $h(G) = \mathrm{Max}(h(G'), h(G''))$.*

Beweis: Es sei $h(G) = n$ und daher $G \approx S(n)$. Diese homomorphe Abbildung sei gegeben durch φ. Da der Durchschnitt von G' und G'' ein Simplex ist, erfüllt φ auch für G' und desgleichen für G'' die Bedingungen einer homomorphen Abbildung. Daher folgt:

$$G' \approx S' \text{ und } G'' \approx S'',$$

wobei S' oder S'' auch leer sein kann, mit $S' \cup S'' = S(n)$. Da S', S'' Simplexe (bzw. leer) sind, ist mindestens eins von ihnen gleich $S(n)$. Ist etwa $S' = S(n)$, so folgt nach (2.4) $h(G') \geq n$. Wegen der Monotonie von h ist $h(G') \leq n$ und $h(G'') \leq n$. Also ist das Maximum von $h(G')$ und $h(G'')$ gleich $h(G)$[11]).

(2.6) *Sind G' und G'' längs eines Simplexes S zusammengeheftet:*

$$G' \cap G'' = S, \quad G' \cup G'' = G,$$

so gilt:

$$G \in \hat{\mathfrak{H}}^*(n) \Rightarrow G', G'' \in \hat{\mathfrak{H}}^*(n).$$

Beweis: Wegen $G \in \mathfrak{H}^*(n)$ folgt nach (1.1) zunächst: $G', G'' \in \mathfrak{H}^*(n)$. Wir brauchen daher nur noch zu zeigen, daß G' und G'' maximal sind. Hierzu sei k eine (neue) Kante, die zwei Ecken $p, q \in G'$ ($|p, q| > 1$) verbinde. Dann folgt

---

[11]) Der Hilfssatz (2.5) enthält (I) von [9], S. 573, als Spezialfall. Die weiter unten folgenden Hilfssätze (2.7) und (2.9) enthalten (II) und (IV) von [9], S. 574, 575 als Spezialfälle.

nach (2.4) $h(G'') < n$. Da $h(G \cup k) = n$ gilt, folgt wegen $G'' \cap (G' \cup k) = S$ nach (2.5) $h(G' \cup k) = n$. Also ist G' (und analog G'') maximal.

In dem speziellen Falle, daß G' und G'' längs eines Simplexes $S = S(n-2)$ zusammengeheftet sind, gilt auch die Umkehrung von (2.6) und daher:

(2.7) *Gilt:* $\qquad G' \cup G'' = G$ und $G' \cap G'' = S(n-2)$,

so folgt: $\qquad G \in \hat{\mathfrak{H}}^*(n) \Longleftrightarrow G', G'' \in \hat{\mathfrak{H}}^*(n)$.

Beweis: Wir können $G', G'' \in \hat{\mathfrak{H}}^*(n)$ voraussetzen. Nach (2.4) und (2.5) folgt zunächst: $G \in \mathfrak{H}^*(n)$. Da G' und G'' maximal sind, brauchen wir nur $G \cup k$ mit einem k zu betrachten, das eine Ecke $p' \in G' - G''$ mit einer Ecke $p'' \in G'' - G'$ verbindet. Wir nehmen an, Z' sei ein Kantenzug von G, der p' mit einer Ecke $q \in S(n-2)$ verbinde und mit $S(n-2)$ nur seinen Endpunkt q gemeinsam habe (s. Abb. 3). Wäre dann $|p'', q| \neq 1$, so würde sich durch Zusammenzug von Z' auf die Ecke q ergeben, da G'' maximal ist, $G \cup k \approx S(n)$. Falls es ein p', q verbindendes Z' (oder analog ein p'', q verbindendes Z'') gibt, bleibt somit $|p'', q| = 1$ und daher auch $|p', q| = 1$ allein übrig. Wir können daher die beiden Fälle unterscheiden: 1. Es gibt eine Ecke $\bar{q} \in S(n-2)$, die weder mit p' noch mit p'' durch ein Z' bzw. Z'' verbunden ist, 2. $|p', q| = |p'', q| = 1$ für jede Ecke $q \in S(n-2)$. Im 1. Falle betrachten wir sämtliche Ecken q von $S(n-2)$ mit $|p', q| = 1$ und das von p' und diesen q aufgespannte Simplex S'. Ferner sei $G_{p'}$ die Vereinigungsmenge aus S' und sämtlichen in p' beginnenden Kantenzügen[12]) von G, die mit Ausnahme höchstens ihrer Endpunkte keine Ecke mit $S(n-2)$ gemeinsam haben sollen. Es folgt $\bar{q} \notin G_{p'}$. Bedeutet $S(n-1)$ das von p' und $S(n-2)$ aufgespannte Simplex, so würde nach (2.4) und (2.5) wegen $h(G') < n$ und $S(n-1) \cap G_{p'} = S'$ folgen $h(G' \cup S(n-1)) < n$ im Widerspruch dazu, daß G' maximal ist. Es bleibt somit nur der 2. Fall übrig. Dann bilden aber die beiden von p' bzw. p'' und $S(n-2)$ aufgespannten Simplexe zusammen mit der Kante k ein $S(n) \subseteq G \cup k$. Also ist G maximal.

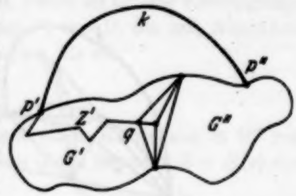

Fig. 3

Werden zwei Graphen $G', G'' \in \hat{\mathfrak{H}}^*(n)$ längs eines Simplexes zusammengeheftet, so braucht der zusammengeheftete Graph keineswegs wiederum in $\hat{\mathfrak{H}}^*(n)$ zu liegen. Jedoch gilt:

(2.8) *Werden zwei Graphen $G', G'' \in \mathfrak{H}^*(n)$ längs eines Simplexes S zusammengeheftet ($G' \cap G'' = S$), so liegt auch der zusammengeheftete Graph $G' \cup G'' = G$ in $\mathfrak{H}^*(n)$.*

Denn aus $h(G') < n$ und $h(G'') < n$ folgt nach (2.5) ja $h(G) < n$, d. h. nach (2.4) $G \in \mathfrak{H}^*(n)$.

Weiter gilt für die übrigen, in (2.7) nicht erledigten Fälle:

(2.9) *Man habe zwei Graphen $G', G'' \in \hat{\mathfrak{H}}^*(n)$ und zwei Simplexe $S'(\nu) \subseteq G'$, $S''(\nu) \subseteq G''$ mit $\nu \leqq n-3$. ($\nu = 0$ ist zugelassen; in diesem Falle sei $S' = S''$*

[12]) Die Ecken an den Kanten dieser Kantenzüge mit dazu gerechnet.

$= \Theta$). Man hefte G' und G'' längs $S'(\nu)$ und $S''(\nu)$ zusammen. Dann liegt der zusammengeheftete Graph $G = G' \cup G''$ ($G' \cap G'' = S'(\nu) = S''(\nu) = S(\nu)$) dann und nur dann in $\hat{\mathfrak{H}}^*(n)$, wenn es entweder in G' oder in G'' kein $S'(\nu)$ bzw. $S''(\nu)$ enthaltendes Simplex mit mehr als ν Ecken gibt.

Beweis: Wir setzen zunächst voraus, in G' existiere kein $S'(\nu)$ enthaltendes Simplex mit mehr als ν Ecken. Nach (2.8) folgt $G \in \mathfrak{H}^*(n)$. Um zu zeigen, daß G maximal ist, genügt es wegen $G', G'' \in \hat{\mathfrak{H}}^*(n)$ eine (neue) Kante $\bar{k}$ mit Endpunkten $p' \in G' - G''$ und $p'' \in G'' - G'$ zu betrachten. Dann folgt analog wie im Beweise von (2.7), daß einer der beiden Fälle 1 oder 2 eintritt. Da aber p' mit wenigstens einer Ecke $\bar{q}$ von $S(\nu)$ durch keine Kante von G verbunden ist, bleibt Fall 1 allein übrig. Es sei S' (wohl zu unterscheiden von $S'(\nu)$!) das von p'

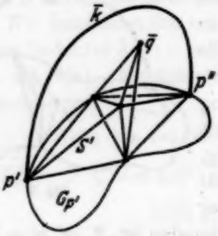

Fig. 4

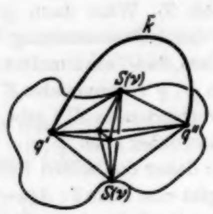

Fig. 5

und denjenigen Ecken von $S(\nu)$ aufgespannte Simplex, die mit p' durch eine Kante von G verbunden sind (s. Abb. 4). Analog wie im Beweise von (2.7) bedeute $G_{p'}$ die Vereinigungsmenge von S' und sämtlichen in p' beginnenden Kantenzügen von G, die mit Ausnahme höchstens ihrer Endpunkte zu $S(\nu)$ fremd sein sollen. Dann würde für das von p' und $S(\nu)$ aufgespannte Simplex $S(\nu + 1)$ nach (2.4) und (2.5) wegen $h(G') < n$ und $S(\nu + 1) \cap G_{p'} = S'$ folgen: $h(G' \cup S(\nu + 1)) < n$ im Widerspruch dazu, daß G' maximal ist. Hieraus folgt, daß G maximal ist. Wir setzen nun umgekehrt voraus, es existiere ein Simplex $S'(\nu + 1) \supset S'(\nu)$ in G' und ein Simplex $S''(\nu + 1) \supset S''(\nu)$ in G''. q' und q'' seien die Ecken von $S'(\nu + 1) - S'(\nu)$ bzw. $S''(\nu + 1) - S''(\nu)$. Wir verbinden q' und q'' durch eine (neue) Kante $\bar{k}$ (s. Abb. 5). Wegen $\nu < n - 2$ folgt nach (2.5) $h(G \cup \bar{k}) < n$. Also ist G nach (2.4) nicht maximal.

Mit ungenauen Worten besagt (2.9), daß wir die maximalen Graphen möglichst „fest" zusammenheften müssen, wenn wir wiederum einen maximalen Graphen erhalten wollen. Hat man einen maximalen Graphen G von $\mathfrak{H}^*(n)$, so ist jedes in G enthaltende Simplex trivialerweise ein maximaler Graph von $\mathfrak{H}^*(n)$. Es sei G ein maximaler Graph von $\mathfrak{H}^*(n)$. Wir nennen G' einen *nicht trivial maximalen* Untergraphen von G, wenn $G' \in \hat{\mathfrak{H}}^*(n)$ und $G' \subset G$ gilt und G' kein Simplex ist. Man beachte hierbei, daß aus $G' \subset G$ nach (1.1) $G' \in \mathfrak{H}^*(n)$ folgt. Ferner ist zu beachten, daß jeder maximale Teilgraph eines maximalen G ein Untergraph von G ist.

Es gilt:

(2.10) *Es sei $G \in \hat{\mathfrak{H}}^*(n)$. Es existiere ein nicht trivial maximaler Untergraph G' von G. Dann gibt es zwei Untergraphen G_1 und G_2 von G mit den folgenden Eigenschaften:*

1. $G_1, G_2 \subset G$,
2. $G_1 \cup G_2 = G$,
3. $G_1 \cap G_2 = S(\nu)$ *mit* $\nu \leq n-2$,
4. $G_1, G_2 \in \hat{\mathfrak{H}}^*(n)$,
5. $G' \subsetneq G_2$.

Beweis: Da G' ein echter Untergraph von G ist, existiert eine Ecke $p \in G - G'$. Wir können voraussetzen, daß an p mindestens eine Kante von G anstößt, da sonst unsere Behauptung trivial ist. Dann sei G'' die Vereinigungsmenge sämtlicher in p beginnenden Kantenzüge[12]) von G, die mit Ausnahme höchstens ihrer Endpunkte zu G' fremd sein sollen. Es sei:

$$G' \cap G'' = \overline{\overline{E}}\,.$$

Da wir je zwei verschiedene Ecken von $\overline{\overline{E}}$ durch einen Kantenzug in G'' verbinden können und G' maximal ist, spannt $\overline{\overline{E}}$ in G ein Simplex $S = S(\nu)$ auf. Dann erfüllen die beiden Untergraphen:

$$G_1 = G'' \cup S, \quad G_2 = (G - G'') \cup S$$

von G die genannten Eigenschaften von (2.10). Denn zunächst gilt $G_1 \cup G_2 = G$ und $G_1 \cap G_2 = S$. Daher sind G_1 und G_2 nach (2.6) maximal. Da unser p nach Konstruktion von G'' mit jeder Ecke von S durch einen Kantenzug von G'' verbunden und $G \neq S(n)$ ist, hat $S = S(\nu)$ eine Eckenanzahl $\nu \leq n-2$. Weiter ist G_2 wegen $p \notin G_2$ ein echter Untergraph von G und desgleichen ist G_1 wegen $G_1 \cap G' = S$ und $G' \neq S$ ein echter Untergraph von G. Die letzte Eigenschaft von (2.10) ist wegen $G' \cap G'' = \overline{\overline{E}}$ erfüllt.

Def. 5. *Wir nennen einen Graphen $G \in \hat{\mathfrak{H}}^*(n)$ einfach[13]) dann und nur dann, wenn es keinen nicht trivial maximalen Untergraphen von G gibt. $\mathfrak{B}(n)$ bedeute die Menge sämtlicher einfachen Graphen von $\hat{\mathfrak{H}}^*(n)$.*

Dann folgt:

Satz 3. *Hat man einen Graphen $G \in \hat{\mathfrak{H}}^*(n)$, so läßt er sich stets mittels gewisser $G_1, \ldots, G_l \in \mathfrak{B}(n)$, wie folgt, zusammenheften:*

$$\bigcup_{\lambda=1}^{l} G_\lambda = G, \quad G_\lambda \cap \bigcup_{\mu=1}^{\lambda-1} G_\mu = S(\nu_\lambda)$$

mit $\nu_\lambda \leq n-2$ für $\lambda = 2, \ldots, l$, wobei in jedem Falle $\nu_\lambda \leq n-3$ mindestens einer der beiden Graphen G_λ oder $\bigcup_{\mu=1}^{\lambda-1} G_\mu$ kein Simplex $S \supset S(\nu_\lambda)$ enthält. Um-

[13]) Streng genommen, müßten wir „einfach in bezug auf $\mathfrak{H}^*(n)$" oder ähnlich sagen. Die einfachen Graphen G sind also durch die beiden Eigenschaften charakterisiert: 1. $G \in \hat{\mathfrak{H}}^*(n)$ und 2. für jedes von den Simplexen von G verschiedene $G' \subset G$ gilt $G' \in \mathfrak{H}^*(n) - \hat{\mathfrak{H}}^*(n)$.

gekehrt ist jeder, mit dieser Einschränkung aus beliebigen $G_1, \ldots, G_l \in \mathfrak{B}(n)$ zusammengeheftete Graph

$$G = \bigcup_{\lambda=1}^{l} G_\lambda$$

stets maximal (d. h. $G \in \hat{\mathfrak{H}}^*(n)$).

Beweis: Ist $G \in \hat{\mathfrak{H}}^*(n)$ einfach, so ist nichts mehr zu zeigen. Andernfalls läßt sich G nach (2.10) in zwei maximale Untergraphen G_1 und G_2 von G mit $G_1 \cap G_2 = S(\nu)$, $\nu \leqq n-2$, zerlegen. Wir nehmen nun an, G sei wie folgt in die maximalen Graphen $G_1, \ldots, G_m$ zerlegt:

$$\bigcup_{\lambda=1}^{m} G_\lambda = G, \ \bigcup_{\lambda=1}^{\mu} G_\lambda \in \hat{\mathfrak{H}}^*(n) \text{ für jedes } \mu = 1, \ldots, m \text{ und } G_\mu \cap \bigcup_{\lambda=1}^{\mu-1} G_\lambda = S(\nu_\mu)$$

mit $\nu_\mu \leqq n-2$ für jedes $\mu = 2, \ldots, m$. Wir betrachten ein (festes) G_μ. Ist dieses G_μ nicht einfach, so läßt es sich nach (2.10) in zwei maximale Untergraphen $G_{\mu 1}$ und $G_{\mu 2}$ von G mit $G_{\mu 1} \cap G_{\mu 2} = S = S(\nu)$ mit $\nu \leqq n-2$ zerlegen. Ist speziell unser $\mu = 1$, so können wir in der Folge $G_1, \ldots, G_m$ ohne weiteres G_1 durch G_{11}, G_{12} ersetzen. Es sei daher unser $\mu \geqq 2$. Dann setzen wir (kurz): $\bigcup_{\lambda=1}^{\mu-1} G_\lambda = U$, $G_{\mu 1} \cap U = S'$, $G_{\mu 2} \cap U = S''$. Wir zeigen zunächst, daß entweder $S' \subseteq S$ oder $S'' \subseteq S$ gilt. Denn aus $S' \cup S'' = S(\nu_\mu)$ folgt $|p', p''| \leqq 1$ für je zwei Ecken $p' \in S'$, $p'' \in S''$. Wäre weder S' noch S'' eine Teilmenge von S, so gäbe es ein $p' \in S' - S$ und ein $p'' \in S'' - S$. Wegen $|p', p''| \leqq 1$ und $G_{\mu 1} \cup G_{\mu 2} = G_\mu$ würden dann aber beide Ecken p', p'' gleichzeitig entweder in $G_{\mu 1}$ oder in $G_{\mu 2}$, also mindestens eine von ihnen in S liegen. Wir können somit $S'' \subseteq S$ annehmen. Dann folgt:

$$G_{\mu 1} \cap U = S' \subseteq S(\nu_\mu), \quad G_{\mu 2} \cap (U \cup G_{\mu 1}) = S'' \cup S = S .$$

Nach (2.6) folgt hieraus weiter: $U \cup G_{\mu 1} \in \hat{\mathfrak{H}}^*(n)$. Wir sehen hieraus, daß die Zerlegung $G_1, \ldots, G_{\mu-1}, G_{\mu 1}, G_{\mu 2}, G_{\mu+1}, \ldots, G_m$ von G unsere über $G_1, \ldots, G_m$ gemachten Annahmen wiederum entsprechend erfüllt. Mittels Iteration ergibt sich eine Zerlegung von G in einfache Graphen. Die Nebenbedingungen in Satz 3 sind dann wegen (2.9) erfüllt. Der letzte Teil von Satz 3 folgt unmittelbar aus (2.7) und (2.9).

Wir nennen $\mathfrak{B}(n)$ (wegen Satz 3) die *Basis*[14]) von $\hat{\mathfrak{H}}^*(n)$ oder auch (wegen (2.2)) von $\mathfrak{H}^*(n)$. Satz 3 liefert die folgende mit (H_n) äquivalente Aussage:

$$(B_n) \qquad G \in \mathfrak{B}(n) \Rightarrow \Phi(G) \leqq n-1 .$$

Da jedes Basiselement $G \in \mathfrak{B}(n)$ in $\mathfrak{H}^*(n)$ liegt, folgt (B_n) aus (H_n). Gilt umgekehrt (B_n), so folgt (H_n^*) nach Satz 3 für jedes maximale G von $\mathfrak{H}^*(n)$ und daher nach (2.2) für sämtliche $G \in \mathfrak{H}^*(n)$. Da (H_n) mit (H_n^*) äquivalent ist, folgt aus (B_n) auch (H_n).

[14]) Da der einfache Graph $S'(n-1) \cup S''(n-1)$ $(S'(n-1) \cap S''(n-1) = S(n-2))$ mittels der beiden einfachen Graphen $S'(n-1)$ und $S''(n-1)$ längs $S(n-2)$ zusammengeheftet ist, ist seine Aufnahme in $\mathfrak{B}(n)$ an sich überflüssig. Wir denken uns deshalb im folgenden diesen Graphen in $\mathfrak{B}(n)$ *nicht* aufgeführt.

§ 3. Aufstellung der Basis von $\mathfrak{H}^*(n)$ für $n \leq 5$ und von $\mathfrak{H}^*(1, 1, 1, 2)$. Die Basis der $\mathfrak{H}^*(1, \ldots, 1, 2)$

Satz 4. *Ist $n \leqq 4$, so besteht die Basis*[14]) $\mathfrak{B}(n)$ *von* $\mathfrak{H}^*(n)$ *(nur) aus den Simplexen* $S(\nu)$, $\nu \leqq n-1$.

Beweis: Für $n = 1$ und $n = 2$ ist unsere Behauptung trivial. Da $G \not\succ S(3)$ gleichbedeutend damit ist, daß G keinen Kreiszug enthält, besteht $\hat{\mathfrak{H}}^*(3)$ aus $S(0)$, $S(1)$ und sämtlichen zusammenhängenden Bäumen. Nach (2.7), $n = 3$, besteht daher $\mathfrak{B}(3)$ aus $S(0)$, $S(1)$ und $S(2)$. Es bleibt somit der Fall $n = 4$ übrig. Es sei daher G ein maximaler Graph von $\mathfrak{H}^*(4)$. Wir können annehmen, daß G kein Simplex ist und folglich zwei Ecken mit einem Abstande > 1 besitzt. Denken wir uns diese Ecken von G durch eine (neue) Kante k verbunden, so lassen sich wegen $G \cup k \approx S(4)$ leicht zwei Ecken p und q in G finden, die durch drei bis auf die gemeinsamen Endpunkte p und q untereinander fremde Kantenzüge Z_1, Z_2, Z_3 von G verbunden sind. Hierbei können wir annehmen, daß Z_1 außer p und q noch mindestens eine Ecke enthält. Wir betrachten nunmehr für sämtliche Ecken $p_1 \neq p, q$ von Z_1 sämtliche in p_1 beginnenden Kantenzüge Z von G, die mit Ausnahme höchstens ihrer Endpunkte keine Ecke mit $Z_2 \cup Z_3$ gemeinsam haben sollen. Es sei G' die Vereinigungsmenge[12]) dieser Z. Dagegen sei G'' die Vereinigungsmenge sämtlicher Kanten von $G - G'$ mit Hinzunahme der an diesen Kanten liegenden Ecken von G. Wegen $G \not\succ S(4)$ ist $G' \cap Z_2 = G' \cap Z_3 = p \cup q$ und nach Konstruktion von G' und G'' daher:

$$G' \cap G'' = p \cup q\,.$$

Wäre $|p, q| > 1$, so könnten wir p, q durch eine (neue) Kante $\bar{k}$ verbinden und es wäre $G \cup \bar{k} \approx S(4)$. Wegen $G \not\succ S(4)$ lägen p und q in zwei verschiedenen Urbildmengen der vier Ecken von $S(4)$. Die beiden anderen Urbildmengen müßten dann wegen $G' \cap G'' = p \cup q$ gleichzeitig entweder in G' oder in G'' liegen. Hieraus würde aber $G \approx S(4)$ folgen im Widerspruch zu $G \in \mathfrak{H}^*(4)$. Es folgt daher $|p, q| = 1$. Ist unser G einfach, so sind die beiden (nach (2.6)) maximalen Graphen $G' \cup k$ und G'', worin k die p, q verbindende Kante von G bedeutet, Simplexe. Also ist außer den Simplexen $S(\nu)$, $\nu \leqq 3$, nur noch der in Fußnote 14 für $n = 4$ genannte Graph einfach.

Aus Satz 4 folgt unmittelbar (B_n) für $n \leqq 4$ und wegen der Äquivalenz von (H_n) mit (B_n) auch (H_n) für $n \leqq 4$. Satz 4 liefert also einen neuen Beweis von (H_4)[15]). Auch $\mathfrak{B}(4)$ an sich ist, im Zusammenhange mit den ebenen Dreieckgraphen betrachtet, aufschlußreich. Denn nach [6], S. 29, kann jeder ebene Dreieckgraph mittels Aneinanderlegung gleichvieler ein- wie ausspringender Dreiecke von G aufgebaut werden. Nehmen wir an, daß wir hierbei zunächst sämtliche ausspringenden Dreiecke aneinander legen können, so erhalten wir nach Satz 3 und 4 $(n = 4)$ einen maximalen Graphen von $\mathfrak{H}^*(4)$. Da die ebenen Dreieckgraphen maximale Graphen von $\mathfrak{H}^*(5)$ sind, sind die maximalen Graphen von $\mathfrak{H}^*(4)$, kurz gesagt, „halbe" maximale Graphen von $\mathfrak{H}^*(5)$. Weiter gilt:

---

[15]) Vgl. den Beweis von DIRAC, [3], S. 87—89.

Satz 5. *Die Basis* $\mathfrak{B}(5)$ *von* $\mathfrak{H}^*(5)$ *besteht aus den Simplexen* $S(\nu)$, $\nu \leqq 4$, *sämtlichen einfachen, ebenen Dreieckgraphen und einem nicht ebenen (in die projektive Ebene einbettbaren) regulären Graphen 3. Grades mit der Ordnung (Eckenanzahl)* 8 (s. Abb. 6).

Der Beweis dieses Satzes ist in [9], § 1 und 2 geführt. Übrigens deckt sich der in [9] am Schluß der Fußnote 14, S. 573, ausgesprochene Satz mit (H_5^*). Es ist zu bemerken, daß $\mathfrak{B}(5)$ im Gegensatz zu $\mathfrak{B}(n)$, $n \leqq 4$, unendlich ist.

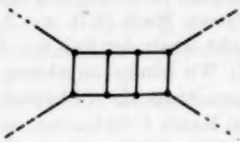

Fig. 6

In $\mathfrak{S}(n)$ ist der simplexartige Graph $(1, \ldots, 1, 2)$ (Eckenanzahl n) der unmittelbare Vorgänger von $S(n)$. Wir können uns $(1, \ldots, 1, 2)$ mittels Zusammenheftung zweier Simplexe $S'(n-1)$, $S''(n-1)$ längs eines beiden gemeinsamen $S(n-2)$ aufgebaut denken. Wir wollen im folgenden zeigen, daß (analog wie $\mathfrak{H}^*(n)$) $\mathfrak{H}^*(1, \ldots, 1, 2)$ stets eine bestimmte Basis besitzt.

Es sei $G' = E' \cup K'$ ein Teilgraph von $G = E \cup K$. Wir sagen, G' *zerlegt* G, wenn $\sigma(E - E') > 1$ gilt. Zunächst gilt:

(3.1) *Es sei* $G \in \hat{\mathfrak{H}}^*(1, \ldots, 1, 2)$. $\bar{S}$ *sei ein Simplex von* G, *das* G *zerlege. Dann gibt es zwei Untergraphen* G' *und* G'' *von* G *mit den folgenden Eigenschaften:* **1.** $G', G'' \subset G$, **2.** $G' \cup G'' = G$, **3.** $G' \cap G'' = S \subseteqq \bar{S}$ *(*S *= Simplex) mit* $\alpha(S) \leqq$ $\leqq \alpha(1, \ldots, 1, 2) - 3$, **4.** $G', G'' \in \hat{\mathfrak{H}}^*(1, \ldots, 1, 2)$.

Beweis: Wir betrachten ein G zerlegendes Simplex $S \subseteqq \bar{S}$ minimaler Eckenanzahl. Es gibt dann zwei echte Untergraphen G' und G'' von G mit $G' \cup G'' = G$ und $G' \cap G'' = S$. Die Anzahl der Ecken von $(1, \ldots, 1, 2)$ sei (kurz) $\alpha(1, \ldots, 1, 2) = n$. Da S minimal gewählt und $G \not\approx (1, \ldots, 1, 2)$ ist, folgt $\alpha(S) \leqq n - 3$. G' und G'' erfüllen also die Eigenschaften 1, 2 und 3. Ferner folgt nach (1.1) $G', G'' \in \mathfrak{H}^*(1, \ldots, 1, 2)$. Wir brauchen daher nur noch zu zeigen, daß G' und G'' maximal sind. Hierzu sei $\bar{k}$ eine (neue) Kante (s. Abb. 7) mit den Endpunkten $p', q' \in$ $\in G'$ ($|p', q'| > 1$). Dann folgt:

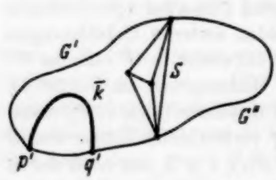

Fig. 7

$$G \cup \bar{k} \approx (1, \ldots, 1, 2)\,.$$

Ist φ die nach Def. 1 gegebene Abbildung bei dieser Homomorphie und sind $q_1, \ldots, q_n$ die Ecken von $(1, \ldots, 1, 2)$ mit $|q_{n-1}, q_n| \neq 1$, so können wir bei den Urbildern $\varphi^{-1}(q_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, n$, drei Arten unterscheiden:

$$1.\ \varphi^{-1}(q_{\nu_1}) \subseteqq G' - G'',\quad 2.\ \varphi^{-1}(q_{\nu_2}) \subseteqq G'' - G',\quad 3.\ S \cap \varphi^{-1}(q_{\nu_3}) \neq \Theta\,.$$

Gibt es kein ν_2, so folgt mittels der $\varphi^{-1}(q_\nu) \cap G'$, $\nu = 1, \ldots, n$ leicht:

$$G' \cup \bar{k} \approx (1, \ldots, 1, 2)\,.$$

Wir können daher annehmen, daß es ein ν_2 gibt. Da mit Ausnahme von q_{n-1}, q_n je zwei verschiedene Ecken von $(1, \ldots, 1, 2)$ durch eine Kante von $(1, \ldots, 1, 2)$ verbunden sind und andererseits keine Kante von G das $G' - S$ mit $G'' - S$

verbindet, bleiben die beiden Fälle übrig: Es gibt kein ν_1, bzw. jedes $\nu \leqq n-2$ ist ein ν_3 und es gilt $n-1=\nu_1$ und $n=\nu_2$ (oder umgekehrt $n-1=\nu_2$, $n=\nu_1$). Im ersten der beiden Fälle folgt aber mittels der $\varphi^{-1}(q_\nu) \cap G''$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ leicht $G'' \approx (1, \ldots, 1, 2)$ im Widerspruch zu $G \in \mathfrak{H}^*(1, \ldots, 1, 2)$. Im letzten Falle folgt, da jedes $\nu \leqq n-2$ ein ν_3 ist, $\alpha(S) \geqq n-2$ im Widerspruch zu $\alpha(S) \leqq n-3$. Also ist G' (und analog G'') maximal.

(3.2) *Werden zwei Graphen G', $G'' \in \mathfrak{H}^*(1, \ldots, 1, 2)$ längs eines Simplexes S, dessen Eckenanzahl $\alpha(S) \leqq \alpha(1, \ldots, 1,2) - 3$ sein soll, zusammengeheftet, so liegt auch der zusammengeheftete Graph $G = G' \cup G''$ in $\mathfrak{H}^*(1, \ldots, 1, 2)$.*

Beweis: Wir nehmen an, es sei (entgegen der Behauptung) $G \approx (1, \ldots, 1, 2)$. $q_1, \ldots, q_n$ seien die Ecken von $(1, \ldots, 1, 2)$ mit $|q_{n-1}, q_n| \neq 1$. Dann können wir analog wie im Beweise von (3.1) bei den Urbildern $\varphi^{-1}(q_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, n$, drei Arten (1), (2) und (3) unterscheiden (s. o.). Gäbe es kein ν_1 (bzw. kein ν_2), so folgt analog wie im Beweise von (3.1) $G'' \approx (1, \ldots, 1, 2)$ (bzw. $G' \approx (1, \ldots, 1,2)$) im Widerspruch zur Voraussetzung von (3.2). Auch der letzte Fall, daß jedes $\nu = 1, \ldots, n-2$ ein ν_3 ist, führt zum Widerspruch mit $\alpha(S) \leqq n-3$. Daher folgt: $G \not\approx (1, \ldots, 1, 2)$, d. h. $G \in \mathfrak{H}^*(1, \ldots, 1, 2)$.

Hat man ein $G \in \hat{\mathfrak{H}}^*(1, \ldots, 1, 2)$, so ist trivialerweise G und jedes Simplex von G maximal[16]). Wir nennen G' einen *nicht trivial maximalen* Untergraphen von G, wenn $G' \in \hat{\mathfrak{H}}^*(1, \ldots, 1, 2)$ und $G' \subset G$ gilt und G' kein Simplex ist.

Dann gilt:

(3.3) *In $G \in \hat{\mathfrak{H}}^*(1, \ldots, 1, 2)$ existiere ein nicht trivial maximaler Untergraph von G. Dann gibt es zwei Untergraphen G_1 und G_2 von G mit den folgenden Eigenschaften:* 1. G_1, $G_2 \subset G$, 2. $G_1 \cup G_2 = G$, 3. $G_1 \cap G_2 = S$ *(S = Simplex) mit* $\alpha(S) \leqq \alpha(1, \ldots, 1, 2) - 3$, 4. $G_1, G_2 \in \hat{\mathfrak{H}}^*(1, \ldots, 1,2)$.

Beweis: G' sei ein nicht trivial maximaler Untergraph von G. Dann gibt es wegen $G' \subset G$ eine Ecke $p \in G - G'$. Es sei $\overline{\overline{E}}$ die Menge derjenigen Ecken von G', die mit unserem p durch mindestens einen Kantenzug von G, der mit Ausnahme seines in G' liegenden Endpunktes mit G' fremd sein soll, verbunden werden können. Da G' maximal ist, spannt $\overline{\overline{E}}$ in G ein Simplex $\overline{\overline{S}}$ auf. $\overline{\overline{E}}$ trennt unser p in G von den Ecken von $G' - \overline{\overline{E}}$. Eine Ecke von $G' - \overline{\overline{E}}$ gibt es, da G' kein Simplex ist. Daher folgt (3.3) aus (3.1).

Def. 6. *Wir nennen einen Graphen $G \in \hat{\mathfrak{H}}^*(1, \ldots, 1, 2)$ einfach dann und nur dann, wenn es keinen nicht trivial maximalen Untergraphen von G gibt. Wir bezeichnen die Menge sämtlicher einfachen Graphen von $\hat{\mathfrak{H}}^*(1, \ldots, 1, 2)$ mit $\mathfrak{B}(1, \ldots, 1, 2)$.*

Dann folgt:

Satz 6. *Hat man einen Graphen $G \in \hat{\mathfrak{H}}^*(1, \ldots, 1, 2)$, so läßt er sich stets mittels gewisser $G_1, \ldots, G_l \in \mathfrak{B}(1, \ldots, 1, 2)$, wie folgt zusammenheften:*

$$\bigcup_{\lambda=1}^{l} G_\lambda = G, \quad G_\lambda \cap \bigcup_{\mu=1}^{\lambda-1} G_\mu = S(\nu_\lambda)$$

mit $\nu_\lambda \leqq \alpha(1, \ldots, 1, 2) - 3$ für $\lambda = 2, \ldots, l$.

[16]) Wir betrachten, genauer gesagt, maximale Graphen von $\mathfrak{H}^*(1, \ldots, 1,2)$.

Umgekehrt liegt jeder auf solche Weise aus beliebigen $G_1, \ldots, G_l \in \mathfrak{B}(1,\ldots,1,2)$ zusammengeheftete Graph $G = \bigcup_{\lambda=1}^{l} G_\lambda$ stets in $\mathfrak{H}^*(1, \ldots, 1, 2)$.

Beweis: Ist G einfach, so ist unsere Behauptung trivial. Andernfalls können wir G nach (3.3) in zwei maximale Untergraphen G_1 und G_2 von G mit den Eigenschaften (1) — (4) zerlegen. Wir nehmen nun an, man habe eine Zerlegung von G in m maximale Untergraphen $G_1, \ldots, G_m$ von G mit:

$$\bigcup_{\lambda=1}^{m} G_\lambda = G \text{ und } G_\mu \cap \bigcup_{\lambda=1}^{\mu-1} G_\lambda = S(\nu_\mu)$$

mit $\nu_\mu \leqq \alpha(1, \ldots, 1, 2) - 3$ für $\mu = 2, \ldots, m$. Hierin sei G_μ nicht einfach. Dann läßt es sich nach (3.3) in zwei maximale Untergraphen $G_{\mu 1}$ und $G_{\mu 2}$ von G mit $G_{\mu 1} \cap G_{\mu 2} = S$ und $\alpha(S) \leqq \alpha(1, \ldots, 1, 2) - 3$ zerlegen. Im Falle $\mu = 1$ können wir in $G_1, \ldots, G_m$ ohne weiteres G_1 durch G_{11}, G_{12} ersetzen. Es sei daher $\mu \geqq 2$. Wir setzen (kurz): $\bigcup_{\lambda=1}^{\mu-1} G_\lambda = U$, $G_{\mu 1} \cap U = S'$, $G_{\mu 2} \cap U = S''$. Analog wie im Beweise von Satz 3 ergibt sich dann, daß entweder $S' \subseteq S$ oder $S'' \subseteq S$ gilt. Wir können daher $S'' \subseteq S$ voraussetzen und wegen

$$G_{\mu 1} \cap U = S' \subseteq S(\nu_\mu) \text{ und } G_{\mu 2} \cap (U \cup G_{\mu 1}) = S'' \cup S = S$$

anstelle von $G_1, \ldots, G_m$ dann $G_1, \ldots, G_{\mu-1}, G_{\mu 1}, G_{\mu 2}, G_{\mu+1}, \ldots, G_m$ betrachten. Hieraus folgt mittels Iteration schließlich eine Zerlegung von G in einfache Graphen. Der letzte Teil von Satz 6 folgt unmittelbar aus (3.2).

Bei der Zusammenheftung einfacher Graphen braucht sich keineswegs aber ein maximaler Graph zu ergeben. Zum Beispiel zeigt die Abb. 8 einen Graphen G von $\mathfrak{H}^*(1, 1, 2)$, der mittels der beiden einfachen Graphen G_1 und G_2 von $\mathfrak{H}^*(1, 1, 2)$ längs $S = S(1)$ zusammengeheftet, aber wegen $G \cup \bar{k} \in \mathfrak{H}^*(1, 1, 2)$ nicht maximal ist.

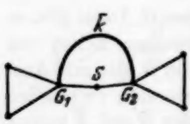

Fig. 8

Wir nennen $\mathfrak{B}(1,\ldots,1,2)$ die *Basis* von $\mathfrak{H}^*(1,\ldots,1,2)$. Nach (2.2) und Satz 6 besteht $\mathfrak{H}^*(1, \ldots, 1, 2)$ aus sämtlichen Teilgraphen von mittels Basiselementen zusammengehefteten Graphen.

Nach (1.1) folgt:

$$\mathfrak{H}^*(4) \subseteq \mathfrak{H}^*(1, 1, 1, 2) \subseteq \mathfrak{H}^*(5)\,.$$

Wir wollen im folgenden $\mathfrak{B}(1, 1, 1, 2)$ bestimmen. Hierzu nennen wir einen Graphen mit den Ecken $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ $(n \geqq 4)$, worin q_1 mit q_{n-1}, $q_{\nu-1}$ mit q_ν und q_0 mit q_ν für jedes $\nu = 1, \ldots, n-1$ (und nur diese Eckenpaare) durch eine Kante verbunden sein sollen, einen *Stern* $X(n)$ mit dem Zentrum q_0. Nennen wir (aus formalen Gründen) auch noch jedes $S(n)$ mit $n \leqq 3$ einen Stern $X(n)$, so folgt leicht, daß jeder Stern $X(n)$ in $\mathfrak{B}(1, 1, 1, 2)$ liegt. Nennen wir weiter einen Graphen mit 6 Ecken q_1, q_2, q_3 und q_1', q_2', q_3', worin jedes dieser beiden Tripel ein Dreieck aufspannen und jedes q_i mit q_i' $(i = 1, 2, 3)$ durch eine Kante verbunden sein soll (s. Abb. 10), ein *Prisma* P_{III}, so folgt mittels der Maximali-

tät von $X(5)$ leicht: $P_{\text{III}} \in \mathfrak{B}(1,1,1,2)$. In $\mathfrak{B}(1,1,1,2)$ liegt ferner noch ein Graph, der sozusagen die Rolle eines „Außenseiters" in $\mathfrak{B}(1,1,1,2)$ spielt. Heften wir nämlich zwei Simplexe $S(3)$ und $S(4)$ längs einer Kante[17]) zusammen, so liegt der zusammengeheftete Graph $S(3) \cup S(4)$ in $\mathfrak{B}(1,1,1,2)$[18]). Betrachten wir schließlich den (nicht ebenen) Graphen (3,3). Da an jeder Ecke von (3,3) drei Kanten von (3,3), an drei Ecken von (1, 1, 1, 2) jedoch vier

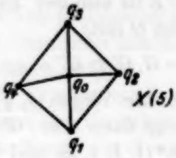

Fig. 9

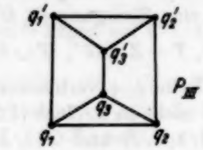

Fig. 10

Fig. 11

Kanten von (1,1,1,2) anstoßen, folgt $(3,3) \not> (1,1,1,2)$, d.h. $(3,3) \in \mathfrak{H}^*(1,1,1,2)$. Fügen wir zu (3,3) eine (neue) Kante $\bar{k}$ hinzu (s. Abb. 11), die also zwei Ecken desselben Tripels von (3,3) verbindet, so folgt leicht $(3,3) \cup \bar{k} \approx (1,1,1,2)$. Daher ist der Graph (3,3) maximal und nach (3.3) einfach. Mit den aufgeführten Basiselementen aber ist $\mathfrak{B}(1,1,1,2)$ erschöpft.

Satz 7. *Die Basis* $\mathfrak{B}(1,1,1,2)$ *von* $\mathfrak{H}^*(1,1,1,2)$ *besteht aus den Sternen* $X(n)$, $n = 0, 1, \ldots$, *dem Prisma und dem (nicht ebenen) Kuratowskischen*[19]) *Graphen* (3,3).

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß der Graph (3,3) das einzige nicht ebene Basiselement von $\mathfrak{H}^*(1,1,1,2)$ ist. Hierzu sei $G \in \mathfrak{B}(1,1,1,2)$ ein nicht ebener Graph. Nach einem Satz von KURATOWSKI[19]) enthält dann G eine Unterteilung T von (3,3) als Teilgraph. Wir wollen zeigen, daß jede Ecke des einen Tripels mit jeder Ecke des anderen Tripels von T durch eine Kante von G verbunden ist. Andernfalls gäbe es auf einem der neun Kantenzüge von T, die die beiden Eckentripel von T verbinden, etwa auf Z, eine Ecke p, die von den Endpunkten q_1, q_2 von Z verschieden ist (s. Abb. 12), und außerdem wäre $|q_1, q_2| > 1$. Es sei dann G_p die Vereinigungsmenge sämtlicher in p beginnenden Kantenzüge[12]) von G, die weder q_1 noch q_2 passieren (d. h., die q_1 bzw. q_2 höchstens als Endpunkt enthalten) sollen. Dann folgt:

$$Z \subsetneq G_p \text{ und } (T - Z) \cap G_p = \Theta .$$

---

[17]) Genauer gesagt, längs eines $S(2)$.

[18]) Dieser Graph ist in $\mathfrak{B}(1,1,1,2)$ an sich überflüssig, da er ja längs einer Kante mittels zweier einfacher Graphen $S(3)$, $S(4)$ zusammengeheftet ist. Wir denken uns deshalb im folgenden diesen Graphen in $\mathfrak{B}(1,1,1,2)$ *nicht* aufgeführt (vgl. Fußnote 14). Der mittels zweier Simplexe $S'(4)$ und $S''(4)$ längs einer Kante zusammengeheftete Graph $S'(4) \cup S''(4)$ ist maximal; aber er ist nicht einfach. Dieser Graph liegt also nicht in $\mathfrak{B}(1,1,1,2)$.

[19]) Vgl.: Sur le problème des courbes gauches en topologie, Fund. Math. 15 (1930), S. 271, oder auch [10], S. 63.

Denn, gäbe es ein $q \in (T - Z) \cap G_p$, so könnten wir eins der beiden durch p erzeugten „Teilstücke“ von Z und analog, falls q kein Endpunkt der Kantenzüge von $T - Z$ ist, eins der beiden durch q erzeugten „Teilstücke“ des q enthaltenden Kantenzuges von $T - Z$ zusammenziehen, so daß bei passender Wahl dieser Teilstücke ein in q_1 bzw. q_2 beginnender Kantenzug von G_p resultiert, dessen Endpunkte beide im selben Eckentripel von T lägen. Da (3,3) maximal ist, ließe sich dann aber G nach (1.1) auf einen (1, 1, 1, 2) zusammenziehen. Der Durchschnitt von G_p mit $T - Z$ ist also leer. Es gibt daher eine Zerlegung G', G'' von G mit:

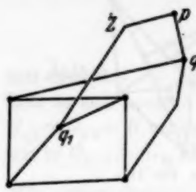

Fig. 12

$$Z \subseteq G',\ T - Z \subseteq G'',\ G' \cup G'' = G,\ G' \cap G'' = q_1 \cup q_2 .$$

Es sei $\bar{k}$ eine q_1, q_2 verbindende Kante. Wegen $|q_1, q_2| > 1$ liegt $\bar{k}$ nicht in G. Nach (1.2) folgt dann aber: $G' \cup \bar{k} \in \in \mathfrak{H}^*(1, 1, 1, 2)$ und $G'' \cup \bar{k} \in \mathfrak{H}^*(1, 1, 1, 2)$ und nach (3.2) weiter $G \cup \bar{k} \in \mathfrak{H}^*(1, 1, 1, 2)$, im Widerspruch zur Maximalität von G. Hiermit hat sich ergeben, daß G den Graphen (3,3) als Teilgraph enthält. Da der Graph (3,3) maximal und G einfach ist, folgt $G = (3,3)$.

Es sei nunmehr $G \in \mathfrak{B}(1, 1, 1, 2)$ ein ebener Graph. Wegen $S(\nu) \in \mathfrak{B}(1,1,1,2)$ für $\nu \leqq 4$ können wir $\alpha(G) \geqq 5$ voraussetzen. Dann gibt es zwei Ecken $p, q \in G$ mit $|p, q| > 1$. Denken wir uns p, q durch eine (neue) Kante $\bar{k}$ verbunden, so folgt $G \cup \bar{k} \approx (1, 1, 1, 2)$. Daher enthält G einen Kreiszug[20]). Da G in der Ebene liegt, gibt es, flächeninhaltsmäßig betrachtet, einen maximalen Kreiszug C in G. Aus (3.2) folgt, daß G durch kein $S(1)$ oder $S(0)$ getrennt wird[21]). Daher liegt G in $I(C) \cup C$ ($I(C)$ = Inneres von C). Wegen $G \cup \bar{k} \approx (1, 1, 1, 2)$ gibt es eine Ecke $p_0 \in I(C)$ von G. Gibt es nur zwei Ecken auf C, die wir von p_0 aus durch Kantenzüge von G in $I(C)$ (d. h. in $I(C)$ mit Ausnahme des auf C liegenden Endpunktes des betreffenden Kantenzuges) verbinden können, so folgt nach (3.1) und (3.2) leicht, daß G gleich $S(3) \cup S(4)$ (vgl. Fußnote 18) ist.

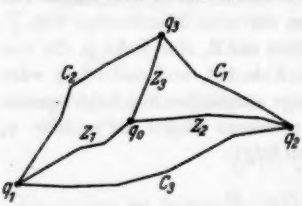

Fig. 13

Wir können daher voraussetzen, daß es drei Kantenzüge Z_1, Z_2, Z_3 von G mit einem gemeinsamen Anfangspunkt $q_0 \in I(C)$ und drei Endpunkten $q_1, q_2, q_3 \in C$ mit $Z_i - q_i \subset I(C)$, $i = 1, 2, 3$ und $Z_i \cap Z_j = q_0$ für je zwei $i \neq j = 1, 2, 3$ gibt. Hierbei können wir noch voraussetzen, daß Z_1, Z_2 und Z_3 unverkürzbar sind, das soll heißen, daß keine zwei auf Z_i nicht benachbarte Ecken von Z_i durch eine Kante von G verbunden sein sollen, $i = 1, 2, 3$. Die Ecken q_1, q_2, q_3 zerlegen C in drei Kantenzüge C_1, C_2, C_3 (s. Abb. 13). Auch C_1, C_2 und C_3 können als unverkürzbar vorausgesetzt werden, da G andernfalls durch die „verkürzende“ Kante in zwei echte Untergraphen zerlegt werden kann und diese

[20]) Da G in der Ebene liegt, ist jeder Kreiszug von G eine (aus Ecken und Kanten von G bestehende) geschlossene Jordankurve.

[21]) Das heißt, G enthält keinen Isthmus und ist zusammenhängend.

beiden Untergraphen nach (3.1) wegen der Einfachheit von G Simplexe sind (vgl. Fußnote 18). Weiter können wir aus ähnlichen Gründen voraussetzen, daß an jeder Ecke von G jeweils mindestens drei Kanten von G anstoßen. Wir betrachten nunmehr die Kreiszüge (s. Abb. 13):

$$C_1 \cup Z_2 \cup Z_3 = C', \quad C_2 \cup Z_3 \cup Z_1 = C'', \quad C_3 \cup Z_1 \cup Z_2 = C'''.$$

Wir unterscheiden die Fälle:

(I) Sämtliche Ecken von G liegen auf $C' \cup C'' \cup C'''$; mindestens vier Kanten von G liegen an q_0.

(II) Sämtliche Ecken von G liegen auf $C' \cup C'' \cup C'''$; (nur) drei Kanten von G liegen an q_0.

(III) Es gibt eine Ecke $p' \in G - (C' \cup C'' \cup C''')$.

Wegen der Unverkürzbarkeit von Z_1, Z_2, Z_3 endet im Fall (I) jede an q_0 liegende Kante von $G - (Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3)$ auf C (und zwar in einer von den Endpunkten q_1, q_2, q_3 von Z_1, Z_2, Z_3 verschiedenen Ecke von C). Daher kann (I) auf (III) zurückgeführt werden, wenn nicht sämtliche an q_0 liegenden Kanten von G auf C enden. Enden aber sämtliche an q_0 liegenden Kanten von G auf C, so ist G im Falle (I), da an jeder Ecke von G mindestens drei Kanten anstoßen, ein Stern mit dem Zentrum q_0. Es bleiben daher die Fälle (II) und (III) übrig.

Wir betrachten den Fall (II). Sind $\breve{Z}_1$, $\breve{Z}_2$, $\breve{Z}_3$ Kanten[22]), so folgt, da an jeder Ecke von C mindestens drei Kanten und an q_0 genau drei Kanten anstoßen, $G = S(4)$. Wir können daher annehmen, daß es eine Ecke $p_1 \in \breve{Z}_1$ gibt. Es existiert dann eine an p_1 liegende Kante $k_1 \in G$, die entweder nach $I(C'')$ oder $I(C''')$ hineinführt. Wir können (aus Symmetriegründen) annehmen, daß k_1 nach $I(C'')$ hineinführt. k_1 endet dann auf $C'' - Z_1$. Dann führt wegen $G \nsucc (1, 1, 1, 2)$ von $\breve{Z}_1$ aus keine Kante von G nach $I(C''')$ hinein (also kurz, nicht auf die zu k_1 entgegengesetzte Seite von Z_1). Auch von $Z_2 - q_2$ aus führt dann keine Kante von G nach $I(C''')$ hinein, da andernfalls, wie leicht wegen der Maximalität von $X(5)$ zu erkennen ist, G sich auf $(1, 1, 1, 2)$ zusammenziehen ließe. Da C_3 unverkürzbar ist, folgt somit:

$$G \cap I(C''') = \Theta.$$

Wegen $k_1 \in I(C'')$ führt daher auch von keiner Ecke $p_3 \in \breve{Z}_3$ aus eine Kante von G nach $I(C')$ hinein. Ferner führt von keiner Ecke von $Z_2 - q_2$ aus eine Kante von G nach $I(C')$ hinein, da andernfalls entweder G sich, wie aus der Maximalität von $X(5)$ leicht folgt, auf $(1, 1, 1, 2)$ zusammenziehen ließe oder G ein Stern mit dem Zentrum q_3 ist. Weiter folgt also:

$$G \cap I(C') = \Theta.$$

Da an jeder Ecke von G mindestens drei Kanten liegen, ergeben die beiden letzten Gleichungen, daß $\breve{C}_1$, $\breve{C}_3$ und $\breve{Z}_2$ Kanten sind. Wir unterscheiden nun die weiteren Fälle: k_1 endet auf $\breve{Z}_3$, $\breve{C}_2$ bzw. in q_3. In jedem der beiden zuerst genannten Fälle (Figur 14 bzw. 15) ist der Teilgraph $G' = C' \cup C'' \cup C''' \cup k_1$

[22]) Ist allgemein Z ein Kantenzug mit den Endpunkten p, q, so verstehen wir unter $\breve{Z}$ das „offene" Z, d. h. $\breve{Z} = Z - (p \cup q)$.

von G Unterteilung eines Prismas P_{III}. Da Z_1, Z_3 und C_2 unverkürzbar sind und P_{III} maximal ist, folgt $G = P_{\mathrm{III}}$. Im letzten Falle (Abb. 16) führt von keiner Ecke von $C_2 - q_3$ aus eine Kante von G nach $I(C'')$ hinein, da diese auf $\check{Z}_1$ enden müßte und G dann wegen der Maximalität von P_{III} homomorph zu $(1, 1, 1, 2)$ wäre. Analog folgt, daß von keiner Ecke von $Z_3 - q_3$ aus eine Kante

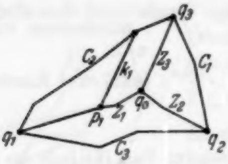

Fig. 14

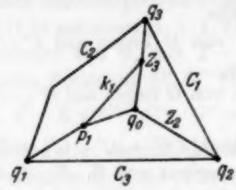

Fig. 15

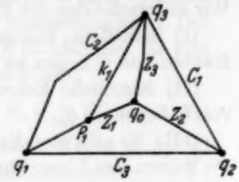

Fig. 16

von G nach $I(C'')$ hineinführt. Hieraus folgt, G ist ein Stern mit dem Zentrum q_3. Somit ist allein noch der Fall (III) übrig geblieben. Wir können dann annehmen, daß es eine Ecke

$$p' \in I(C')$$

gibt (s. Abb. 17). Es sei $G_{p'}$ die Vereinigungsmenge sämtlicher in p' beginnenden Kantenzüge[12]) von G, die mit C' höchstens ihre Endpunkte gemeinsam haben sollen (d. h. die mit Ausnahme höchstens ihrer Endpunkte in $I(C')$ liegen). Hat $G_{p'}$ mit C' nur zwei Ecken gemeinsam, so folgt aus der Maximalität von G, daß diese Ecken durch eine Kante von G verbunden sind. Da G einfach ist, besteht G dann aber aus zwei Simplexen, die längs dieser Kante zusammengeheftet sind. Wir können daher im folgenden voraussetzen, daß $G_{p'} \cap C'$ mindestens drei Ecken enthält. Liegt eine Ecke von $G_{p'} \cap C'$ auf $\check{C}_1$, so müssen wegen $C' \cup C'' \cup C''' \cup G_{p'} \not\succ (1, 1, 1, 2)$ und $|G_{p'} \cap C'| \geqq 3$ sämtliche Ecken von $G_{p'} \cap C'$ auf C_1 liegen. Betrachten wir dann diejenigen beiden Ecken von

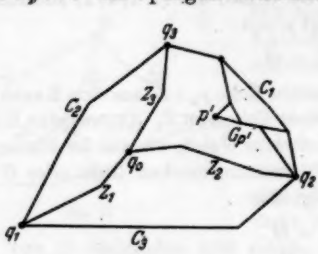

Fig. 17

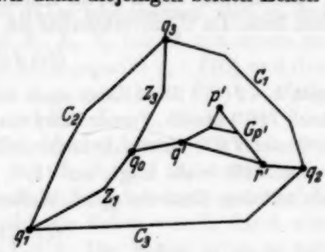

Fig. 18

$G_{p'} \cap C'$, die auf C_1 „am nächsten" bei q_2 bzw. q_3 liegen, so folgt analog wie oben, daß G aus zwei längs einer Kante zusammengehefteten Simplexen besteht. Es bleibt wegen $G \not\succ (1, 1, 1, 2)$ übrig, daß $G_{p'} \cap C'$ entweder auf Z_2 oder auf Z_3 liegt. Aus Symmetriegründen können wir annehmen, daß $G_{p'} \cap C'$ auf Z_2 liegt (s. Abb. 18). Es sei q' bzw. r' die auf Z_2 „am nächsten" bei q_0 bzw. q_2

liegende Ecke von $G_{p'} \cap C'$. Bedeutet C_{I}''' bzw. C_{II}''' den q', r' verbindenden Teilkantenzug von Z_2 bzw. den hierzu komplementären Kantenzug von C''' ($C_{\mathrm{I}}''' \cup C_{\mathrm{II}}''' = C'''$), so verbindet keine Kante von G eine Ecke von $\check{C}_{\mathrm{I}}'''$ mit einer Ecke von $\check{C}_{\mathrm{II}}'''$. Denn nach den Ecken von $Z_2 - C_{\mathrm{I}}'''$ führt keine Kante von G hin, weil Z_2 unverkürzbar ist. Nach den Ecken von $C''' - Z_2$ führt keine Kante von G hin, da andernfalls der aus dieser Kante mit C', C''' und $G_{p'}$ zusammengesetzte Teilgraph von G homomorph zu (1, 1, 1, 2) wäre. Gibt es keine Kante von G, die von einer Ecke von $\check{C}_{\mathrm{I}}'''$ aus nach $I(C''')$ hineinführt, so folgt mittels $G_{p'} \cup C_{\mathrm{I}}'''$ analog wie oben, daß G aus zwei längs einer Kante zusammengehefteten Simplexen besteht. Gibt es dagegen eine Kante von G, die von einer Ecke von $\check{C}_{\mathrm{I}}'''$ aus nach $I(C''')$ hineinführt und daher notwendig in einer Ecke $p''' \in I(C''')$ endet, so können wir unsere Bezeichnungen und Schlüsse ohne weiteres auf das (analoge) $G_{p'''}$ übertragen. Da $G_{p'''}$ bereits eine Ecke auf $\check{Z}_2$ besitzt, können wir (analog wie bei $G_{p'}$) weiter voraussetzen, daß $G_{p'''} \cap C'''$ wiederum auf Z_2 liegt. Ferner folgt, daß die zu q', r' analogen Ecken q''', r''' beide auf C_{I}''' liegen, da sich andernfalls $C' \cup G_{p'} \cup G_{p'''}$ auf ein (1, 1, 1, 2) zusammenziehen läßt. Hieraus folgt, daß $q' \cup r'$ unser G trennt. Da G einfach ist, besteht daher G wiederum aus zwei Simplexen, die längs der (notwendig in G liegenden) q', r' verbindenden Kante zusammengeheftet sind. Ein p''' existiert also nicht (s. Fig. 18). Hiermit ist Satz 7 bewiesen.

Da nach Satz 7 jedes Basiselement von $\mathfrak{H}^*(1, 1, 1, 2)$ mit höchstens vier Farben färbbar ist, hat sich als Folgerung von Satz 6 und 7 ergeben:

Satz 7'. $\quad G \in \mathfrak{H}^*(1, 1, 1, 2) \Rightarrow \Phi(G) \leqq 4\,.$

Da als Spezialfall von Satz 7' weiter:

$$\Phi(G) = 5 \Rightarrow G \approx (1, 1, 1, 2)$$

folgt, sehen wir, daß die unmittelbar unterhalb (H_5) (d. h. unterhalb des Vierfarbensatzes) liegende Teilaussage von (H_5^*) richtig ist.

Literatur

[1] Hadwiger, H.: Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe. Vierteljahresschr. naturforsch. Ges. Zürich 88, 133—142 (1943).

[2] Hadwiger, H.: Ungelöste Probleme. Nr. 26. El. Math. (Basel) 13, 127—128 (1958).

[3] Dirac, G. A.: A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. J. London Math. Soc. 27, 85—92 (1952).

[4] Dirac, G. A.: The structure of k-chromatic graphs. Fundamenta Math. 40, 42—55 (1953).

[5] Dirac, G. A.: A theorem of R. L. Brooks and a conjucture of H. Hadwiger. Proc. London Math. Soc., III. Ser. 7, 161—195 (1957).

[6] Wagner, K.: Bemerkungen zum Vierfarbenproblem. Jber. dtsch. Math.-Ver. 46, 26—32 (1936).

[7] Wagner, K.: Zwei Bemerkungen über Komplexe. Math. Ann. 112, 316—321 (1936).

[8] Wagner, K.: Über eine Erweiterung eines Satzes von Kuratowski. Deutsch. Math. 2, 280—285 (1937).

[9] Wagner, K.: Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. Math. Ann. 114, 570—590 (1937).

[10] Ringel, G.: Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen. Berlin 1959.

(Eingegangen am 22. April 1960)